

Fakultät für Mathematik und Informatik  
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit

**Topologische und vollständige  
Schiefmonoidringe lokal proendlicher,  
eigentlicher Monoide**

Christian Rüschoff

Dezember 2010

Betreut durch Herrn Prof. Dr. Otmar Venjakob



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kategorielle Grundbegriffe</b>	<b>5</b>
2.1	Universelle Pfeile und Adjunktionen . . . . .	5
2.2	Topologische Funktoren . . . . .	6
2.3	Partiell geordnete Mengen und Verbände . . . . .	7
2.3.1	Galois-Verbindungen . . . . .	11
2.4	Unterobjekte und Quotienten in Kategorien . . . . .	13
2.4.1	Unterobjekte und Quotienten (Epi,Mono)-strukturierter Kategorien . . .	17
2.4.2	Unterobjekte und Quotienten in abelschen Kategorien . . . . .	21
<b>I</b>	<b>Algebraische Monoidring-Konstruktionen</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>Monoide</b>	<b>27</b>
3.1	Monoidale Kategorien . . . . .	27
3.2	Monoide . . . . .	29
3.3	$M$ -Objekte . . . . .	30
3.3.1	Limiten und Kolimiten von $M$ -Objekten . . . . .	32
3.3.2	Freie $M$ -Objekte . . . . .	33
3.3.3	(Epi,Mono)-strukturierte Kategorien von $M$ -Objekten . . . . .	36
3.4	Freie Monoide . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Monoidring-Konstruktionen</b>	<b>39</b>
4.1	Monoidringe . . . . .	39
4.1.1	Die universelle Eigenschaft . . . . .	39
4.2	Schiefmonoidringe . . . . .	41
4.2.1	Assoziierte Monoidhomomorphismen . . . . .	41
4.2.2	Beispiele . . . . .	43
4.2.3	Innerer und äußerer Koeffizientenring . . . . .	44
4.2.4	Die universelle Eigenschaft . . . . .	45
4.3	Zusammenhang mit dem semidirekten Produkt . . . . .	48
4.3.1	Semidirekte Produkte von Monoide . . . . .	48
4.3.2	(Schief-)Monoidringe eines semidirekten Produkts . . . . .	50
4.3.3	Das trivial operierende Teilmonoid . . . . .	51

<b>II</b>	<b>Topologische Monoidring-Konstruktionen</b>	<b>53</b>
<b>5</b>	<b>(Lokal) Proendliche Räume, Monoide und <math>M</math>-Mengen</b>	<b>55</b>
5.1	(Lokal) Proendliche Räume . . . . .	55
5.1.1	Proendliche Räume. . . . .	55
5.1.2	Lokal proendliche Räume und eigentliche Abbildungen . . . . .	58
5.1.3	Einpunktkompaktifizierung lokal proendlicher Räume. . . . .	60
5.1.4	Quotienten und Relationenverbände topologischer Räume . . . . .	61
5.1.5	(Ko-)Limiten (lokal) proendlicher Räume. . . . .	65
5.2	(Lokal) Proendliche und eigentliche Monoide . . . . .	70
5.2.1	(Lokal) Proendliche und eigentliche Monoide . . . . .	70
5.2.2	Die Einpunktkompaktifizierung lokal proendlicher Monoide. . . . .	72
5.2.3	Quotienten und Relationenverbände topologischer Monoide. . . . .	72
5.2.4	Charakterisierung proendlicher Monoide . . . . .	75
5.2.5	Wichtige Beispiele lokal proendlicher, eigentlicher Monoide . . . . .	78
5.3	Topologische $M$ -Mengen . . . . .	79
5.3.1	(Lokal) Proendliche und eigentliche $M$ -Mengen. . . . .	79
5.3.2	Zusammenhang zwischen den $M$ -Kategorien . . . . .	82
5.4	Endomorphismenmonoide lokal proendlicher, eigentlicher Monoide. . . . .	83
5.4.1	Topologisch endlich erzeugte Monoide . . . . .	84
5.5	Topologische $M$ -Monoide und das semidirekte Produkt topologischer Monoide. . . . .	85
5.5.1	$M$ -topologische $M$ -Monoide . . . . .	86
5.5.2	Die universelle Eigenschaft . . . . .	86
5.5.3	(Lokal) $M$ -eigentliche $M$ -Monoide . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Topologische Ringe und Moduln</b>	<b>89</b>
6.1	Vollständige topologische, abelsche Gruppen. . . . .	89
6.2	Topologische Ring- und Modul-Kategorien. . . . .	90
6.3	Hom-Funktoren für topologische Moduln . . . . .	93
6.3.1	Diskrete Hom-Funktoren . . . . .	93
6.3.2	Topologische Fortsetzung des Hom-Funktors . . . . .	94
6.3.3	Wechsel des operierenden Rings . . . . .	98
6.4	Topologische, freie Moduln erzeugt von einem lokal proendlichen Raum . . . . .	100
<b>7</b>	<b>Topologische Monoidring-Konstruktionen</b>	<b>107</b>
7.1	Topologische Monoidringe lokal proendlicher, eigentlicher Monoide. . . . .	107
7.1.1	Die universelle Eigenschaft . . . . .	110
7.2	Topologische Schiefmonoidringe . . . . .	111
7.2.1	Die universelle Eigenschaft . . . . .	113
7.2.2	Existenzkriterium für topologische Schiefmonoidringe. . . . .	114
7.3	Vollständige (Schief-)Monoidringe . . . . .	116
7.4	Beispiele . . . . .	117
7.4.1	Vollständige (Schief-)Gruppenringe und die Iwasawa-Algebra . . . . .	117
7.4.2	(Schief-)Potenzreihenringe . . . . .	118
7.5	Zusammenhang mit dem semidirekten Produkt . . . . .	119

