Seminar anabelsche Geometrie

– Wintersemester 2010/11 –

Donnerstag 14-16 Uhr, INF 288, HS 5

Alexander Schmidt

Ziel des Seminars ist es, die Arbeit [ST2] zu verstehen. In dieser wird versucht Fortschritte in Richtung der folgenden anabelschen Hom-Vermutung zu machen: Seien K, L endlich erzeugte Körper vom Transzendenzgrad ≥ 1 über $\mathbb{F}_p$. Es bezeichne $\overline{K}$, K^s bzw. K^i den algebraischen Abschluss, separablen Abschluss bzw. die vollkommene Hülle ($= K^{p^{-\infty}}$) von K. Desweiteren sei mit $G_K = \mathrm{Aut}_K(K^s) = \mathrm{Aut}_K(\overline{K}) = \mathrm{Aut}_{K^i}(\overline{K})$ die absolute Galoisgruppe von K bezeichnet.

Absolute Birationale Anabelsche Hom-Vermutung in positiver Charakteristik: *Jeder offene Homomorphismus $\sigma : G_K \to G_L$ ist durch eine Körpereinbettung $\bar{\gamma} : \bar{L} \to \overline{K}$ induziert und $\bar{\gamma}$ ist eindeutig bis auf Frobeniustwists. Insbesondere induziert $\bar{\gamma}$ eine Körpereinbettung $L^i \to K^i$.*

In der Arbeit wird der Fall des Transzendenzgrades 1 behandelt (globale Körper positiver Charakteristik) und die obige Korrespondenz für gewisse Klassen von σ's gezeigt, so für „starre“ Homomorphismen, sowie für „eigentliche und trägheitsstarre“ Homomorphismen.

Vortrag 1: Isomorphismen zwischen Galoisgruppen globaler Körper: die lokale Korrespondenz

Wie entdeckt man die Zerlegungsgruppen? Man präsentiere den Inhalt von [NSW], Kap.12, §1. Hierzu muss man noch an Krasners Lemma und einige Fakten über die Kohomologie lokaler und globaler Körper erinnern.

Vortrag 2: Isomorphismen zwischen Galoisgruppen globaler Körper: der Zahlkörperfall

Hier folge man [NSW], Kap.12,§2 (bis zum Beginn des ‘closing remark’). Hierzu muss man noch aus [NSW], Kap.9, (9.2.9), den Fakt bringen, dass ein Einbettungsproblem mit induziertem Kern über globalen Körpern stets eine eigentliche Lösung besitzt. Dies ist eine Anwendung des Satzes von Grunwald-Wang, welcher wiederum per Dualität aus dem Hasseprinzip geholt wird.

Vortrag 3: Isomorphismen zwischen Galoisgruppen globaler Körper: Funktionenkörper

Hier soll Uchidas Satz erklärt werden, siehe [Uch].

Vortrag 4: Grundlegende Eigenschaften von Homomorphismen zwischen Galoisgruppen

[ST2], §2: Hier kommen viele Argumente die wir schon in Vortrag 1 gesehen haben noch einmal wieder, jetzt aber in größerer Allgemeinheit.

Vortrag 5: Starre Homomorphismen zwischen Galoisgruppen globaler Funktionenkörper

[ST2] §3. Die Korrespondenz für starre Homomorphismen.

Vortrag 6: Absolute Anabelsche Kuspidalisierung eigentlicher hyperbolischer Kurven

Hier soll die gleichnamige Arbeit von S. Mochizuki vorgestellt werden, Ergebnisse und eine Idee der verwendeten Methoden. Man folge [ST1] §2. Eine Flasche Wein wird für ein gutes deutsches Wort für *Cuspidalization* ausgelobt.

Vortrag 7: Eigentliche Homomorphismen zwischen Galoisgruppen globaler Funktionenkörper

[ST2] §4. Die Korrespondenz für eigentliche, trägheitsstarre Homomorphismen.

je nach dem ob und wieviel Zeit wir dann noch haben kann man überlegen in welche Richtung man weiter geht.

Literatur

[Mo] Sh. Mochizuki: Absolute Anabelian Cuspidalizations of Proper Hyperbolic Curves. pdf-Datei auf Mochizukis Homepage

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields, 2nd ed.*, Grundlehren der math. Wiss. Bd. 323, Springer-Verlag 2008

[ST1] M. Saïdi, A. Tamagawa: A Prime-to-p Version of Grothendiecks Anabelian Conjecture for Hyperbolic Curves over Finite Fields of Characteristic $p > 0$. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 45 (2009), 135–186 pdf-Datei auf Saïdis Homepage

[ST2] Saïdi, M. and Tamagawa, A.: On the Hom-form of Grothendieck's birational anabelian conjecture in characteristic $p > 0$. Preprint 2009 pdf-Datei auf Saïdis Homepage

[Uch] K. Uchida: Isomorphisms of Galois Groups of Algebraic Function Fields, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 106, No. 3 (Nov., 1977), pp. 589–598