Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 12, Lösungshinweise

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 43 Die erste Aufgabe löst man durch mehrfache partielle Integration, um das x^3 wegzubekommen:

$$\int_0^\pi x^3 cos(x) dx = [sin(x) \cdot x^3]_0^\pi - \int_0^\pi 3x^2 \cdot sin(x) dx = \ldots = 12 - 3\pi^2.$$

Die zweite löst man durch die offensichtliche Substitution $t = 1 + x^2$. Denn dann erhält man

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = [\sqrt{t}]_1^2.$$

Aufgabe 44 Alle Ausdrücke sind vom Typ "$\frac{0}{0}$" und lassen sich durch Ableiten via l'Hospital bestimmen. Exemplarisch hier die (c): Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{arctan(5x)}{arctan(7x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{arctan'(5x)}{arctan'(7x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+(5x)^2} 5}{\frac{1}{1+(7x)^2} 7} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{1+25x^2}}{\frac{7}{1+49x^2}} \\
&= \frac{5}{7}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 45 (a) Es ist

$$A_0 = \int_0^\pi sin(x) dx = -cos(x)\Big|_0^\pi = -(cos(\pi)) - (-cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2.$$

Weiterhin erhält man mit partieller Integration für $n \geq 0$:

$$A_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_0^\pi x^{n+1} \cdot (\pi - x)^{n+1} \cdot (-cos)'(x) dx$$

$$= \quad \frac{1}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \cdot (\pi - x)^{n+1} \cdot (-cos)(x) \Big|_0^\pi$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_0^\pi (n+1) x^n \cdot (\pi - x)^{n+1} \cdot cos(x) dx$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_0^\pi x^{n+1} \cdot (-1) \cdot (n+1)(\pi - x)^n \cdot cos(x) dx$$

$$= \quad 0 + \frac{1}{n!} \cdot \int_0^\pi \left(-x^{n+1} \cdot (\pi - x)^n + x^n \cdot (\pi - x)^{n+1}\right) cos(x) dx$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \int_0^\pi B_n(x) \cdot sin'(x) dx = \frac{1}{n!} \cdot B_n(x) \cdot sin(x) \Big|_0^\pi - \frac{1}{n!} \cdot \int_0^\pi B_n'(x) \cdot sin(x).$$

Hierbei ist

$$B_n(x) = x^n \cdot (\pi - x)^{n+1} - x^{n+1} \cdot (\pi - x)^n.$$

Wegen $sin(0) = sin(\pi) = 0$ verschwindet der erste Summand (auch für $n = 0$).

Es folgt im Fall $n = 0$: $B_0(x) = \pi - x - x$ und deshalb $B_0'(x) = -2$, woraus sich $A_1 = -\int_0^\pi (-2) \cdot sin(x) dx = 2 \int_0^\pi sin(x) dx = 2 \cdot 2 = 4$ ergibt.

Für $n \geq 1$ ist:

$$B_n'(x) = n \cdot x^{n-1}(\pi - x)^{n+1} - 2(n+1) \cdot x^n (\pi - x)^n + n x^{n+1} (\pi - x)^{n-1}$$

$$= n \cdot x^{n-1} (\pi - x)^{n-1} \left((\pi - x)^2 + x^2\right) - 2(n+1) \cdot x^n (\pi - x)^n$$

$$= n \cdot x^{n-1} (\pi - x)^{n-1} \left(\pi^2 - 2x(\pi - x)\right) - 2(n+1) \cdot x^n (\pi - x)^n$$

$$= \pi^2 \cdot n \cdot x^{n-1} (\pi - x)^{n-1} - (2n + 2(n+1)) \cdot x^n (\pi - x)^n.$$

Daraus folgt dann ingesamt für $n \geq 1$:

$$A_{n+1} = -\frac{1}{n!} \cdot \int_0^\pi B_n'(x) \cdot sin(x)$$

$$= -\pi^2 \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\pi x^{n-1} (\pi - x)^{n-1} sin(x) dx + (4n+2) \cdot \frac{1}{n!} \cdot \int_0^\pi x^n (\pi - x)^n \cdot sin(x) dx$$

$$= -\pi^2 A_{n-1} + (4n+2) \cdot A_n.$$

$\square$

(b) Für $0 < x < \pi$ gilt: $0 < \pi - x < \pi$ und $0 < sin(x) \leq 1$, woraus folgt:

$$0 < x^n \cdot (\pi - x)^n \cdot sin(x) < \pi^{2n}.$$

Daraus ergibt sich sofort:

$$0 < A_n < \frac{1}{n!} \int_0^\pi \pi^{2n} dx = \frac{1}{n!} \pi^{2n+1}$$

Man beachte, dass der Integrand in A_n stetig und positiv ist. Deshalb ist das Integral echt positiv. Für alle $b > 0$ folgt:

$$0 < b^n \cdot A_n < \pi \cdot \frac{1}{n!} (b\pi^2)^n.$$

Da $\frac{x^n}{n!}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Nullfolge ist, gibt es $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\pi \cdot \frac{1}{n!}(b\pi^2)^n < 1$ für alle $n \geq N_0$. Daraus folgt dann die Behauptung:

$$0 < b^n \cdot A_n < 1 \qquad \text{für alle } n \geq N_0.$$

$\square$

(c) Wir machen die Annahme, dass $\pi \in \mathbb{Q}$ sei, etwa $\pi = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, $b \geq 1$. Wir zeigen durch vollständige Induktion nach n, dass dann $b^n \cdot A_n \in \mathbb{Z}$ gelten würde. Als Induktionsanfang nehmen wir dabei $n = 0$ und $n = 1$: Es ist $b^0 \cdot A_0 = 2 \in \mathbb{Z}$ und $b^1 \cdot A_1 = 4b \in \mathbb{Z}$.

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir jetzt an, dass $b^{n-1} A_{n-1}$ und $b^n A_n$ ganze Zahlen sind. Dann gilt aber wegen der in (a) bewiesenen Formel:

$$b^{n+1} \cdot A_{n+1} = b^{n+1} \cdot \left(-\pi^2 A_{n-1} + (4n+2) \cdot A_n\right)$$

$$= -(b\pi)^2 \cdot b^{n-1} A_{n-1} + (4n+2) b \cdot b^n A_n = -a^2 \cdot b^{n-1} A_{n-1} + (4n+2) b \cdot b^n A_n \in \mathbb{Z}.$$

Damit ist der Induktionsbeweis fertig.

Da für $n \geq N_0$ nach (b) aber $0 < b^n \cdot A_n < 1$ gilt und somit $b^n \cdot A_n$ für diese n keine ganze Zahl sein kann, erhalten wir einen Widerspruch. Deshalb ist π keine rationale Zahl. $\square$

Aufgabe 46 Man entwickele $exp(x)$ in eine Taylorreihe um den Punkt $x = 0$. Dann erhält man

$$\exp(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} \cdot x^{\nu} + R_n(x,0) \qquad \text{mit} \qquad R_n(x,0) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp(t) dt.$$

Setzt man nun für $exp(x)$ die Exponentialreihe ein und kürzt gleiche Terme auf beiden Seiten, so erhält man die Behauptung.