Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 8, Lösungshinweise

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 29 (b) steht im Skript auf S. 147 ;-)

Aufgabe 31 Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ die) Nullfunktion, $f(x) = 0$ alle $x \in (0, \infty)$.

(a) Klar: Für jedes feste $x \in (0, \infty)$ konvergiert $f_n(x) = 1/nx$ gegen $f(x) = 0$.

(b) Sei $a > 0$. Wir zeigen, die gleichmässige Konvergenz von $f_n \to f$ auf $[a, \infty)$:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq n_0\ \ \forall x \in [a, \infty)\ \text{ gilt }\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ .$$

Sei $\epsilon > 0$. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > \frac{1}{a\epsilon}$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Sei $x \in [a, \infty)$. Dann folgt daraus:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n_0 a} < \frac{1}{\frac{1}{a\epsilon} a} = \epsilon\ .$$

Es folgt also die gleichmässige Konvergenz $f_n \to f = 0$.

(c) Wir zeigen nun, daß keine gleichmässige Konvergenz im Intervall $(0, \infty)$ vorliegt. Zu zeigen ist also:

$$[\ \exists \epsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq n_0\ \ \exists x \in (0, \infty)\ :\ |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\ ]\ .$$

Dazu wählen wir $\epsilon := \frac{1}{2008}$ (einfach genügend klein). Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle nun $n := n_0 \in \mathbb{N}$ und $x := 1/n_0 \in (0, \infty)$. Dann gilt für die obige Wahl:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{nx} = \frac{1}{n_0 \frac{1}{n_0}} = 1 \geq \frac{1}{2008} = \epsilon\ .$$

Also liegt keine gleichmässige Konvergenz im Intervall $(0, \infty)$ vor.

Aufgabe 32

(a) rechnet man sofort nach.

(b) Überall stetig, da Zusammensetzung von stetigen Funktionen.

(c) Sei $y > x$. Dann ist $e^y > e^x$. Also $sinh(y) - sinh(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{-(x+y)})(e^y - e^x) > 0$.

(d) Die Umkehrfunktion existiert auf dem entsprechenden Wertebereich $W(f) = D(f^{-1})$. Da $\lim_{x\to\infty} sinh(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} sinh(x) = -\infty$, ist $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Löse nun $y = sinh(x)$ nach x auf. Mit $z := e^x$ gilt $z^2 - 2zy - 1 = 0$. Da $z > 0$ ist $z = y + \sqrt{y^2 + 1}$ die einzige Lösung. Auf $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$ ist somit

$$f^{-1}(y) = ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Man schreibt in der Regel $f^{-1} = arsinh$.