<b>III</b>	<b>Noethersche Monoidring-Konstruktionen</b>	<b>125</b>
<b>8</b>	<b>Partiell geordnete Monoide und Filtrierungen</b>	<b>127</b>
8.1	Partiell geordnete Monoide und Filtrierungen . . . . .	127
8.1.1	Partiell geordnete Monoide mit globalem Supremum 1 . . . . .	129
8.2	Adjungierte Filtrierungen . . . . .	131
8.3	Erzeugersysteme von Filtrierungen . . . . .	132
8.3.1	Endlich erzeugte Filtrierungen durch natürliche Zahlen . . . . .	133
8.4	Filtrierungen invariant unter einer Derivation . . . . .	135
8.4.1	Endlich erzeugte Filtrierungen invariant unter einer Derivation . . . . .	138
8.5	Idealspektra von Monoiden . . . . .	139
<b>9</b>	<b>Noethersche Monoidring-Konstruktionen</b>	<b>145</b>
9.1	Noethersche Monoide . . . . .	145
9.2	Noethersche (Mengen-)Monoide . . . . .	147
9.2.1	Noethersche Monoide. . . . .	147
9.2.2	Konoethersche (Mengen-)Monoide . . . . .	148
9.3	Noethersche Schiefpotenzreihenringe. . . . .	149
9.3.1	Noethersche Schiefpotenzreihenringe . . . . .	150
9.3.2	Idealspektra pseudokompakter, noetherscher Ringe . . . . .	155
9.3.3	Noethersche Schiefpotenzreihenringe über pseudokompakten Ringen . . . . .	156
9.3.4	Beispiele noetherscher Schiefpotenzreihenringe . . . . .	158
9.4	Noethersche vollständige Monoidringe . . . . .	163
<b>10</b>	<b>Ausblick</b>	<b>165</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>167</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird die allgemeine Konstruktion der vollständigen Schiefmonoidringe erarbeitet und analysiert. Diese umfasst die Begriffe der vollständigen Gruppenringe, d.h. insbesondere der Iwasawa-Algebra, und des Schiefpotenzreihenrings aus (SV06). Beide Konstruktionen tragen eine kanonische Topologie, sind bezüglich dieser Topologie vollständig und enthalten den Schiefgruppenring bzw. den Schiefpolynomring als dichten Teilring. Aufgrund der bekannten Adjunktion zwischen der Kategorie der topologischen Ringe und der Kategorie der vollständigen, topologischen Ringe kann das Problem dadurch zunächst auf den Begriff des topologischen Schiefmonoidrings zurückgeführt werden, welcher wiederum eine topologisierte Variante des rein algebraischen Schiefmonoidrings darstellt.

Weiter beobachtet man, dass der topologisierte Gruppenring die zu Grunde liegende proendliche Gruppe als topologische Gruppe enthält. Fasst man den Schiefpolynomring als Ring erzeugt durch Koeffizientenring und freien Monoid in einem Erzeuger auf, dann enthält der topologisierte Schiefpolynomring auch dieses freie Monoid. Die durch diese Einbettung induzierte Topologie auf dem freien Monoid ist die diskrete Topologie. Die Vermutung liegt nahe, dass die Topologie des Schiefmonoidrings von der Topologie des zu Grunde liegenden Monoids (und selbstverständlich auch von der Topologie des Koeffizientenrings) abhängt. In der Tat lässt sich eine Teilkategorie topologischer Monoide finden, die sowohl die Kategorie der proendlichen Gruppen umfasst, als auch das diskrete freie Monoid enthält. Weiterhin lässt sich für diese lokal proendlichen, eigentlichen Monoide und beliebige topologische Ringe eine kanonische Topologie auf dem Schiefmonoidring definieren, der Art, dass die erhaltene Topologie für die beiden genannten Fälle mit der ursprünglichen übereinstimmt.

Die Vorgehensweise zur Konstruktion des vollständigen Schiefmonoidrings gliedert sich daher in folgende Abschnitte:

- 1) Es werden algebraische Schiefmonoidringe mit beliebigen Koeffizientenringen über beliebigen Monoiden konstruiert. Vom Allgemeinsgrad sind diese (für Monoide, die Gruppen sind) zwischen dem Konzept des Smash-Product  $R \# G$  und dem des Crossed Product  $R * G$  über einer Gruppe  $G$  mit Koeffizientenring  $R$  anzusiedeln. Während es für Crossed Products  $R * G$  nur eine Inklusion von  $G$  in  $R * G$  als Menge gibt, erhält man für Schiefmonoidringe, wie sie in dieser Arbeit definiert werden, noch eine Inklusion der Gruppe  $G$  als solche, d.h. Produkte von Bildelementen im Schiefmonoidring stimmen mit dem Bild von Produkten von Gruppenelementen überein. Genauer gesagt ist jedes Crossed Product über einer Gruppe  $G$ , das diese Bedingung erfüllt, ein Schiefmonoidring von  $G$ . Der Schiefmonoidring wird in Kapitel 4 definiert und durch einen gewissen Monoidhomomorphismus  $\theta$  klassifiziert. Weiterhin werden die Begriffe des inneren und äußeren Koeffizientenrings

eingeführt, die für die später folgenden Existenzkriterien topologischer Schiefmonoidringe von Bedeutung sind. Außerdem wird der Zusammenhang mit dem semidirekten Produkt von Monoiden erläutert.

- 2) Die Kategorie der lokal proendlichen Monoide wird eingeführt und analysiert. Diese stellt sich als Verallgemeinerung der Kategorie der proendlichen Monoide dar, die nach Ergebnissen der Automatentheorie eine analoge Charakterisierung besitzen wie proendliche Gruppen, d.h. es gibt einerseits die Darstellung als projektiver Limes diskreter endlicher Monoide und andererseits die Charakterisierung über rein topologische Eigenschaften. Durch Lockern der topologischen Axiome gelangt man zur Kategorie der lokal proendlichen Monoide. Damit sich die Topologie auf dem topologisierten Monoidring gut verhält, d.h. eine Ringtopologie bildet, muss man diese Kategorie jedoch wieder ein Stück weit einschränken. Dies läuft darauf hinaus, dass man neben der Stetigkeit auch die Eigentlichkeit aller betreffenden Abbildungen fordert, was zur Kategorie der lokal proendlichen, eigentlichen Monoide mit eigentlichen, stetigen Monoidhomomorphismen führt. Wesentliche Ergebnisse des Kapitels 5 sind, neben der Definition dieser Kategorie, die Konstruktion der Einpunktkompaktifizierung, die die Kategorie der lokal proendlichen, eigentlichen Monoide treu in die Kategorie der proendlichen Monoide einbettet. Weiterhin werden semidirekte Produkte lokal proendlicher, eigentlicher Monoide analysiert und eine Reihe von Beispielen dieser Monoide berechnet.
- 3) Die topologischen Schiefmonoidringe über lokal proendlichen, eigentlichen Monoiden werden als topologisierte, algebraische Schiefmonoidringe definiert. Während die topologisierte Variante des Monoidrings immer ein topologischer Ring ist, muss dies im Fall eines Schiefmonoidrings nicht mehr zutreffen. Wie in (SV06) gesehen, müssen weitere Bedingungen gestellt werden, damit dies erfüllt ist (Dies wurde in (SV06) durch die Forderung gelöst, dass die betreffende Derivation  $\sigma$ -nilpotent ist). Ein Hauptergebnis des Kapitels 7 ist daher das Aufstellen eines Existenzkriteriums für topologische Schiefmonoidringe (Satz 7.15). Weiterhin wird eine universelle Abbildungseigenschaft nachgewiesen und ein Zusammenhang dieser Konstruktion mit dem topologischen semidirekten Produkt zweier lokal proendlicher, eigentlicher Monoide hergestellt.
- 4) Im selben Kapitel wird schließlich auch der letzte Konstruktionsschritt vollzogen: Die Vervollständigung des topologischen Schiefmonoidrings. Außerdem werden Beispiele berechnet und gezeigt, dass vollständige Schiefmonoidringe in den Spezialfällen des vollständigen Gruppenrings bzw. des Schiefpotenzreihenrings auch tatsächlich mit den ursprünglichen Definitionen übereinstimmen. Analoge Eigenschaften wie für topologische Schiefmonoidringe übertragen sich durch die Komplettierungsadjunktion unmittelbar auf die vervollständigte Variante.

