Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 4, Abgabe bis zum 07.11.2008 um 11:00 Uhr

Aufgabe 13) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen. Beweise oder widerlege, dass die folgenden Implikationen gelten:

$$(a) \Rightarrow (b), \qquad (b) \Rightarrow (c), \qquad (c) \Rightarrow (a)$$

(a) Die Folge (a_n) ist eine Cauchyfolge;

(b) Die Folge (b_n) mit $b_n = a_{n+1} - a_n$ ist eine Nullfolge;

(c) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(b_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n^k = a_{n+k} - a_n$ eine Nullfolge.

(4 Punkte)

Aufgabe 14 Sei q eine reelle Zahl mit $0 < q < 1$ (etwa 1/4). Von einem Liter Wein gießt man q Liter weg und ersetzt den weggegossenen Teil durch Wasser. Von der Mischung gießt man wiederum q Liter weg und ersetzt den weggegossenen Teil durch Wasser. Diesen Prozeß setzt man fort. Welches Mischungsverhältnis ergibt sich im Grenzwert (falls er denn existiert)?

(3 Punkte)

Aufgabe 15) Sei $x > 0$ eine reelle Zahl. Für $n \in \mathbb{N}$ sei a_n die kleinste natürliche Zahl mit $a_n^2 \geq x \cdot 7^{2n}$. Ferner sei

$$b_n = a_n \cdot 7^{-n} \quad \text{und} \quad c_n = (a_n - 1) \cdot 7^{-n}.$$

Zeige:

(a) b_n ist eine monoton fallende, c_n eine monoton steigende Folge rationaler Zahlen; beide Folgen sind beschränkt; beide Folgen sind konvergent.

(b) Ist $y = \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$, so gilt auch $y = \lim_{n\to\infty} c_n$ und $y^2 = x$.

(c) Folgere daraus, dass der Körper $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist.

(2+2+1 = 5 Punkte)

Aufgabe 16 Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Man beweise: Konvergiert die Folge $(\frac{1}{n}A_n)$, so ist $(\frac{1}{n}a_n)$ eine Nullfolge.

(3 Punkte)