Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2010/11

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. A. Holschbach

Blatt 5
Abgabetermin: Mittwoch, 17.11.2010, 16.15 Uhr

Aufgabe 1. Sind die algebraischen Zahlen $\frac{3+2\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}$ und $\frac{1+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{10}^2}{3}$ ganz über $\mathbb{Z}$?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2\}$ eine Ganzheitsbasis von $K := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ist, und bestimmen Sie die Diskriminante d_K von K.

Aufgabe 3. Sei K ein Zahlkörper, und sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine in $\mathcal{O}_K$ gelegene Basis von K über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: $d(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und d_K unterscheiden sich multiplikativ um ein Quadrat; ist $d(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ quadratfrei, so bilden $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$.

Aufgabe 4. Sei K ein quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante d_K und $p \neq 2$ eine Primzahl. Zeigen Sie: $(p) := p\mathcal{O}_K$ ist genau dann ein Primideal in $\mathcal{O}_K$, wenn $\left(\frac{d_K}{p}\right) = -1$ gilt.

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Diskriminante d_K eines Zahlkörpers K stets kongruent 0 oder 1 modulo 4 ist.
Hinweis: Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$ über $\mathbb{Z}$. Man schreibe mit der Leibnizformel

$$\det\bigl(\sigma_i(\alpha_j)_{i,j=1,\ldots,n}\bigr) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n} \sigma_i \alpha_{\tau(i)} = P - N$$

$$\text{mit} \quad P = \sum_{\tau \in A_n} \prod_{i=1}^{n} \sigma_i \alpha_{\tau(i)} \quad \text{und} \quad N = \sum_{\tau \in S_n \setminus A_n} \prod_{i=1}^{n} \sigma_i \alpha_{\tau(i)}$$

und zeige, dass $P+N$ sowie PN in $\mathbb{Q}$ liegen und ganze Zahlen sind. Mit $d_K = (P-N)^2 = (P+N)^2 - 4PN$ erhält man dann die Aussage.