

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

## Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

### Blatt 5, Lösungshinweise

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

**Aufgabe 17** (c) Hier ist  $y_n = \frac{1}{2n+(-1)^n}$ . Für  $n \geq 1$  gilt aber  $2n + (-1)^n \leq 2n + 1 \leq 3n$  und deshalb  $y_n \geq \frac{1}{3n}$ . Also ist die Reihe bis auf einen konstanten Faktor eine Majorante der divergenten harmonischen Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  und muss deshalb auch divergieren.

**Aufgabe 19** (a) Wir zeigen eine Verallgemeinerung: Sei  $k \geq 1$  eine natürliche Zahl. Für  $N \geq 1$  berechnen wir die Teilsumme:

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+k-1)(n+k)} \\ &= \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+k-1)} - \frac{1}{(n+1) \cdots (n+k-1)(n+k)} \right] \\ &= \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots k} - \frac{1}{(N+1) \cdots (N+k-1)(N+k)} \right]. \end{aligned}$$

Die Folge mit den Folgegliedern  $x_N := \frac{1}{(N+1) \cdots (N+k-1)(N+k)}$  ist eine Nullfolge, da  $0 \leq x_N \leq \frac{1}{N+1}$ . (Aufgabe 12 - das sogenannte Sandwichkriterium) Es folgt:

$$\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{k \cdot k!}.$$

Insbesondere hat die Reihe in der Aufgabe den Wert 1.

Solche Reihen nennt man teleskopische Reihen. Die *Kürzungen* in dieser Lösung sind möglich, da ein geschlossener Ausdruck  $x_n = a_n - a_{n+1}$  für den  $n$ -ten Summanden  $x_n$  der Reihe gefunden wurde.

(b) Wir verwenden das Majoranten-Kriterium: Da  $s \geq 2$  ist, gilt:

$$\sum_{n \geq 1} n^{-s} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)^2} < 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1 + 1 = 2.$$

**Aufgabe 20** (a) Wir verwenden das Majoranten-Kriterium:

$$\sum_{n \geq 1} a_n q^{-n} \leq \sum_{n \geq 1} (q-1) q^{-n} = (q-1) q^{-1} \sum_{n \geq 0} q^{-n} = (q-1) q^{-1} \frac{1}{1-q^{-1}} = 1.$$

(Die Teilsummen der Reihe  $\sum_{n \geq 1} a_n q^{-n}$  mit positiven Summanden bilden eine monoton steigende Folge, welche nach oben von 1 beschränkt ist. Damit folgt die Konvergenz)

(b) Wir wählen  $a_1$ : Aus  $x \in [0, 1)$  folgt  $qx \in [0, q)$ . Sei dann  $a_1 := [qx]$  die größte ganze Zahl, welche  $\leq qx$  ist (die sogenannte Gaußklammer). Da wir faul sind, verwenden wir die Abkürzung  $y - [y] \in [0, 1) =: \{y\}$ , also etwa  $\{3.55\} = 0.55$ . Es gilt dann für  $n = 1$ :  $q^n \cdot \left( x - \sum_{j=1}^n a_j q^{-j} \right) \in [0, 1)$ .

Wir nehmen nun induktiv an, dass die Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  aus der Menge  $\{0, 1, \dots, (q-1)\}$  derart gewählt wurden, dass gilt:

$$r_{n-1} := q^{n-1} \cdot \left( x - \sum_{j=1}^{n-1} a_j q^{-j} \right) \in [0, 1).$$

Wir wählen nun  $a_n$ , so dass gilt:  $r_n := q^n \cdot \left( x - \sum_{j=1}^n a_j q^{-j} \right) \in [0, 1)$ , wie folgt:

Aus  $r_{n-1} \in [0, 1)$  folgt  $qr_{n-1} \in [0, q)$ . Sei nun

$$a_n := [qr_{n-1}] \in \{0, 1, \dots, (q-1)\}.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} r_n &:= q^n \cdot \left( x - \sum_{j=1}^n a_j q^{-j} \right) \\ &= qr_{n-1} - a_n = qr_{n-1} - [qr_{n-1}] \\ &= \{qr_{n-1}\} \in [0, 1) . \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion sind alle Zahlen  $a_n$  für ganze  $n \geq 1$  bestimmt.

Wir zeigen nun die Gleichheit  $x = \sum_{j \geq 1} a_j q^{-j}$ . Dafür schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} \left| x - \sum_{1 \leq j \leq n} a_j q^{-j} \right| &= q^{-n} \cdot \left| q^n \left( x - \sum_{1 \leq j \leq n} a_j q^{-j} \right) \right| \\ &< q^{-n} \cdot 1 = q^{-n} . \end{aligned}$$

Da  $(q^{-n})_n$  eine Nullfolge ist, folgt aus dem Sandwichkriterium (Aufgabe 12), dass auch die Folge mit dem  $n$ -ten Glied gleich zu  $\left| x - \sum_{1 \leq j \leq n} a_j q^{-j} \right|$  eine Nullfolge ist. Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( x - \sum_{1 \leq j \leq n} a_j q^{-j} \right) = 0,$$

also

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq n} a_j q^{-j} = \sum_{j \geq 1} a_j q^{-j} .$$

Die Darstellung ist nicht eindeutig. Es gilt z.B. zur Basis 10 die Gleichheit:  $0.1 = 0.099999999 \dots$ . Begründung:

$$0.0\bar{9} = \sum_{n \geq 2} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10^2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10} .$$

Analog bei  $0.7653176 = 0.7653175\bar{9}$ ,

(c) Die 2-adische Darstellung (oder auch Binärdarstellung) der Zahl  $1/7$  ist periodisch mit der Periode  $001$ :

$$\begin{aligned} 0.\overline{001}_{(2)} &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \cdots = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{3n}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{8^n} = 8^{-1} \sum_{n \geq 0} 8^{-n} \\ &= 8^{-1} \cdot \frac{1}{1 - 8^{-1}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - 8^{-1}} = \frac{1}{(8 - 1)} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$