Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2010/11

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. A. Holschbach

Blatt 10
Abgabetermin: Mittwoch, 12.01.2011, 16.15 Uhr

Aufgabe 1. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$. Man zerlege das Hauptideal (3) in $\mathcal{O}_K$ für $d = -11, -5, -3, 3, 5$ in Primideale.

Aufgabe 2. Es sei A ein Dedekindring mit Quotientenkörper K und B der ganze Abschluss von A in einer endlichen, separablen Körpererweiterung L/K.

(a) Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ ganze Ideale in A. Zeigen Sie: $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}' \Leftrightarrow \mathfrak{a}B \mid \mathfrak{a}'B$.

(b) Zeigen Sie, dass für ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{a}$ in K gilt: $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}B) \cap K$. Charakterisieren Sie die ganzen Ideale $\mathfrak{b}$ von B mit $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b} \cap A)B$.

Aufgabe 3. Es sei K ein Zahlkörper und $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ ein ganzes Ideal, so dass $\mathfrak{a}^m = (a)$ ein Hauptideal ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}$ im Körper $K(\sqrt[m]{a})$ zum Hauptideal wird.

(b) Zeigen Sie unter Benutzung der Endlichkeit der Klassenzahl: Es gibt eine endliche Erweiterung $L|K$, so dass jedes gebrochene Ideal von K in L zu einem Hauptideal wird.

Aufgabe 4. Sei A ein Dedekindring, $K = Q(A)$, L eine endliche separable Erweiterung von K und B der ganze Abschluss von A in K. Es sei weiterhin $\theta \in B$ ein primitives Element für die Erweiterung $L|K$, und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A, das prim zum Führer $\mathcal{F}$ von $A[\theta]$ in B ist. Zeigen Sie:

(a) Die Anzahl der Primideale $\mathfrak{P}_i$ über $\mathfrak{p}$ in B mit Trägheitsgrad $f_i = 1$ ist durch die Anzahl der Elemente in $A/\mathfrak{p}$ beschränkt.
Hinweis: Benutzen Sie Satz 5.10 aus der Vorlesung.

(b) Sei nun $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\alpha)$, wobei α eine Nullstelle von $X^3 - X - 8$ ist. Zeigen Sie, dass $B = \mathcal{O}_L$ die Ganzheitsbasis $1, \alpha, \beta = \frac{\alpha^2+\alpha}{2}$ hat, und zeigen Sie die Primidealzerlegung

$$2B = (\alpha, 2)(\alpha - 1, \beta)(\alpha - 1, \beta - 1).$$

Gibt es ein $\theta \in B$ mit $B = \mathbb{Z}[\theta]$?

Zusatzaufgabe: Sei K ein Zahlkörper. An dieser Stelle soll folgender Satz gezeigt werden:

Eine Primzahl p verzweigt genau dann in $\mathcal{O}_K$, wenn p die Diskriminante d_K von K teilt.

Wir wählen dazu eine feste Primzahl p, betrachten die Primidealzerlegung

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}, \quad e_i \in \mathbb{N}$$

von $p\mathcal{O}_K$ und setzen

$$\bar{A} := \mathcal{O}_K / p\mathcal{O}_K \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_K / \mathfrak{p}_i^{e_i}.$$

Zeigen Sie nun:

$$\begin{aligned} p \text{ verweigt in } \mathcal{O}_K \quad & \Longleftrightarrow \quad \bar{A} \text{ enthält Nilpotente} \\ & \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad \text{Die Spurform } \bar{A} \to \mathbb{F}_p, (\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \mathrm{Sp}_{\bar{A}|\mathbb{F}_p}(\bar{a}\bar{b}) \text{ ist ausgeartet} \\ & \Longleftrightarrow \quad d_k \equiv 0 \bmod p. \end{aligned}$$

Hinweis zu $(*)$: Für die eine Richtung beachten Sie, dass mit $\bar{a}$ auch jedes Vielfache nilpotent ist, und benutzen Sie Ihr Wissen über das charakteristische Polynom einer nilpotenten Matrix aus der linearen Algebra. Für die andere Richtung folgern Sie aus der Nichtexistenz von Nilpotenten, dass $\bar{A}$ eine direkte Summe (separabler) Körpererweiterungen von $\mathbb{F}_p$ ist, und benutzen Sie Korollar 5.12.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!