Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2010/11

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. A. Holschbach

Blatt 6
Abgabetermin: Mittwoch, 24.11.2010, 16.15 Uhr

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Primidealzerlegung von (455) in $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}] = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-6})}$. Welche der auftretenden Primideale sind Hauptideale?

Aufgabe 2.

(a) Sei A ein Dedekindring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ Ideale. Zeigen Sie:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

Hinweis: In der Vorlesung wurde in natürlicher Weise der $\mathrm{ggT}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ definiert. Man finde eine sinnvolle Definition des $\mathrm{kgV}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ und zeige: $\mathrm{kgV}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cdot \mathrm{ggT}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ sowie $\mathrm{kgV}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

(b) Zeigen Sie: Die Gleichung in (a) ist für Ideale in $\mathbb{Z}[T]$ i.A. nicht erfüllt.

Aufgabe 3.

(a) Sei A ein Dedekindring und $(0) \neq \mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass jedes Ideal in $A/\mathfrak{a}$ ein Hauptideal ist.

Hinweis: Man betrachte zunächst Potenzen eines Primideals und folgere dann daraus den allgemeinen Fall mit Hilfe des Chinesischen Restklassensatzes.

(b) Zeigen Sie: Jedes Ideal eines Dedekindrings lässt sich durch zwei Elemente erzeugen.

Aufgabe 4. Sei A ein Dedekindring, $K = Q(A)$ der Quotientenkörper und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ zwei Ideale. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $\gamma \in K^\times$, so dass $\mathfrak{c} = \gamma\mathfrak{b}$ ein ganzes Ideal und teilerfremd zu $\mathfrak{a}$ ist.

(b) Die beiden A-Moduln $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ und $A \oplus \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ sind zueinander isomorph.

Hinweis: Man nehme zunächst an, dass $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ teilerfremd sind und betrachte die Abbildung

$$\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \to A \oplus \mathfrak{a}\mathfrak{b}, \quad (a, b) \mapsto (a + b, ab' - a'b)$$

mit geeigneten, fest gewählten $a' \in \mathfrak{a}, b' \in \mathfrak{b}$. Den allgemeinen Fall folgere man daraus mit Hilfe von (a).

Zusatzaufgabe: Sei A ein nullteilerfreier Ring mit folgenden beiden Eigenschaften:

- Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A, \mathfrak{a} \neq 0$, hat eine (bis auf Reihenfolge) eindeutige Primidealzerlegung.
- Für zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ gilt: $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{b} \mid \mathfrak{a}$, d.h. es gibt ein Ideal $\mathfrak{c} \subset A$ mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

Dann ist A ein Dedekindring.

Hinweis: Weisen Sie einzeln die drei definierenden Eigenschaften von Dedekindringen nach. Für die Ganzabgeschlossenheit betrachte man ein Element $x \in Q(A)$ und schreibe es in der Form $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in A$. Man zeige: Gilt $x \notin A$, so gibt es ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ und eine natürliche Zahl n mit $b \in \mathfrak{p}^n, a \notin \mathfrak{p}^n$. Nimmt man an, dass x ganz über A ist, so kann man daraus einen Widerspruch ableiten.

Bemerkung: Man kann sogar zeigen, dass jeder nullteilerfreie Ring, in dem jedes Ideal eine (nicht notwendigerweise eindeutige) Primidealzerlegung hat, ein Dedekindring ist.