

Seminar über Quadratische Formen

Seminar im Wintersemester 2014/15

Dr. A. Holschbach, K. Hübner

Inhalt

Eine quadratische Form auf einem k -Vektorraum V ist eine Abbildung

$$q : V \rightarrow K,$$

welche sich nach Wahl einer Basis als homogen-quadratisches Polynom beschreiben lässt. Ist die Charakteristik von k ungleich 2, so korrespondieren quadratische Formen auf V mittels der Polarisationsformel

$$(v, w) \mapsto \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$$

gerade zu den symmetrischen Bilinearformen auf V . Da sich quadratische Formen in einer dieser Gestalten so in nahezu allen Teilgebieten der Mathematik zeigen, ist ihr Studium von fundamentalem Interesse.

Im Rahmen des Seminars wollen wir quadratische Formen über einem beliebigen algebraischen Zahlkörper k verstehen. Ziel ist es, diese zu klassifizieren sowie ein Lokal-Global-Prinzip für nichttriviale Lösungen von Gleichungen der Form

$$q(v) = a$$

für $a \in k$ anzugeben. Dabei wollen wir uns an Scharlaus Buch *Quadratic and Hermitian Forms* orientieren.

Teilnehmerkreis und Vorkenntnisse

Das Seminar richtet sich vornehmlich an Studentinnen und Studenten in den Studiengängen *Bachelor Mathematik* (ab dem 4. Semester) und *Master Mathematik*. Vorkenntnisse im Umfang der Vorlesung *Algebra I* werden vorausgesetzt. Allen, die planen, sich in den Bereichen Algebra, Zahlentheorie bzw. algebraische Geometrie zu vertiefen, ist dieses Seminar sehr zu empfehlen.

Zeit und Ort

Dienstags, 14 – 16 Uhr, erster Termin 14.10.2014.

Der Raum wird noch bekanntgegeben.

Kontakt

Katharina Hübner,
INF 288, Raum 007
khuebner@mathi.uni-heidelberg.de,

Anmeldung und Vortragsvergabe

bei der Vorbesprechung am 21.07.2014, 13:00 Uhr c. t., INF 288, HS 3, danach per E-Mail an obige Adresse.

Anmerkungen

Es wird erwartet, dass die Vortragenden sich spätestens eine Woche vor ihrem Vortrag mit Frau Hübner in Verbindung setzen, um ihr Vortragskonzept mit ihr durchzusprechen. Selbstverständlich steht sie darüber hinaus auch für Rückfragen und zur Klärung von Verständnisschwierigkeiten bei der Vortragsausarbeitung zur Verfügung.

Nach der Vortragsvergabe bis zwei Wochen vor Semesteranfang kann von der Teilnahme durch eine formlose E-Mail an den Seminarleiter zurückgetreten werden. Wer nach diesem Termin feststellt, dass er mit seinem Vortrag nicht halten kann, muss damit rechnen, dass das Seminar als nicht bestanden gewertet wird. Bei durch ärztliches Attest bescheinigter Prüfungsunfähigkeit entscheidet der Seminarleiter, ob die Prüfungsleistung zu einem späteren Zeitpunkt nachgeholt werden soll oder durch eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrages ersetzt werden kann.

Vorträge

Vortrag 1: Endliche Körper

[Ser] Kapitel I: grundlegende Eigenschaften von endlichen Körpern sollen wiederholt werden. Weiter soll der Satz von Chevalley-Waring sowie das Gaußsche Reziprozitätsgesetz mitsamt Ergänzungssätzen bewiesen bzw. wiederholt werden.

Vortrag 2: Quadratische Formen I

Es soll eine Übersicht über [Sch] Kapitel 1.1 bis 1.3 gegeben werden. Lem. 1.3.4 soll dabei in der allgemeineren Form von Lem. 1.6.1 behandelt werden. Weiter soll noch [Sch] Lem. 2.9.2 bewiesen werden.

Vortrag 3: Quadratische Formen II

Eine Übersicht über [Sch] Kapitel 1.4, [Ser] Kapitel IV.1.5 (Satz von Witt), dann den Rest von [Sch] Kapitel 1.5 ab Kor. 1.5.8. Weiter soll noch [Sch] Lem. 2.5.1, Thm. 2.5.3 sowie der Transfer von quadratischen Formen mitsamt Lem. 2.5.5 und Satz 2.5.6 behandelt werden. Abschließend sollen noch kurz quadratische Formen über endlichen Körpern behandelt werden ([Ser] Kapitel IV.1.7).

Vortrag 4: Zentrale einfache Algebren und Brauer-Gruppen

Eine Übersicht über [Sch] Kapitel 8.1, 8.3 und Thm. 8.4.2.

Vortrag 5: Quaternionalgebren und quadratische Formen

[Sch] Kapitel 2.11. Kor. 2.11.10 soll noch durch die äquivalente Charakterisierung [Lam] Thm. 2.7 (8) ergänzt werden.

Vortrag 6: Hasse-Algebren und quadratische Formen von kleinem Rang

[Sch] Kapitel 2.13 bis Thm. 2.13.5. Einige formale Rechnungen dazu können aus Kapitel 2.12 entnommen werden. Auch der Begriff der Witt-Invariante soll im betrachteten Fall kurz eingeführt werden (Def. 2.12.7). Dann weiter mit Kapitel 2.14

bis Thm. 2.14.3 sowie abschließend Thm. 2.14.5.

Vortrag 7: Quaternionalgebren über lokalen Körpern und Klassenkörpertheorie

[Lam] Prop. 6.2.8 bis Theorem 6.2.10 sowie Lem. 6.2.17 bis Cor. 6.2.23 werden gezeigt. Weiter wird ein kurzer Überblick über Klassenkörpertheorie gegeben mitsamt der später als Black-Box benötigten Aussagen [Sch] 6.6.1 und 6.6.2.

Vortrag 8: Quadratische Formen über lokalen Körpern

[Sch] Kor. 6.2.6 (i) und (iv) (siehe Beweis von Thm. 6.2.4 für die benötigten Argumente) sowie Kapitel 6.4 bis Satz 6.4.4. Die Argumente für den Fall $p = 2$ müssen wie in [Lam] Kapitel 6.2 modifiziert werden.

Vortrag 9: Quadratische Formen über Zahlkörpern

[Sch] Kapitel 6.5 und 6.6 bis Kor. 6.6.7. Im Beweis von Satz 6.5.1 soll der Fall $K = \mathbb{Q}$ ebenfalls bewiesen werden (siehe Satz 5.7.1).

Literatur

[Lam] T. Y. Lam, *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*, W. A. Benjamin, Inc. 1973.

<http://katalog.ub.uni-heidelberg.de/cgi-bin/titel.cgi?katkey=65715201&sess=6a7849e53d423c7ea467e2569f2683e7&query=TheAlgebraicTheoryofQuadraticForms>

[Ser] J. P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Springer 2001.

<http://katalog.ub.uni-heidelberg.de/cgi-bin/titel.cgi?katkey=65744574&sess=ee9c0388a57a0db833f71511d2fba089&query=ACourseinArithmetic>

[Sch] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian Forms*, Springer 1985.

<http://katalog.ub.uni-heidelberg.de/cgi-bin/titel.cgi?katkey=3425416&sess=ee9c0388a57a0db833f71511d2fba089&query=QuadraticandHermitianForms>