

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

## Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

### Blatt 3, Lösungshinweise

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

**Aufgabe 5** (a) Sei  $B$  die Menge  $\{x/(1+x) : x \in \mathbb{R}, x > -1\}$ . Die Menge  $B$  ist nach unten nicht beschränkt:

Sei  $x$  von der Form  $-1 + \frac{1}{n}$  für  $n \geq 2$ . Es folgt:

$$\frac{x}{1+x} = \frac{-1 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = n \left(-1 + \frac{1}{n}\right) \leq n \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{n}{2}.$$

Es folgt  $\inf B = -\infty$ .

Für alle  $x > -1$  gilt:

$$\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} < 1 - 0 = 1.$$

Es folgt  $\sup B \leq 1$ .

Wir zeigen nun  $\sup B = 1$ . Sei  $s < 1$ . Nach dem archimedischen Axiom gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft:

$$n > \frac{1}{1-s} - 1.$$

Es folgt sukzessive:  $n+1 > 1/(1-s)$ ,  $1-s > 1/(n+1)$ ,  $1 > s + 1/(n+1)$ ,  $1 - 1/(n+1) > s$ ,  $n/(n+1) > s$ ,  $s$  ist keine obere Grenze von  $B$ .

Bei der anderen Menge erhält man  $\sup(\cdot) = 1$ ,  $\inf(\cdot) = 0$ .

(b) Ohne Lösung

**Aufgabe 6** Exemplarisch sei Teil a) gelöst.

(a) Aus  $|a| > 1$  folgt für  $b := |a| - 1$ :  $b > 0$ . Dann gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |x_n - 0| &= |x_n| = \left| \frac{n}{a^n} \right| = \frac{n}{|a|^n} = \frac{n}{(1+b)^n} = \frac{n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}b + \binom{n}{2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n} \\ &\leq \frac{n}{\binom{n}{2}b^2} \quad \text{für } n \geq 2 \\ &= \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}b^2} = \frac{2}{(n-1)b^2}. \end{aligned}$$

(Frage: Wann ist für ein gegebenes  $\epsilon > 0$  der Ausdruck  $2/((n-1)b^2) < \epsilon$ ? Für welche  $n \in \mathbb{N}$ ?)

Sei  $\epsilon > 0$ . Sei  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > 1 + \frac{2}{\epsilon b^2}$  und  $n_0 \geq 2$  (archimedisches Axiom!). Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ . Dann gilt:

$$|x_n - 0| \leq \frac{2}{(n-1)b^2} \leq \frac{2}{(n_0-1)b^2} < \frac{2}{\left(\left(1 + \frac{2}{\epsilon b^2}\right) - 1\right)b^2} = \epsilon.$$

Also:  $|x_n - 0| < \epsilon$ . Also  $x_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Bei (b) und (c) kommt Null heraus.

**7** (a) Laut dem Tipp soll man die Folgen  $y_{2n}$  und  $y_{2n-1}$  untersuchen. Was soll das mit der Folge  $y_n$  und deren Konvergenz zu tun haben...? Konvergiert eine Folge gegen einen Grenzwert  $\alpha$ , so konvergiert natürlich auch jede ihrer Teilfolgen, und zwar gegen den gleichen Grenzwert  $\alpha$ . Wir wollen das hier umdrehen, um auf die Konvergenz von  $y_n$  zu schließen. Da wir ja zeigen wollen, dass  $y_n$  gegen einen Grenzwert  $\alpha$  konvergiert, ist unsere naheliegende Vermutung, dass  $y_{2n}$  und  $y_{2n+1}$  auch gegen den Grenzwert  $\alpha$  konvergieren. Wenn aber die Folgen der ungeraden und der geraden Folgenglieder beide gegen den gleichen Grenzwert  $\alpha$  konvergieren, konvergiert natürlich die ganze Folge gegen  $\alpha$ .

Betrachte  $y_{2n+1}$ . Diese Folge ist monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt, also konvergent. Also existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{2n+1}}{y_{2n}}$ . Ein Standardtrick, um Grenzwerte von rekursiv definierten Folgen  $a_n$  zu berechnen, ist zu beachten, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}$ : Klar, wenn  $n$  nach

$\infty$  läuft, dann auch  $n - 1$ . Man nimmt nun auf beiden Seiten der rekursiv definierten Folge den Grenzwert und kriegt so eine Gleichung an diesen Grenzwert, die man lösen kann, die Lösung ist der Grenzwert. Natürlich muß man erst einmal wissen, dass der Grenzwert existiert. Verwirrt...? Hoffentlich bringen die folgenden Beispiele in a) und b) Erleuchtung.