Der letzte Teil der Arbeit beschäftigt sich mit vollständigen Schiefmonoidringen, die noethersch sind. Dazu wird in Kapitel 8 zunächst ganz abstrakt die Theorie der Filtrierungen zwischen partiell geordneten Monoiden entwickelt. Mit Hilfe der Filtrierungstheorie wird in Kapitel 9 gezeigt, dass Schiefpotenzreihenringe mit noetherschen, pseudokompakten Koeffizientenringen unter gewissen Voraussetzungen wieder noethersch sind. Die so gewonnenen Resultate verallgemeinern die aus (SV06) bereits bekannten.

Es wird eine möglichst allgemeine Vorgehensweise angestrebt und so steht die erarbeitete Theorie stets vor dem Hintergrund der Theorie monoidaler Kategorien.



---

Mein Dank geht an dieser Stelle an Herrn Professor Dr. Venjakob für die gute Betreuung und die sehr offene Aufgabenstellung aus diesem interessanten Themenbereich. Ebenfalls danken möchte ich Peter Barth für das Lesen einer vorläufigen Fassung der Arbeit und die anschließende Diskussion darüber. Weiterhin bedanke ich mich bei Gerald Langhanke, Dominique Lörks und Konrad Fischer für das Aufspüren der vielen Tipp-, Zeichensetzungs- und Grammatikfehler. Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern, die mir das Mathematik-Studium ermöglicht haben.



# Kapitel 2

## Kategorielle Grundbegriffe

Hier werden ein paar wichtige kategorielle Konzepte aufgeführt, die sich an vielen verschiedenen Stellen der Arbeit als nützlich erweisen.

### 2.1 Universelle Pfeile und Adjunktionen

Der Begriff der Adjunktion bzw. der universellen Eigenschaft taucht in jedem Teil der Arbeit auf. Der Ausdruck „universelle Eigenschaft“ ist jedoch sehr schwammig und nicht genau definierbar. Abhilfe verschafft hier der formale Begriff des universellen Pfeils. (Mac72, IV.1 Satz 2) liefert den wichtigen Zusammenhang zwischen einer Adjunktion und einem universellen Pfeil und wird auch an verschiedenen Stellen verwendet um die Existenz einer Adjunktion zu beweisen. Daher ist es sinnvoll diesen Begriff einzuführen.

#### Definition 2.1

Es seien  $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$  ein Funktor und  $B \in \mathcal{B}$ . Ein  $u \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, F(A))$  mit  $A \in \mathcal{A}$  heißt **universeller Pfeil** von  $B$  nach  $F$ , falls gilt:

Für alle  $X \in \mathcal{A}$  und  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, F(X))$  existiert genau ein  $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ , so dass

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u} & F(A) & & A \\ & \searrow f & \downarrow F(f') & & \downarrow \exists! f' \\ & & F(X) & & X \end{array}$$

kommutiert (vgl. (Mac72, III.1 Definition)).

#### Definition 2.2

$\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  seien Kategorien. Eine **Adjunktion** von  $\mathcal{B}$  in  $\mathcal{A}$  ist ein Tripel  $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ , worin  $F$  und  $G$  Funktoren

$$\mathcal{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{A}$$

sind, während  $\varphi$  eine Abbildung ist, die jedem Paar von Objekten  $B \in \mathcal{B}$  und  $A \in \mathcal{A}$  eine in  $A$  und  $B$  natürliche Bijektion

$$\varphi = \varphi_{B,A} : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(B), A) \cong \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, G(A))$$

zuordnet.

Existiert eine solche Adjunktion, dann nennt man  $F$  auch den **Linksadjungierten** zu  $G$  bzw.

$G$  den **Rechtsadjungierten** von  $F$ .

Man nennt die dadurch induzierten natürlichen Transformationen (da  $\varphi$  natürlich ist)

$$\eta_B = \varphi(\text{id}_{F(B)}) : B \longrightarrow GF(B) \quad \text{für } B \in \mathcal{B}$$

die **Einheit** und

$$\varepsilon_A = \varphi^{-1}(\text{id}_{G(A)}) : FG(A) \longrightarrow A \quad \text{für } A \in \mathcal{A}$$

die **Koeinheit** der Adjunktion (vgl. (Mac72, IV.1)).

## 2.2 Topologische Funktoren

Ebenso ist das Konzept der topologischen Funktoren sehr nützlich, da es starke Aussagen über die Existenz und Bildung von Limiten in topologischen Kategorien liefert. Oft wird zunächst eine „algebraische Kategorie“ verwendet, deren Objekte anschließend topologisiert werden und somit topologisch über dieser Kategorie sind. Bemerkung 2.4 liefert ein gutes Beispiel für einen topologischen Funktor.

### Definition 2.3

Es sei  $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$  ein Funktor.

