

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 12, Abgabe bis zum 16.01.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 43 Berechne die folgenden beiden Integrale:

$$\int_0^{\pi} x^3 \cos(x) dx; \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 44 Man untersuche mit l' Hospital folgende Grenzwerte:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} \\ (b) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\frac{x}{2})}{1 - \cos(x)}; \\ (c) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(5x)}{\arctan(7x)}. \end{aligned}$$

(1+1+1 = 3 Punkte)

Aufgabe 45 Wir zeigen: π ist irrational.

Man definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^{\pi} x^n \cdot (\pi - x)^n \cdot \sin(x) dx.$$

(a) Berechne A_0 und A_1 und zeige, dass für $n \geq 1$ gilt:

$$A_{n+1} = -\pi^2 \cdot A_{n-1} + (4n + 2) \cdot A_n.$$

(b) Zeige, dass es für jedes reelle $b > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $0 < b^n \cdot A_n < 1$ für alle $n \geq N_0$.

(c) Zeige: Wäre π eine rationale Zahl mit Nenner $b \in \mathbb{N}, b > 0$, so würde $b^n \cdot A_n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Folgere daraus, dass $\pi \notin \mathbb{Q}$ gilt.

(3+2+1 = 6 Punkte)

Aufgabe 46 Zeige: Für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

(3 Punkte)

Wir wünschen allen Studenten viel Erfolg bei der Klausur!