Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2010/11

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. A. Holschbach

Blatt 4
Abgabetermin: Mittwoch, 10.11.2010, 16.15 Uhr

Aufgabe 1.

(a) Sei $d < -1$ quadratfrei. Zeigen Sie: Die Einheiten von $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ sind ± 1.

(b) Sei $d < -2$ quadratfrei. Zeigen Sie: $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist irreduzibel, aber nicht prim. Insbesondere ist $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ nicht faktoriell.

Aufgabe 2. Welche der Primzahlen < 15 sind Primelemente im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$? Wie lautet das allgemeine Zerlegungsgesetz für Primzahlen in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$?

Aufgabe 3.

(a) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ von verschiedener Parität (d.h. $a \not\equiv b \bmod 2$). Zeigen Sie: a und b sind genau dann teilerfremd in $\mathbb{Z}$, wenn $a + bi$ und $a - bi$ teilerfremd in $\mathbb{Z}[i]$ sind.

(b) Zeigen Sie: Ist (a, b, c) ein primitives pythagoräisches Tripel, d.h. eine Lösung der pythagoräischen Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ mit paarweise teilerfremden $a, b, c \in \mathbb{Z}$, so existieren (nach eventuellem Vertauschen von a und b) teilerfremde ganze Zahlen r und s von verschiedener Parität mit

$$a = r^2 - s^2, \quad b = 2rs \quad \text{und} \quad c = r^2 + s^2.$$

Umgekehrt ist für jedes solche Paar r, s das Tripel (a, b, c) ein primitives pythagoräisches Tripel.

Aufgabe 4. Sei $f = Y^2 - X^3 - X^2 \in \mathbb{C}[X, Y]$, $A = \mathbb{C}[X, Y]/(f)$. Zeigen Sie:

(a) A ist nullteilerfrei, aber nicht ganzabgeschlossen.

(b) Sei $K = Q(A)$ der Quotientenkörper von A, und sei x das Bild von X in A, y das Bild von Y in A sowie $t = \frac{y}{x} \in K$. Dann gilt:

$$A_K = \mathbb{C}[t] \subset K.$$

Zusatzaufgabe: Man zeige: $x = 3$, $y = \pm 5$ ist die einzige ganzzahlige Lösung der diophantischen Gleichung

$$x^3 = y^2 + 2.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Primfaktorzerlegung von $x^3 = (y + \sqrt{-2})(y - \sqrt{-2})$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.