Prof. Dr. O. Venjakob et al.

Hida Families and Big Galois Representations

Hauptseminar SS08

Ort: INF288 HS 3 **Zeit:** Dienstag 11 ct **Beginn:** 8.4.2008

Das Ziel dieses Hauptseminars besteht darin, so gennante Hida Familien von Modulformen kennenzulernen und ihre zentrale Rolle in der Theorie der Deformation von Galois-Darstellungen zu verstehen. Grob gesagt werden wir Hida Familien $\lambda := (f_k)_k$ von Spitzenformen f_k definieren, wobei k das Gewicht von f_k bezeichnet. Diesen Familien werden wir Große Darstellungen $\pi(\lambda)$ der absoluten Galois-Gruppe $G_{\mathbb{Q}}$ zuordnen so dass man durch Reduktion die Galois Darstellungen $\pi(f_k)$ bekommen kann. Dabei bezeichnet $\pi(f_k)$ die Galois Dartellung, die man f_k nach Deligne zuordnet.

Genauer gesagt gehen wir von einer Primzahl p aus. Für eine positive ganze Zahl N definiert man die universelle p-adische Hecke Algebra $h(N, \mathbb{Z}_p)$ als die Algebra von Endomorphismen des Raums der p-adischen Spitzenformen vom Niveau N, die topologisch von den p-adischen Hecke-Operatoren erzeugt ist. Man weiß, dass der gewöhnliche (*ordinary*) Teil $h^0(N, \mathbb{Z}_p)$ davon endlich und flach über die Iwasawa Algebra $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \cong \mathbb{Z}_p[[X]]$ der Gruppe $\Gamma = 1 + p\mathbb{Z}_p$ ist. Wir gehen von einem Λ-Algebrenhomomorphismus $\lambda : h^0(N; \mathbb{Z}_p) \to \Lambda$ aus und schreiben $A(n; X) \in \Lambda$ für das Bild des Hecke-Operators $T(n)$ unter λ. Genauer gesagt sollte man hier das Bild in einer Λ-Algebra, die endlich über Λ ist, betrachten. Für $k \in \mathbb{N}$ und einen Character $\epsilon : \Gamma \to \bar{\mathbb{Q}}_p^\times$ von endlicher Ordnung betrachten wir die formale q-Entwicklung ($q = e^{2\pi i z}, z \in \mathbb{H}$)

$$f_{k,\epsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} A(n; \epsilon(u)u^k - 1)q^n, \quad u := 1 + p \in \Gamma.$$

Dann ist $f_{k,\epsilon}$ eine Eigenform, die in $S_k(\Gamma_1(Np^r))$ liegt, wobei r von dem Charakter ϵ bestimmt ist. Nach Deligne kann man $f_{k,\epsilon}$ eine Galois-Darstellung $\pi(f_{k,\epsilon})$ zuordnen. Sei $P_{k,\epsilon}$ der Kern des Homomorphismus

$$\Lambda \to \mathbb{C}_p, \quad u \mapsto \epsilon(u)u^k$$

Das Hauptziel dieses Seminars ist, zu zeigen, dass es eine (Große) Galois Darstellung $\pi(\lambda) : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\Lambda)$ gibt, die eindeutig von λ bestimmt ist, so dass die Reduktion dieser Darstellung modulo $P_{k,\epsilon}$ für alle $k \geq 2$ und ϵ isomorph zu $\pi(f_{k,\epsilon})$ ist.

Vorträge:

1. Modulformen und Hecke Operatoren,
2. Atkin-Lehner Theorie,
3. Parabolische Kohomologie und der Eichler-Shimura Isomorphismus,
4. Eisenstein-Kohomologie und die Rand-Sequenz,
5. Die p-adische Hecke Algebra und die Dualität mit dem Raum der p-adischen Modulformen. Familien von Eisenstein-Reihen,
6. Die Projektion auf den gewöhnlichen Teil, Beschräktheit des Rangs des Raums der Modulformen und Freiheit des Raums der Familien,
7. Gewöhnliche Familien (Beweis des Hauptsatzes und Eigenschaften),
8. Der Satz von Deligne,
9. Gewöhnliche Familien und Galois-Darstellungen,
10. Beispiele von Familien.

References

[1] H.Hida, Elementary theory of L-functions and Eisenstein series, LMS 26, 1993

[2] H.Hida, Galois Representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, Inv. Math 85, 1986

[3] H.Hida, Modualr Forms and Galois Cohomology, CUP 2000