

# Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2010/11

Universität Heidelberg  
Mathematisches Institut  
Prof. A. Schmidt  
Dr. A. Holschbach

Blatt 12  
Abgabetermin: Mittwoch, 26.01.2010, 16.15 Uhr

---

**Aufgabe 1.** Sei  $K = \mathbb{Q}(\zeta_8)$  der achte Kreisteilungskörper. Zeigen Sie:

- Es gilt  $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , und  $K$  enthält  $\mathbb{Q}(i)$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  und  $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$  als quadratische Unterkörper.
- Für eine ungerade Primzahl  $p$  ist die Zerlegungsgruppe  $Z_p$  zyklisch; ihr Erzeuger ist der von  $\zeta_8 \mapsto \zeta_8^p$  induzierte Körperautomorphismus von  $K$ . Bestimmen Sie zu jedem solchen  $p$  den Zerfällungskörper  $K^{Z_p}$  (in Abhängigkeit von  $p \pmod{8}$ ).

**Aufgabe 2.** Beweisen Sie den zweiten Ergänzungssatz zum quadratischen Reziprozitätsgesetz auf eine der beiden folgenden Weisen:

- analog zum Beweis von Korollar 6.9 anhand des Zerlegungsverhaltens von 2 in  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ ,
- oder mit Hilfe von Aufgabe 1 (b) über das Zerlegungsverhalten von  $p$  in  $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ :

$$\left(\frac{2}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow p \text{ zerfällt in } \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \pmod{8}.$$

**Aufgabe 3.** Sei  $n$  eine natürliche und  $D$  eine quadratfreie ganze Zahl. Zeigen Sie:

- Für  $D \equiv 1 \pmod{4}$  gilt  $\mathbb{Q}(\sqrt{D}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_n)$  genau dann, wenn  $D \mid n$ .

*Hinweis:* Für die eine Richtung kann man über Verzweigung argumentieren. Für die andere Richtung zeige man, dass  $D = \prod_{p|D} p^*$ , und verwende  $\mathbb{Q}(\sqrt{p^*}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_p)$ .

- Für allgemeines (quadratfreies)  $D$  gilt  $\mathbb{Q}(\sqrt{D}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_n)$  genau dann, wenn  $d_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})} \mid n$ .

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass jedes solche  $D$  sich eindeutig schreiben lässt als  $D = aD'$  mit  $a \in \{\pm 1, \pm 2\}$ ,  $D' \equiv 1 \pmod{4}$ . Folgern Sie dann mit (a), dass  $\sqrt{D}$  genau dann in  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$  liegt, wenn  $\sqrt{a}$  und  $\sqrt{D'}$  beide in  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$  liegen. Nun gilt für  $a \in \{-1, 2, -2\}$ , dass  $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}(\zeta_n) \Leftrightarrow 4a \mid n$ , wie sich mit Hilfe von Aufgabe 1 (a) leicht nachprüfen lässt. Zusammengenommen ergibt sich die Behauptung.

**Aufgabe 4.** Es sei  $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$  der  $n$ -te Kreisteilungskörper ( $n \geq 3, n \not\equiv 2 \pmod{4}$ ), und sei  $K^+ = \mathbb{Q}(\zeta_n)^+ = \mathbb{Q}(\eta_n)$  mit  $\eta_n = \zeta_n + \zeta_n^{-1}$ . Zeigen Sie:  $\mathcal{O}_{K^+} = \mathbb{Z}[\eta_n]$ .

*Hinweis:* Sei  $\alpha = a_0 + a_1\eta_n + \dots + a_r\eta_n^r \in \mathcal{O}_{K^+}$  mit  $a_i \in \mathbb{Q}$  für alle  $i$ ,  $a_r \neq 0$ ,  $r < \varphi(n)/2$ . Man zeige  $\zeta_n^r \alpha = a_r + b_1\zeta_n + \dots + b_{2r-1}\zeta_n^{2r-1} + a_r\zeta_n^{2r} \in \mathcal{O}_K$  mit gewissen  $b_1, \dots, b_{2r-1} \in \mathbb{Q}$ . Man folgere  $a_r \in \mathbb{Z}$  und wiederhole das Prozedere mit  $\alpha - a_r\eta_n^r \in \mathcal{O}_{K^+}$ .

**Zusatzaufgabe:** Seien  $K$  und  $K^+$  wie in der Aufgabe 4. Wir wollen zeigen, dass die von der Körpereinbettung  $K^+ \subset K$  induzierte Abbildung  $i : Cl(K^+) \rightarrow Cl(K)$  injektiv ist.<sup>1</sup> Sei dazu  $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{K^+}$  ein Ideal mit  $\mathfrak{a}\mathcal{O}_K = (\alpha)$  für ein  $\alpha \in \mathcal{O}_K$ . Es ist zu zeigen, dass  $\mathfrak{a}$  bereits ein Hauptideal ist. Zeigen Sie dazu folgendes:

- (a) Neben  $\alpha$  ist auch  $F\alpha$  ein Erzeuger des Hauptideals  $\mathfrak{a}\mathcal{O}_K$ . Folgern Sie analog zum ersten Teil des Beweises von Satz 9.12, dass  $\frac{F\alpha}{\alpha}$  in der Gruppe  $W = \mu_K$  der Einheitswurzeln in  $K$  liegt. Angenommen, es gibt eine Einheit  $\varepsilon \in E_K$  mit  $\frac{\varepsilon}{F\varepsilon} = \frac{F\alpha}{\alpha}$ . Dann liegt  $\alpha' := \alpha\varepsilon$  in  $\mathcal{O}_{K^+}$ , und es gilt  $\mathfrak{a} = (\alpha')$ .
- (b) Wir müssen also nur noch zeigen, dass  $\frac{F\alpha}{\alpha}$  im Bild des im Beweis von Satz 9.12 verwendeten Homomorphismus  $\phi : E_K \rightarrow W, \varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon}{F\varepsilon}$ , liegt. Angenommen,  $\frac{F\alpha}{\alpha} \notin \text{im } \phi$ . Nach loc. cit. ist dann insbesondere  $n = p^r$  eine Primpotenz, und nach Ersetzen von  $\alpha$  durch  $\zeta_n^s \alpha$  für geeignetes  $s$  können wir oBdA davon ausgehen, dass  $\frac{F\alpha}{\alpha} = -\zeta_n$  (warum?). Für  $\beta = (1 - \zeta_n)\alpha$  gilt dann  $\beta \in \mathcal{O}_{K^+} \cap \mathfrak{a}\mathcal{O}_K = \mathfrak{a}$ . Setzt man  $\mathfrak{c} = \beta\mathfrak{a}^{-1}$ , so gilt  $\mathfrak{c}\mathcal{O}_K = (1 - \zeta_n)$ . Per Normbetrachtung leite man daraus einen Widerspruch her.

---

<sup>1</sup>In Korollar 5.31 wurde bereits gezeigt, dass der Kern von  $i$  in  $Cl(K^+)(2)$  enthalten sein muss; wir verwenden dieses Ergebnis im Folgenden aber nicht.