

## Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 11, Abgabe bis zum 09.01.2009 um 11:00 Uhr

**Aufgabe 41** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D$  Intervall) eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung. Man nehme an, dass  $f'$  mit Ausnahme höchstens endlich vieler Stellen positiv ist. Zeige, dass  $f$  dann streng monoton wachsend ist.

(3 Punkte)

**Aufgabe 42** (a) Zeige anhand des Differenzenquotienten, dass  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  überall differenzierbar sind und berechne ihre Ableitungen. Folgere daraus, dass  $\tan(x)$  differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

Tipp: Finde schöne Formeln für  $\sin(x) - \sin(y)$  und  $\cos(x) - \cos(y)$ .

(b) Sei  $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x) := \frac{2x}{\sin(x)}$  definiert. Zeige, dass  $f$  umkehrbar ist, bestimme den Definitionsbereich von  $f^{-1}$  und berechne  $(f^{-1})'(\pi)$ .

Hinweis: Aufgabe 41 darf benutzt werden.

(2+3 = 5 Punkte)

**Freiwillige Weihnachtsaufgabe\*** Für welche  $x > 0$  konvergiert die Folge  $x_n$ , welche induktiv durch  $x_1 = x$ ,  $x_{n+1} = x^{x_n}$ , definiert ist?

(Für diese Aufgabe gibt es keine Punkte. Dafür aber Ruhm, Anerkennung und<sup>1</sup> eine Tafel Schokolade)

**Wir wünschen schöne Ferien und ein gutes neues Jahr!**

---

<sup>1</sup>für die etwas materialistischeren Naturen