Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2010/11

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. A. Holschbach

Blatt 9
Abgabetermin: Mittwoch, 15.12.2010, 16.15 Uhr

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Grundeinheiten der reell-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit $d = 3, 5, 13, 14$.

Aufgabe 2. *Die Schlacht von Hastings (14.10.1066).*
Harolds Mannen standen nach alter Gewohnheit dichtgedrängt in 13 gleichgroßen Quadraten aufgestellt, und wehe dem Normannen, der es wagte, in eine solche Phalanx einbrechen zu wollen. ... Als aber Harold selbst auf dem Schlachtfeld erschien, formten die Sachsen ein einziges gewaltiges Quadrat mit ihrem König an der Spitze und stürmten mit Schlachtrufen „Ut!“, „Olicrosse!“, „Godemite!“ vorwärts. ... (vgl. *„Carmen de Hastingae Proelio“* von Guy, Bischof von Amiens)

Wie groß soll die Armee Harolds II. gewesen sein? (Man mache sich Gedanken über die Glaubwürdigkeit der Quelle.)

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass unter den Summen $1 + 2 + \cdots + n, n \in \mathbb{N}$, unendlich viele Quadratzahlen vorkommen.
Hinweis: Verwenden Sie die Einheiten des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Aufgabe 4. Sei α die reelle Lösung der Gleichung $\alpha^3 + 2\alpha - 1 = 0$, und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(a) Bestimmen Sie den Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$, die Diskriminante d_K und die Idealklassengruppe Cl_K von K.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $d(1, \alpha, \alpha^2)$ quadratfrei ist, und schließen Sie daraus auf $\mathcal{O}_K$. Für die Idealklassengruppe benutzen Sie neben der Minkowski-Schranke die Gleichung $2\alpha = (1 - \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2)$.

(b) Bestimmen Sie die Einheitengruppe E_K.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass α^{-1} eine Einheit ist mit $2 < \alpha^{-1} < 3$. Verwenden Sie dann die Ungleichung (1) (und die Notation) aus der Zusatzaufgabe, um zu zeigen, dass $1 < \alpha^{-1} < u^2$. Was folgt daraus für die Grundeinheit u?

Zusatzaufgabe: Sei K ein kubischer Zahlkörper mit Diskriminante $d_K < 0$. Zeigen Sie:

(a) K besitzt genau eine reelle Einbettung. Im Folgenden fassen wir K mittels dieser Einbettung als Unterkörper von $\mathbb{R}$ auf. Die Einheitengruppe E_K ist von der Form $\{\pm u^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ mit einer eindeutig bestimmten Grundeinheit $u > 1$. Sind $\rho e^{\pm i\varphi}$ die beiden anderen Konjugierten von u, so gilt $u\rho^2 = 1$ und

$$d(1, u, u^2) = -4\sin^2\varphi \cdot (\rho^3 + \rho^{-3} - 2\cos\varphi)^2.$$

(b) Es gilt

$$|d(1, u, u^2)| < 4(u^3 + u^{-3} + 6).$$

Folgern Sie daraus, dass

$$u^3 > \frac{|d_K|}{4} - 7. \tag{1}$$

Bestimmen Sie als Anwendung die Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Hinweis: Um die erste Ungleichung zu zeigen, setze man $c = \cos\varphi$, $x = \rho^3 + \rho^{-3}$ und verwende die (Un)Gleichung

$$(1 - c^2)(x - 2c)^2 = x^2 + 4 - 4c^2 - \big(cx + 2(1 - c^2)\big)^2 < x^2 + 4.$$