- (i) Eine Familie von Morphismen  $(A \xrightarrow{f_i} A_i)$  in  $\mathcal{A}$  ausgehend vom gleichen Objekt  $A \in \mathcal{A}$  heißt **Quelle** in  $\mathcal{A}$ .
- (ii) Eine Quelle  $(A \xrightarrow{f_i} A_i)$  in  $\mathcal{A}$  heißt  **$G$ -initial**, wenn es zu jeder Quelle  $(X \xrightarrow{g_i} A_i)$  und zu jedem  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(G(X), G(A))$  mit  $G(f_i) \circ h = G(g_i)$  für alle  $i$  genau ein  $\bar{h} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A)$  gibt, so dass  $f_i \circ \bar{h} = g_i$  für alle  $i$  und  $G(\bar{h}) = h$  ist (vgl. (AHS06, Definition 10.57)).

$$\begin{array}{ccc}
 G(X) & \xrightarrow{\forall h} & G(A) \\
 \searrow G(g_i) & & \downarrow G(f_i) \\
 & & G(A_i)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\exists! \bar{h}} & A \\
 \searrow g_i & & \downarrow f_i \\
 & & A_i
 \end{array}
 \qquad
 G(\bar{h}) = h$$

- (iii) Der Funktor  $G$  heißt **topologisch**, wenn es zu jeder Quelle  $(B \xrightarrow{f_i} G(A_i))$  in  $\mathcal{B}$  eine eindeutige  $G$ -initiale Quelle  $(A \xrightarrow{\bar{f}_i} A_i)$  gibt (vgl. (AHS06, Definition 21.1)), so dass  $G(A) = B$  und  $G(\bar{f}_i) = f_i$  ist für alle  $i$ .

### Bemerkung 2.4

Es sei  $\text{Top} \xrightarrow{U} \text{Set}$  der Vergissfunktors.

- (i) Eine Quelle  $(A \xrightarrow{f_i} A_i)$  in  $\text{Top}$  ist genau dann  $U$ -initial, wenn  $A$  die Initialtopologie bezüglich der  $f_i$  trägt.
- (ii)  $U$  ist topologisch.

### Proposition 2.5

Der Vergissfunktors  $\text{TRing} \xrightarrow{U} \text{Ring}$  ist topologisch.

*Beweis.* Es sei  $(R \xrightarrow{f_i} U(R_i))_I$  eine Quelle in  $\mathbf{Ring}$ . Versieht man  $R$  mit der Initialtopologie bezüglich der  $f_i$ , dann ist  $R$  ein topologischer Ring. Denn für alle  $i$  ist die Multiplikation  $\mu_{R_i}$  stetig und damit folgt unter Benutzung der Multiplikatitivität der  $f_i$ , dass auch  $f_i \circ \mu_R = \mu_{R_i} \circ (f_i, f_i)$  stetig ist, für alle  $i$ . Folglich ist nach Definition der Initialtopologie auch  $\mu_R$  stetig. Mit gleichen Argumenten zeigt man, dass auch die Addition und die additive Inversenbildung stetig sind. Bleibt zu zeigen, dass  $R$  mit dieser Topologie  $U$ -initial ist. Aber das ist gleichbedeutend mit der universellen Eigenschaft der Initialtopologie.  $\square$

### Bemerkung 2.6

*Auf die gleiche Art und Weise kann man zeigen, dass analoge topologische Konstruktionen wie topologische Moduln, Gruppen, Monoide, usw. einen topologischen Vergissfunktorkonstruktor in die jeweils unterliegende Kategorie besitzen.*

### Definition 2.7

*Eine Kategorie heißt (ko-)vollständig, wenn durch Mengen indizierte Diagramme (Ko-)Limiten besitzen.*

### Satz 2.8

*Es sei  $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$  ein topologischer Funktor. Dann gilt:*

- (i)  $\mathcal{A}$  ist genau dann (ko-)vollständig, wenn  $\mathcal{B}$  (ko-)vollständig ist.
- (ii)  $G$  vertauscht mit beliebigen (Ko-)Limiten.
- (iii) Für jedes Diagramm  $(A_i, f_{i,j})$  in  $\mathcal{A}$  und jeden Limes  $(L \xrightarrow{\pi_i} F(A_i))$  in  $\mathcal{B}$  gibt es genau einen Limes  $(L' \xrightarrow{\pi'_i} A_i)$  in  $\mathcal{A}$ , so dass  $F(L') = F(L)$  und  $F(\pi'_i) = F(\pi_i)$  für alle  $i$ .

*Beweis.*

- (i) (AHS06, Theorem 21.16) (1)
- (ii) (AHS06, Proposition 21.15)
- (iii) Dies gilt ebenfalls nach (AHS06, Proposition 21.15) und (AHS06, Definition 13.17).  $\square$

## 2.3 Partiiell geordnete Mengen und Verbände

Im Zusammenhang mit der Untersuchung von Ringen bzw. Monoiden auf die Noether-Eigenschaft in allgemeinen monoidalen Kategorien (siehe Kapitel 9) treten partiell geordnete Mengen auf. Für die dazu notwendige Filtrierungstheorie ist außerdem das Konzept der Verbände sehr nützlich. Daher sollen hier kurz die wichtigsten Aussagen dieser Theorien zusammengestellt werden. Da jede partiell geordnete Menge als Kategorie aufgefasst werden kann, liefert die Kategorientheorie Sätze, die auch für die Theorie partiell geordneter Mengen hilfreich sind.

**Definition 2.9** (i) *Es sei  $\mathcal{Pos}$  die Kategorie der halbgeordneten Mengen mit den ordnungserhaltenden Abbildungen als Morphismen.*

(ii) Für eine Halbordnung „ $\leq$ “ auf einer Menge  $P$  heiÙe „ $\geq$ “ **duale Halbordnung** auf  $P$ .  
Es bezeichne  $(P, \leq)^{\text{op}} = (P, \geq)$  die **duale halbgeordnete Menge** einer halbgeordneten Menge  $(P, \leq)$ . (vgl. (Bir48, I.3))

(iii) Für zwei halbgeordnete Mengen  $X, Y$  versee  $\text{Hom}_{\text{Pos}}(X, Y)$  mit der Halbordnung

$$f \leq g \quad :\iff \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

### Definition 2.10

Es sei  $P$  eine halbgeordnete Menge,  $M \subset P$  eine Teilmenge.

(i) Ein Element  $s \in P$  heiÙt **Supremum** von  $M$ , wenn

a)  $m \leq s$  für alle  $m \in M$  und

b)  $s \leq x$  für alle  $x \in P$  mit  $m \leq x$  für alle  $m \in M$ .

