Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 10, Lösungshinweise

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 38b Nein, die Bedingungen sind nicht ausreichend. Ein Standard-gegenbeispiel ist $sin(\frac{1}{x})$, der sogenannte topologische Sinus.

Aufgabe 39 Zur Divergenz von $\int_0^\infty |\frac{sin(x)}{x}|dx$. Betrachte

$$\begin{aligned}\int_\pi^{n\pi} |\frac{sin(x)}{x}|dx &= \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\frac{sin(x)}{x}|dx \\ &\geq \sum_{2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |sin(x)|dx \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{2}^{n} \frac{1}{k},\end{aligned}$$

da auf $[(k-1)\pi, k\pi]$ $|sin(x)| = (-1)^{k-1} sin(x)$ und daher

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |sin(x)|dx &= (-1)^{k-1} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} sin(x)dx \\ &= (-1)^{k-1}(-cos(k\pi) + cos(k-1)\pi) \\ &= (-1)^{k-1}(-(-1)^k + (-1)^{k-1}) \\ &= 2\end{aligned}$$

ist. Da $\sum_2^n \frac{1}{k}$ für $n \to \infty$ divergiert, kann also $\int_\pi^\infty |\frac{sin(x)}{x}|dx$ und damit auch $\int_0^\infty |\frac{sin(x)}{x}|dx$ nicht existieren.

Die Konvergenz von $\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x}dx$ geht im Prinzip genauso, nur dass wir hier durch das fehlende Betragszeichen eine alternierende Summe bekommen und dadurch die alternierende harmonische Reihe als (konvergente) Majorante. Betrachte

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{n\pi} \frac{sin(x)}{x} dx &= \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{sin(x)}{x} dx \\ &\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} sin(x) dx.\end{aligned}$$

Wir müssen also das letzte Integral berechnen. Es ist (siehe oben) 2 für k ungerade und -2 für k gerade. Die entsprechende Reihe ist

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)\pi} 2 \cdot (-1)^{k-1}.$$

Der Limes existiert, und damit ist nach obiger Abschätzung auch das dadurch majorisierte Integral endlich.

Aufgabe 40) (a) Da der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt =: A < \infty$ existiert, gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $C > 0$, so dass

$$|\int_0^x f(t)dt - A| < \epsilon \quad (*)$$

für alle $x > C$. Insbesondere müssen die Flächeninhalte der Teile, auf denen f positiv respektive negativ ist, mit $x \to \infty$ auch gegen Null gehen. Wäre dies nicht der Fall, dann seien x_n die Stellen, an denen f einen Vorzeichenwechsel hat. Es gibt dann ein (globales) $\tilde{\delta}$ und für alle $C > 0$ einen Index k, so dass $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt > \tilde{\delta}$ ist. Für ϵ genügend klein liefert das einen Widerspruch zur Konvergenz $(*)$.

Bemerkung: Aus diesem Grund ist etwa das Integral $\int_a^\infty sin(x)dx$ nicht konvergent. Zwar heben sich die auffeinanderfolgenden Flächenstücke ober- und unterhalb der x-Achse jeweils auf, aber der Wert des Integrals pendelt immer zwischen 0 und $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} sin(x)dx$ hin und her.

Angenommen, f gehe nicht gegen Null. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine Folge reeller Zahlen y_n, so dass $y_n \to \infty$ und $|f(y_n)| \geq \delta$ für n groß genug. OBdA $f(y_n) \geq \delta$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit kann man $\epsilon > 0$ so wählen, dass

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{2} \text{ für } |x - y| < \epsilon.$$

Dann gilt

$$\int_{y_n-\epsilon}^{y_n+\epsilon} f(x)dx \geq 2\epsilon\frac{\delta}{2}.$$

Die Flächeninhalte gehen also nicht gegen Null. Widerspruch.

Bemerkung: Falls f nur stetig ist, gilt die Behauptung nicht mehr: Man könnte zum Beispiel eine (stetige) Funktion nehmen, die mit $x \to \infty$ immer schneller oszilliert: Wenn die Längen der Intervalle, auf denen f positiv oder negativ ist, gegen Null gehen, geht der Flächeninhalt auch gegen Null, selbst wenn f nicht gegen Null geht. Solch eine Funktion müßte dann aber immer schneller oszillieren und ist dann nicht mehr gleichmäßig stetig. Ein anderer Typ von Gegenbeispiel ist die stetige Funktion, die überall 0 ist und um die natürlichen Zahlen Dreieckspitzen mit Höhe 1 und Breite $1/n^2$ hat.

(b) Wenn $\int_0^\infty f(x)dx$ konvergiert, so geht $\int_y^{2y} f(x)dx$ mit wachsendem y gegen 0. Wenn $f \geq 0$ und monoton fallend ist, ist $\int_y^{2y} f(x)dx \geq yf(2y)$. Dies geht also gegen 0, äquivalent, $yf(y)$ geht gegen 0.