Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2010/11

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. A. Holschbach

Blatt 8
Abgabetermin: Mittwoch, 08.12.2010, 16.15 Uhr

Aufgabe 1. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper (mit d quadratfrei). Zeigen Sie: Das Ideal $(2) \subset \mathcal{O}_K$ ist

- das Quadrat eines Primideals $\mathfrak{p}$, falls $d \not\equiv 1 \bmod 4$;
- das Produkt zweier verschiedener Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$, falls $d \equiv 1 \bmod 8$;
- prim, falls $d \equiv 5 \bmod 8$.

Geben Sie in den jeweiligen Fällen Erzeuger für $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ an.

Aufgabe 2. Es sei K ein Zahlkörper und $[K : \mathbb{Q}] = n$. Zeigen Sie:

(a) In jedem Primideal $(0) \neq \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ liegt genau eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$, und es gilt $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Die Norm $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ ist von der Form p^r mit $r \leq n$.

(b) Angenommen, K ist ein quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante $d_K < 0$. Sei $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ ein Ideal, für das $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ eine Primzahl kleiner $-d_K/4$ ist. Dann ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, aber kein Hauptideal.

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie: Jeder quadratische Zahlkörper K mit $-9 < d_K < 16$ hat Klassenzahl 1. Welche Körper sind das?

(b) Bestimmen Sie die Idealklassengruppen von $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Die Idealklassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-14})$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Zusatzaufgabe: Sei $K_d = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ($d < 0$ quadratfrei) ein imaginär-quadratischer Zahlkörper. Zeigen Sie:

(a) Angenommen, K_d hat die Klassenzahl 1. Dann ist jede Primzahl p mit $-4p > d$ prim in $\mathcal{O}_K$. Folgern Sie: Für $d < -8$ gilt $d \equiv -3 \bmod 8$, für $d < -12$ gilt $d \equiv -19 \bmod 24$, und für $d < -20$ gilt $d \equiv -43, -67 \bmod 120$.

(b) Gilt umgekehrt $d \equiv -3 \bmod 8$ und $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$ für alle ungeraden Primzahlen p mit $p < \frac{2}{\pi}\sqrt{|d|}$, so hat K_d Klassenzahl 1. Bestätigen Sie mit diesen Aussagen die Liste aller ganzen Zahlen $-400 < d < 0$, für die K_d Klassenzahl 1 hat:

$$-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163.$$

Bemerkung: Diese Liste von imaginär-quadratischen Zahlkörpern mit Klassenzahl 1 war bereits Gauß bekannt. Gauß vermutete, dass diese Liste vollständig ist, d.h. dass keine weitere negative ganze Zahl d existiert, für die $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ Klassenzahl 1 hat. Diese unter dem Namen *Gauß'sches Klassenzahlproblem* bekanntgewordene Vermutung wurde erst 1952 von Heegner und 1966/67 unabhängig voneinander von Baker und Stark bewiesen. Der Beweis von Heegner wurde zunächst nicht akzeptiert, da Heegner Hobbymathematiker und sein Beweis schwer verständlich und mit kleineren Fehlern behaftet war; erst nach den erneuten Beweisen stellte man fest, das Heegners Arbeit im Wesentlichen korrekt war.