Falls existent, ist  $s$  wegen b) eindeutig. Schreibe dann  $\bigvee_{m \in M} m = \bigvee M = s$ .

(ii) Dual dazu heiÙt ein Element  $i \in P$  **Infimum** von  $M$ , wenn

a)  $i \leq m$  für alle  $m \in M$  und

b)  $x \leq i$  für alle  $x \in P$  mit  $x \leq m$  für alle  $m \in M$ .

Wieder ist  $i$  eindeutig, falls existent. Schreibe dann  $\bigwedge_{m \in M} m = \bigwedge M = i$ .

(iii) Für ein Element  $a \in P$  sei  $P_{\leq a}$  die Teilmenge aller  $x \in P$  mit  $x \leq a$ . Für eine Teilmenge  $S \subset P$  sei analog  $P_{\leq S}$  die Teilmenge aller  $x \in P$  mit  $x \leq s$  für alle  $s \in S$ .

Analog seien  $P_{< a}, P_{\geq a}$  und  $P_{> a}$  und entsprechendes für  $S$  definiert.

(iv) Eine halbgeordnete Menge  $P$  heiÙe **absteigend filtriert**, wenn für zwei Elemente  $x, y \in P$  ein  $i \in P$  existiert mit  $i \leq x$  und  $i \leq y$ . Dual dazu heiÙe  $P$  **aufsteigend filtriert**, wenn  $P^{\text{op}}$  absteigend filtriert ist.

(vgl. (Bir48, II.1 Definition))

### Definition 2.11

Anhand der von Supremum und Infimum induzierten Operationen auf einer partiell geordneten Menge können folgende Teilkategorien von  $\text{Pos}$  definiert werden:

(i) a) Es bezeichne  $\text{Pos}_{\vee} \subset \text{Pos}$  die Teilkategorie der halbgeordneten Mengen, die Suprema endlicher Teilmengen besitzen, und dessen Homomorphismen die ordnungserhaltenden Abbildungen sind, die mit Suprema dieser Teilmengen vertauschen.

b) Analog sei  $\text{Pos}_{\forall} \subset \text{Pos}$  die Teilkategorie der halbgeordneten Mengen, die beliebige Suprema besitzen, und deren Homomorphismen die ordnungserhaltenden Abbildungen sind, die mit allen Suprema vertauschen.

c) Ebenso seien über den Begriff des Infimums auch die Kategorien  $\text{Pos}_{\wedge}$  und  $\text{Pos}_{\bigwedge}$  und alle möglichen Teilkategorien mit Indexkombinationen wie z.B.  $\text{Pos}_{\vee, \wedge}$  definiert.

- (ii) a) Ein Objekt der Kategorie  $\mathcal{P}os_{\vee, \wedge}$  wird auch **(beschränkter)<sup>1</sup> Verband** genannt.  
 b) Bei Objekten aus  $\mathcal{P}os_{\vee}$  bzw.  $\mathcal{P}os_{\wedge}$  spricht man von **Halbverbänden**.  
 c) Die Objekte der Kategorien  $\mathcal{P}os_{\mathbb{W}, \wedge}$ ,  $\mathcal{P}os_{\vee, \mathbb{M}}$  bzw.  $\mathcal{P}os_{\mathbb{W}, \mathbb{M}}$  heißen auch **vollständige Verbände**.

Wie unten in Bemerkung 2.13 gezeigt, stimmen alle diese Objekte überein. Der kategoriale Unterschied besteht daher nur in den Morphismen.

(vgl. (Bir48, II.1 Definition))

- (iii) Ein Verband  $V \in \mathcal{P}os_{\vee, \wedge}$  heißt **distributiv**, wenn für alle  $v, w, x \in V$  die beiden Distributivgesetze gelten:
- $(v \vee w) \wedge x = (v \wedge x) \vee (w \wedge x)$  und
  - $(v \wedge w) \vee x = (v \vee x) \wedge (w \vee x)$

Es bezeichne  $\mathcal{P}os_{\vee, \wedge, D} \subset \mathcal{P}os_{\vee, \wedge}$  die volle Teilkategorie der distributiven Verbände.

(vgl. (Bir48, IX.1 Definition))

- (iv) Ein vollständiger Verband  $V \in \mathcal{P}os_{\mathbb{W}, \wedge}$  heißt **distributiv**, wenn auch das unendliche Distributivgesetz für beliebige Teilmengen  $S \subset V$  und  $v \in V$  gilt:

$$v \wedge \left( \bigvee N \right) = \bigvee_{w \in N} (v \wedge w)$$

Dementsprechend bezeichne  $\mathcal{P}os_{\mathbb{W}, \wedge, D} \subset \mathcal{P}os_{\mathbb{W}, \wedge}$  die volle Teilkategorie der distributiven vollständigen Verbände. Analog seien auch  $\mathcal{P}os_{\vee, \mathbb{M}, D}$  und  $\mathcal{P}os_{\mathbb{W}, \mathbb{M}, D}$  definiert.

- (v) Eine Teilmenge  $T \subset V$  eines Verbands  $V$  zusammen mit den Einschränkungen der Supremum-/Infimum-Operationen heißt **(vollständiger) Teilverband** von  $V$ , wenn  $T$  ein (vollständiger) Verband ist, d.h. die Inklusion ist ein Homomorphismus in der jeweiligen Kategorie.

**Proposition 2.12** (i) Für eine Familie halbgeordneter Mengen  $(P_i, \leq)_{i \in I}$  bildet das kartesische Produkt  $\prod_{i \in I} P_i$  versehen mit der Halbordnung

$$(x_i) \leq (y_i) \quad :\iff \quad x_i \leq y_i \quad \text{für alle } i \in I$$

zusammen mit den kanonischen Projektionen  $\prod_{i \in I} P_i \xrightarrow{\pi_i} P_i$  ein Produkt in  $\mathcal{P}os$ .

Weiterhin gelten folgende Eigenschaften:

- a) Falls  $P_i \in \mathcal{P}os_{\vee}$  für alle  $i \in I$ , dann gilt für alle  $(x_i), (y_i) \in \prod_{i \in I} P_i$ :

$$(x_i) \vee (y_i) = (x_i \vee y_i)$$

Insbesondere ist  $\prod_{i \in I} P_i \in \mathcal{P}os_{\vee}$ .