Aufgrund der Rekursionsbeziehungen gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n+3}}{x_{2n+2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n} + 2x_{2n+1}}{x_{2n+1} + x_{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 \frac{x_{2n+1}}{x_{2n}}}{1 + \frac{x_{2n+1}}{x_{2n}}}. \end{aligned}$$

Nennen wir den Grenzwert  $\alpha$  und führen die Limesbildung durch, so gilt mit den Rechenregeln für Grenzwerte (siehe auch Skript S. 31)

$$\alpha = \frac{1 + 2\alpha}{1 + \alpha}.$$

Auflösen nach  $\alpha$  liefert eine quadratische Gleichung mit den Lösungen  $\alpha = \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , wobei die negative Lösung ausscheidet, da die Folge nur positive Summanden hat.

Analog kann man für  $\frac{x_{2n}}{x_{2n-1}}$  argumentieren: Die Folge ist monoton steigend und durch 2 beschränkt, also konvergent. Den Grenzwert berechnet man wie oben und erhält wiederum  $\alpha$ . Also konvergiert  $y_n$  gegen  $\alpha$ .

(b) Wir wenden den gleichen Trick wie in der (a) an: Wir zeigen, dass die Folge konvergent ist und bestimmen dann den Grenzwert durch eine *Fixpunktgleichung*.

Die Folge ist monoton wachsend: Es gilt  $x_0 = 1$  und  $x_1 = \sqrt{1 + x_0} = \sqrt{2} > 1$ . Nehme induktiv an, dass  $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}} \geq x_{n-1}$  gilt. Dann folgt

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} \geq \sqrt{1 + x_{n-1}} = x_n.$$

Ebenfalls per Induktion zeigt man, dass die Folge durch 2 nach oben beschränkt ist. Also ist sie konvergent.

Der Grenzwert: Es gilt wie in (a)

$$\begin{aligned}\alpha &:= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + x_n} \\ &= \sqrt{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \\ &= \sqrt{1 + \alpha}\end{aligned}$$

Hierbei wurde die benutzt, dass man den Limes in die Wurzel reinziehen kann (wie in der Aufgabenstellung angegeben). Diese Eigenschaft nennt man Stetigkeit und wird für die Wurzelfunktion später in der Vorlesung bewiesen. Löst man obige Gleichung nach  $\alpha$  auf, erhält man exakt die gleiche quadratische Gleichung wie in (a) und da die negative Lösung wieder nicht in Betracht kommt, den gleichen Grenzwert.

(c) Für  $y_n$  leitet man die Rekursionsbeziehung  $y_n = \frac{1}{1+y_{n-1}}$  her. Iteriert man diese, so erhält man die gewünschte Kettenbruchdarstellung

$$\alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Puh. Diese Aufgabe war schwer...

Der Grenzwert  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ist eine ganz besondere Zahl: Es ist der sogenannte goldene Schnitt. Die Folge  $x_n$  nennt man auch Fibonacci-Folge. Beide sind sehr interessant und tauchen in der Mathematik, aber auch in der Natur (Biologie, Physik (Quasikristalle)) und in der Kunst, immer wieder auf. Man kann ganze Bücher dazu schreiben (etwa die von Albrecht Beutelspacher oder Axel Hausmann), Interessierten seien einfach die umfangreichen Wikipedia-Artikel und das Skript unter [www.uni-hildesheim.de/stegmann/goldschn.pdf](http://www.uni-hildesheim.de/stegmann/goldschn.pdf) dazu empfohlen. Man kann im Übrigen definieren, wann eine irrationale Zahl *irrationaler* als eine andere ist. Die Kettenbruchentwicklung des goldenen Schnittes zeigt dann, dass  $\alpha$  die *irrationalste* Zahl ist. Das mag zuerst als eine pure Spielerei erscheinen, hat aber zum Beispiel Anwendungen in der Physik: Stehen in einem nichtlinearen dynamischen System (was auch immer

das ist...) die beiden Frequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinander, so können sich die Schwingungen des Systems periodisch überlagern. In diesem Fall ist das System sehr instabil und kann chaotisches Verhalten zeigen. Je irrationaler das Frequenzverhältnis, desto stabiler ist das System.

**8** Ohne Lösung.