Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2010/11

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. A. Holschbach

Blatt 11
Abgabetermin: Mittwoch, 19.01.2010, 16.15 Uhr

Aufgabe 1. Es sei A ein Dedekindring mit Quotientenkörper K und B der ganze Abschluss von A in einer endlichen separablen Erweiterung $L|K$. Sei $\theta \in L$ ein ganzes primitives Element von $L|K$ mit Minimalpolynom $p_\theta \in A[X]$. Man zeige: Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A und p_θ irreduzibel modulo $\mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{p}$ träge in der Erweiterung $L|K$. (Man beachte, dass keine Annahme an das Verhältnis von $\mathfrak{p}$ zum Führer von $A[\theta]$ in B gemacht wird.)

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für jede Primzahl p das Zerlegungsverhalten im biquadratischen Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{5})$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das Zerlegungsverhalten von p in den Unterkörpern $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ und folgern Sie daraus das Zerlegungsverhalten in K. Das Verhalten hängt nur von der Restklasse von p modulo 15 ab.

Aufgabe 3. Es sei $N|K$ eine Galoiserweiterung von Zahlkörpern, L_1, L_2 zwei Zwischenkörper mit $L_1 \cap L_2 = K$; $L_1|K$ sei galoissch. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathcal{O}_K$ und $\mathfrak{P}_1$ bzw. $\mathfrak{P}_2$ Primideale in $\mathcal{O}_{L_1}$ bzw. $\mathcal{O}_{L_2}$, die über $\mathfrak{p}$ liegen. Zeigen Sie: Dann gibt es (mindestens) ein Primideal $\mathfrak{Q}$ in $\mathcal{O}_N$ mit $\mathfrak{Q} \cap \mathcal{O}_{L_i} = \mathfrak{P}_i$ für $i = 1, 2$.

Hinweis: Man setze $G = G(N|K), H_i = G(N|L_i)$, $i = 1, 2$, und zeige zunächst $H_1 H_2 = G$. Nun wähle man Primideale $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ in $\mathcal{O}_N$ mit $\mathfrak{Q}_i \cap \mathcal{O}_{L_i} = \mathfrak{P}_i$, $i = 1, 2$. Zeigen Sie: Es gibt $\sigma_1 \in H_1, \sigma_2 \in H_2$ mit $\sigma_1 \mathfrak{Q}_1 = \sigma_2 \mathfrak{Q}_2 =: \mathfrak{Q}$, und $\mathfrak{Q}$ erfüllt die Behauptung.

Aufgabe 4. Es sei $L|K$ eine Galoiserweiterung von Zahlkörpern mit Galoisgruppe G. Man zeige: Ist G nicht zyklisch, so sind nur endlich viele Primideale von K unzerlegt in L.

Hinweis: Man unterteile die Menge M der unzerlegten Primideale (d.h. der Primideale von K, über denen genau ein Primideal von L liegt) in die Menge der verzweigten und die Menge der unverzweigten Primideale aus M. Eine dieser Mengen ist leer, die andere endlich.

Zusatzaufgabe: Sei $L|K$ eine Erweiterung von Zahlkörpern und $N|K$ die normale Hülle von $L|K$. Zeigen Sie: Ein Primideal $\mathfrak{p}$ von K ist genau dann voll zerlegt in L, wenn es voll zerlegt in N ist.

Hinweis: Für die nicht-triviale Richtung nehme man ein Primideal $\mathfrak{P}$ von N, das über $\mathfrak{p}$ liegt, und setze $G = G(N|K)$, $H = G(N|L)$. Zeigen Sie, dass $Z_{\sigma\mathfrak{P}} \subset H \ \forall \ \sigma \in G$ und $\cap_{\sigma \in G} \ \sigma^{-1} H \sigma = 1$, und folgern Sie die Behauptung.