<sup>1</sup>Manche Autoren fordern für Verbände nur die Existenz des Supremums/Infimums zweier Elemente, was äquivalent dazu ist, dass Suprema/Infima endlicher nicht-leerer Teilmengen existieren. Das Infimum/Supremum der leeren Menge ist nach Definition das globale Supremum/Infimum. Verbände, die auch das Supremum/Infimum der leeren Menge besitzen, werden daher auch beschränkte Verbände genannt.

b) Falls  $P_i \in \mathcal{P}os_{\mathbb{W}}$  für alle  $i \in I$ , dann gilt für alle  $S \subset \prod_{i \in I} P_i$

$$\bigvee S = \left( \bigvee_{i \in I} \pi_i(S) \right) :$$

Insbesondere ist  $\prod_{i \in I} P_i \in \mathcal{P}os_{\mathbb{W}}$ .

c) Dual dazu erhält man analoge Aussagen (endliche) für Infima.

(ii) Für alle  $P \in \mathcal{P}os$  erhält man eine Adjunktion

$$\phi : \text{Hom}_{\mathcal{P}os}(X \times P, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{P}os}(X, \text{Hom}_{\mathcal{P}os}(P, Y)), \quad f \mapsto [x \mapsto f(x, -)].$$

Insbesondere ist  $\mathcal{P}os$  kartesisch abgeschlossen.

*Beweis.*

(i) Die universelle Eigenschaft wird unmittelbar von  $\mathcal{S}et$  geerbt. Nach Konstruktion sind die Projektionen und die vom Produkt in  $\mathcal{S}et$  induzierte Produktabbildung ordnungserhaltend. Die Eigenschaften (a) - (c) folgen direkt aus der Definition der Produkthalbordnung.

(ii) Dies folgt ebenfalls aus der analogen bekannten Adjunktion (vgl. (Mac72, IV.6))

$$\psi : \text{Hom}_{\mathcal{S}et}(X \times P, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{S}et}(X, \text{Hom}_{\mathcal{S}et}(P, Y)), \quad f \mapsto [x \mapsto f(x, -)],$$

denn  $f$  ist genau dann ordnungserhaltend, wenn  $\psi(f)(x)$  ordnungserhaltend ist für alle  $x \in X$  und  $\psi(f)$  ordnungserhaltend ist:

„ $\Rightarrow$ “: Ist  $f$  ordnungserhaltend, dann gilt für alle  $x \in X$  und alle  $p, p' \in P$

$$p \leq p' \quad \Rightarrow \quad (x, p) \leq (x, p') \quad \Rightarrow \quad f(x, p) \leq f(x, p')$$

nach Definition der Produkt-Halbordnung, so dass  $f(x, -)$  für alle  $x \in X$  ordnungserhaltend ist. Für alle  $x, x' \in X$  und  $p \in P$  gilt außerdem

$$x \leq x' \quad \Rightarrow \quad (x, p) \leq (x', p) \quad \text{für alle } p \in P \quad \Rightarrow \quad f(x, p) \leq f(x', p) \quad \text{für alle } p \in P,$$

so dass per Definition auch  $f(x, -) \leq f(x', -)$  und damit auch  $\phi(f)$  ordnungserhaltend ist.

„ $\Leftarrow$ “: Umgekehrt gilt für alle  $x, x' \in X$  und  $p, p' \in P$  die Implikation

$$(x, p) \leq (x', p') \quad \Rightarrow \quad x \leq x' \text{ und } p \leq p' \quad \Rightarrow \quad f(x, p) \leq f(x, p') \leq f(x', p'),$$

da  $\psi(f)(x) = f(x, -)$  und  $\psi(f)$  ordnungserhaltend sind. □

### Bemerkung 2.13

Es sei  $X$  eine Infimum-vollständige partiell geordnete Menge.

Für alle  $S \subset X$  ist dann  $\bigvee S = \bigwedge X_{\geq S}$  ein Supremum von  $S$ .

Insbesondere ist  $X$  ein vollständiger Verband.

*Beweis.* Es sei  $s \in S$ . Dann ist  $s \leq x$  für alle  $x \in X_{\geq S}$  per Definition. Folglich ist  $s \leq \bigwedge X_{\geq S}$ , so dass  $\bigwedge X_{\geq S}$  eine obere Schranke von  $S$  ist. Für jede weitere Schranke  $t \in X$  ist  $t \in X_{\geq S}$  per Definition von  $X_{\geq S}$  und damit  $\bigwedge X_{\geq S} \leq t$ . Insgesamt ist also  $\bigwedge X_{\geq S}$  ein Supremum von  $S$ . □



**Bemerkung 2.14**

Es seien  $X, Y$  zwei partiiell geordnete Mengen und  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}os}(X, Y)$ .

- (i) Falls  $X, Y \in \mathcal{P}os_{\vee}$ , dann gilt  $\bigvee f(S) \leq f(\bigvee S)$  für alle  $S \subset X$ .
- (ii) Falls  $X, Y \in \mathcal{P}os_{\wedge}$ , dann gilt  $f(\bigwedge S) \leq \bigwedge f(S)$  für alle  $S \subset X$ .

*Beweis.*

- (i) Wegen  $s \leq \bigvee S$  für alle  $s \in S$  und da  $f$  ordnungserhaltend ist, gilt auch  $f(s) \leq f(\bigvee S)$  für alle  $s \in S$  und damit  $\bigvee f(S) \leq f(\bigvee S)$ .
- (ii) Dies folgt aus (i) mit  $X^{\text{op}}$  und  $Y^{\text{op}}$ .

□

**Bemerkung 2.15**

Jede partiiell geordnete Menge  $(P, \leq)$  kann als Kategorie aufgefasst werden, wobei Elemente von  $P$  die Objekte und „ $\leq$ “ die Morphismen sind. Mit dieser Interpretation gelten folgende Eigenschaften:

- (i) Es gibt maximal einen Homomorphismus zwischen zwei Objekten.
- (ii) Isomorphe Objekte sind gleich (dies folgt aus der Antisymmetrie).
- (iii) Ein Infimum einer Teilmenge von  $P$  ist per Definition ein Produkt in  $P$  aufgefasst als Kategorie.

Analog entsprechen Suprema Koprodukten.

