Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 6, Abgabe bis zum 21.11.2008 um 11:00 Uhr

Aufgabe 21 (a) Man zeige, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

und folgere hieraus, dass

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =: exp(1).$$

(b) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $0 < e - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} < \frac{1}{mm!}$.

(c) Folgere daraus, dass e irrational ist.

(3+2+1 = 6 Punkte)

Aufgabe 22 Eine Schnecke ist sturzbetrunken in einen 4 m tiefen Brunnen gefallen. Bei dem Versuch, wieder herauszuklettern, schafft sie am ersten Tag einen Meter. Den zweiten Tag teilt sie sich in zwei Etappen ein, schafft aber pro Etappe nur q Meter ($0 < q < 1$). Am dritten Tag schafft sie drei Etappen mit jeweils q^2 Metern, am dritten Tag vier Etappen mit q^3 Metern usw. Wie groß muß q mindestens sein, damit die Schnecke in endlicher Zeit am Brunnenrand ankommt?

Hinweis: Doppelreihensatz.

(3 Punkte)

Aufgabe 23 (a) Man zeige, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar ist.

(b) Man zeige, dass die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ nicht abzählbar ist.

(3 + 2 = 5 Punkte)

Aufgabe 24 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Man zeige, dass dann $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(3 Punkte)