# Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2010/11

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. A. Holschbach

Blatt 7

Abgabetermin: Mittwoch, 01.12.2010, 16.15 Uhr

---

**Aufgabe 1.**

(a) Seien $\Gamma, \Gamma'$ mit $\Gamma' \subset \Gamma$ vollständige Gitter im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $(\Gamma : \Gamma')$ ist endlich, und

$$\mathrm{vol}(\Gamma') = (\Gamma : \Gamma') \cdot \mathrm{vol}(\Gamma).$$

(b) Zeigen Sie, dass jedes gebrochene Ideal in $\mathbb{Q}(i)$ unter der Einbettung $\mathbb{Q}(i) \hookrightarrow \mathbb{C}$ ein vollständiges Gitter in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ definiert. Gilt dies auch, wenn man $\mathbb{Q}(i)$ durch $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ ersetzt?

**Aufgabe 2.** Seien

$$L_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

reelle Linearformen mit $\det(a_{ij}) \neq 0$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^+$ mit $\prod_{i=1}^n c_i > |\det(a_{ij})|$. Zeigen Sie, dass es ganze Zahlen $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$|L_i(m_1, \ldots, m_n)| < c_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

*Hinweis*: Man benutze den Minkowskischen Gitterpunktsatz.

**Aufgabe 3.** Sei $p \equiv 1 \bmod 4$ eine Primzahl und $u \in \mathbb{Z}$ mit $u^2 \equiv -1 \bmod p$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \equiv ux \bmod p\}$$

ein vollständiges Gitter im $\mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{vol}(\Gamma) = p$ ist.

(b) Sei $r := \sqrt{2p}$ und $K_r(0)$ die offene Kreisscheibe mit Radius $r$ um $0 \in \mathbb{R}^2$. Man zeige: $K_r(0) \cap \Gamma \neq \{0\}$. Folgern Sie damit, dass $p$ eine Summe von zwei Quadratzahlen ist.

**Aufgabe 4.** Sei $K|\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper, $r_2$ die Zahl der Paare komplexer Einbettungen. Zeigen Sie, dass $\mathrm{sgn}(d_K) = (-1)^{r_2}$.

*Hinweis:* Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$, und seien $\tau_1, \ldots, \tau_n : K \to \mathbb{C}$ die verschiedenen (reellen und komplexen) Einbettungen. Betrachten Sie dass Verhalten von $\det(\tau_i \alpha_j)$ unter $F$.

**Zusatzaufgabe:** In dieser Aufgabe wollen wir die Aussage von Lemma 4.15 durch Angabe einer verbesserten Schranke verschärfen.

(a) Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $n := r_1 + 2r_2 > 0$. Mit $V_{r_1,r_2}(t)$ bezeichne man das Volumen (im Standardmaß) der Menge

$$X_t = \Big\{ \big((x_i)_i, (y_j)_j\big) \in \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2} \;\Big|\; \sum_i |x_i| + 2\sum_j |y_j| \leq t \Big\}.$$

Benutzen Sie Induktion nach $r_1$ und $r_2$, um zu zeigen:

$$V_{r_1,r_2}(t) = 2^{r_1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2} \frac{t^n}{n!}.$$

(b) Folgern Sie aus (a): Sei $K|\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper mit $r_1$ reellen Einbettungen und $r_2$ Paaren komplexer Einbettungen, $r_1 + 2r_2 =: n = [K : \mathbb{Q}]$. Dann hat die konvexe und zentralsymmetrische Menge

$$X'_t = \Big\{ (z_\tau)_\tau \in K_\mathbb{R} \;\Big|\; \sum_\tau |z_\tau| \leq t \Big\}$$

bezüglich des kanonischen Maßes das Volumen $2^{r_1}\pi^{r_2}t^n/n!$. Leiten Sie daraus ab: In jedem Ideal $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ gibt es ein $0 \neq a \in \mathfrak{a}$ mit

$$|N_{K|\mathbb{Q}}(a)| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \frac{n!}{n^n} \sqrt{|d_K|}\; \mathfrak{N}(\mathfrak{a}).$$

*Hinweis:* Benutzen Sie für die letzte Aussage die Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel:

$$\frac{1}{n} \sum_\tau |z_\tau| \geq \Big( \prod_\tau |z_\tau| \Big)^{1/n}.$$