- (iv) Da jedes Diagramm in  $P$  kommutiert, bildet das Infimum aller Diagrammobjekte gleichzeitig einen Limes des Diagramms.

Insbesondere ist jeder Limes ein Produkt und analog jeder Kolimes ein Koprodukt.

- (v) Ordnungserhaltende Abbildungen zwischen partiiell geordneten Mengen sind Funktoren.

Vertauschen diese mit Infima/Suprema, so vertauschen die induzierten Funktoren wegen (iv) mit Limiten/Kolimiten.

**2.3.1 Galois-Verbindungen**

Galois-Verbindungen sind Adjunktionen ordnungserhaltender Abbildungen zwischen partiiell geordneten Mengen aufgefasst als Kategorien. In der Filtrierungstheorie aus Kapitel 9 spielen Adjungierte von Homomorphismen partiiell geordneter Monoide in der Darstellung von endlich erzeugten Filtrierungen eine wichtige Rolle.

**Definition 2.16**

Es seien  $X, Y \in \mathcal{P}os$  und  $X$  vollständig. Für  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}os}(X, Y)$  definiere

- (i)  $f^* : Y \longrightarrow X, \quad y \longmapsto \bigvee f^{-1}(Y_{\leq y})$
- (ii)  $f_* : Y \longrightarrow X, \quad y \longmapsto \bigwedge f^{-1}(Y_{\geq y})$

**Bemerkung 2.17**

Es seien  $X, Y \in \mathcal{P}os$  und  $X$  vollständig. Für  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}os}(X, Y)$  gilt:

- (i)  $f^*$  ist ordnungserhaltend.
- (ii) Für alle  $x \in X$  gilt  $x \leq f^* \circ f(x)$ .
- (iii) Folgende Abbildung ist ordnungsumkehrend:

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{P}os}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}os}(Y, X), \quad f \longmapsto f^*$$

Duale Aussagen erhält man für  $f_*$ .

*Beweis.*

- (i) Zunächst ist  $Y_{\leq y} \subset Y_{\leq y'}$  für alle  $y, y' \in N$  mit  $y \leq y'$ . Dies impliziert  $f^*(y) = \bigvee f^{-1}(Y_{\leq y}) \leq \bigvee f^{-1}(Y_{\leq y'}) = f^*(y')$ , so dass  $f^*$  ordnungserhaltend ist.
- (ii) Für alle  $x \in X$  ist  $f(x) \in Y_{\leq f(x)}$  und folglich  $x \in f^{-1}(Y_{\leq f(x)})$  bzw.

$$x \leq \bigvee f^{-1}(Y_{\leq f(x)}) = f^* \circ f(x).$$

- (iii) Es seien  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{P}os}(X, Y)$  mit  $g \leq f$ . Für alle  $y \in Y$  und  $x \in X$  impliziert  $f(x) \leq y$  schon  $g(x) \leq f(x) \leq y$  und damit  $f^{-1}(Y_{\leq y}) \subset g^{-1}(Y_{\leq y})$ . Folglich ist

$$f^*(y) = \bigvee f^{-1}(Y_{\leq y}) \leq \bigvee g^{-1}(Y_{\leq y}) = g^*(y)$$

für alle  $y \in Y$  und damit  $F$  ordnungsumkehrend.

□

**Definition 2.18**

Es seien  $X, Y$  zwei partiell geordnete Mengen,  $X \xrightleftharpoons[g]{f} Y$  zwei ordnungserhaltende Abbildungen.  $f$  und  $g$  bilden eine **Galoisverbindung**, wenn für alle  $x \in X$  und alle  $y \in Y$  folgende Äquivalenz gilt:

$$f(x) \leq y \iff x \leq g(y)$$

Interpretiert man  $X$  und  $Y$  wie in Bemerkung 2.15 als Kategorien und  $f$  und  $g$  dementsprechend als Funktoren, dann bedeutet dies nichts anderes, als dass  $f$  linksadjungiert zu  $g$  ist, weshalb  $f$  auch als **Linksadjungierter** und  $g$  als **Rechtsadjungierter** bezeichnet wird.

**Bemerkung 2.19**

Es seien  $X, Y$  zwei partiell geordnete Mengen und  $X \xrightleftharpoons[g]{f} Y$  zwei ordnungserhaltende Abbildungen, die eine Galois-Verbindung bilden, wobei  $f$  der Links- und  $g$  der Rechtsadjungierte ist. Es gilt:

- (i)  $f$  vertauscht mit Suprema und  $g$  mit Infima.
- (ii)  $f \circ g \circ f = f$  und  $g \circ f \circ g = g$ .

*Beweis.*

- (i) Nach (AHS06, Proposition 18.19) oder (Mac72, V.5 Satz 1) vertauschen Rechtsadjungierte mit Limiten, welche nach Bemerkung 2.15 den Infima entsprechen. Dual dazu vertauschen Linksadjungierte mit Suprema.
- (ii) Für alle  $x \in X$  ist  $f(x) \leq f(x)$  und folglich  $x \leq g \circ f(x)$  nach der Äquivalenzeigenschaft einer Galoisverbindung. Da  $f$  ordnungserhaltend ist, folgt  $f(x) \leq f \circ g \circ f(x)$ . Umgekehrt impliziert  $g \circ f(x) \leq g \circ f(x)$  nach der Galoiseigenschaft  $f \circ g \circ f(x) \leq f(x)$  und damit insgesamt  $f \circ g \circ f = f$ . Analog zeigt man die andere Gleichung.

□

**Proposition 2.20**

Es seien  $X, Y \in \mathcal{P}os$  und  $X$  vollständig. Für  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}os}(X, Y)$  sind äquivalent:

- (i)  $f$  vertauscht mit Suprema.
- (ii)  $f$  besitzt einen Rechtsadjungierten.  $f^*$  ist dieser Rechtsadjungierte.

Dual dazu vertauscht  $f$  genau dann mit Infima, wenn  $f$  einen Linksadjungierten besitzt. Dieser ist durch  $f_*$  gegeben.

*Beweis.* Wegen Bemerkung 2.19 braucht nur noch die Implikation (i)  $\Rightarrow$  (ii) gezeigt werden.

- (i) Für alle  $x \in X$  gilt  $x \leq f^* \circ f(x)$  nach Bemerkung 2.17 (i).
- (ii) Für alle  $y \in Y$  gilt  $f \circ f^*(y) = \bigvee f(f^{-1}(Y_{\leq y})) = \bigvee (f(X) \cap (Y_{\leq y})) \leq \bigvee Y_{\leq y} = y$ , da  $f$  mit Suprema vertauscht.

Es seien nun  $x \in X$  und  $y \in Y$ .

- $f(x) \leq y$  impliziert  $x \leq f^* \circ f(x) \leq f^*(y)$  wegen (ii) und da  $f^*$  ordnungserhaltend ist.
- $x \leq f^*(y)$  impliziert  $f(x) \leq f \circ f^*(y) \leq y$  nach (i) und da  $f$  ordnungserhaltend ist.

Man beachte die Ähnlichkeit zum „Special Adjoint Functor Theorem“ (AHS06, Theorem 18.17) oder (Mac72, V.8 Satz 2).

□

## 2.4 Unterobjekte und Quotienten in Kategorien

Für die Vergleiche noetherscher Monoide monoidaler Kategorien spielen die Unter- und Quotientenobjekte eine wichtige Rolle. In diesem Abschnitt wird gezeigt wie die Unter- bzw. Quotientenobjekte eines Objekts Funktoren in die Kategorie der partiell geordneten Mengen definieren. Auf diese Weise induziert jeder Morphismus zwischen zwei Objekten eine Vergleichsabbildung zwischen ihren Unterobjekten bzw. Quotienten. In Abschnitt 2.4.1 wird jeweils eine weitere Variante des Unterobjekt- und Quotienten-Funktors vorgestellt und eine Vergleichsabbildung zwischen den Unterobjekten und Quotienten vorgestellt. Beispiel 2.29 zeigt schließlich wie diese insgesamt vier Funktoren für die Kategorie der Mengen beschrieben werden können und zusammenhängen.

Bei der Betrachtung von Unterobjekten und Quotienten von Objekten einer beliebigen Kategorie treten Klassen von Homomorphismen auf, die im Allgemeinen keine Menge mehr bilden. Um diese Klassen, und allgemeiner noch Konglomerate, zu handhaben, werden die Axiome von

(AHS06, 0.2) verwendet. Diese implizieren, dass man für Konglomerate ähnlich wie für Mengen ebenfalls einen Abbildungsbegriff und ähnliche Konstruktionen wie Teilkonglomerate, kartesische Produkte, usw. hat. Außerdem lassen die Axiome von (AHS06, 0.2) unter anderem das Auswahlaxiom für Konglomerate zu, das das Auswahlaxiom für Klassen und für Mengen impliziert. In diesem Abschnitt treten immer wieder Situationen auf, in denen sich das Auswahlaxiom für Konglomerate als Beweismittel als nützlich erweist. In fast allen Fällen kann dieses jedoch vermieden werden, wenn es kanonische Repräsentanten einer Klasse von (Faser-)Produkten, Unterobjekten, usw. gibt. Daher wird für die Beweise der einzelnen Sätze zwar das Auswahlaxiom verwendet, gleichzeitig wird jedoch jedes Mal darauf verwiesen, dass diese auch dann funktionieren, wenn die betreffende Kategorie jeweils „kanonische Objekte“ einer bestimmten Klasse als Repräsentanten dieser besitzt. Da die Existenz von (Faser-)Produkten, Differenzkernen, usw. in einer Kategorie häufig durch eine explizite Konstruktion nachgewiesen werden, hat man in den meisten interessanten Kategorien, d.h. insbesondere für die, die im Verlauf der Arbeit für diese Theorie in Betracht kommen, diese „kanonischen Repräsentanten“ und es kann daher auch auf das Auswahlaxiom für Konglomerate verzichtet werden.

### Bemerkung 2.21

Es sei  $\mathcal{D}$  eine Kategorie und  $X \in \mathcal{D}$  ein Objekt. Weiterhin sei  $\mathcal{M}_X$  die Klasse aller Monomorphismen  $U_m \xrightarrow{m} X$ .

- Für zwei Monomorphismen  $m, n \in \mathcal{M}_X$  sei  $m \leq n$ , falls es einen Morphismus  $U_m \xrightarrow{f} U_n$  gibt, so dass  $n \circ f = m$  ist.
- Für  $m, n \in \mathcal{M}_X$  sei  $m \sim n$ , falls  $m \leq n$  und  $n \leq m$  ist.

(i) Die Relation „ $\leq$ “ ist reflexiv und transitiv auf  $\mathcal{M}$ , im Allgemeinen jedoch nicht antisymmetrisch.

(ii) Die Relation „ $\sim$ “ ist eine Äquivalenzrelation.

Bildet man den Quotienten  $\mathcal{M}_X / \sim$  so erhält man nach Konstruktion ein partiell geordnetes Konglomerat.

Dual dazu trägt auch die Klasse  $\mathcal{E}_X$  aller Epimorphismen  $X \xrightarrow{e} Q_e$  eine Präordnung, die eine Äquivalenzrelation „ $\sim$ “ induziert. Man kann  $\mathcal{E}_X$  als  $\mathcal{M}_X$  des entsprechenden Objekts  $X$  in der dualen Kategorie  $\mathcal{D}^{\text{op}}$ .

*Beweis.* (AHS06, Remark 7.80). Beachte, dass unter den Axiomen von (AHS06, 2.1 - 2.3) Relationen auch auf Klassen und Konglomeraten gebildet werden können. Der Quotient von  $\mathcal{M}_X$  modulo  $\sim$  sei dann das Konglomerat aller Äquivalenzklassen und kann nach (AHS06, 2.3 (2)) gebildet werden. □

### Definition 2.22

Es sei  $\mathcal{D}$  eine Kategorie und  $X \in \mathcal{D}$  ein Objekt.

- (i) Es sei  $U_{\mathcal{D}}(X) = \mathcal{M}_X / \sim$  das Konglomerat aller **Unterobjekte** von  $X$  (vgl. (AHS06, Definition 7.77) oder (Mac72, V.7)).
- (ii) Es sei  $Q_{\mathcal{D}}(X) = \mathcal{E}_X / \sim$  das Konglomerat aller **Quotienten** von  $X$  (vgl. (AHS06, Definition 7.84)).

- (iii) Die Kategorie  $\mathcal{D}$  heißt **wellpowered** bzw. **co-wellpowered**, wenn  $U_{\mathcal{D}}(X)$  bzw.  $Q_{\mathcal{D}}(X)$  für alle  $X \in \mathcal{D}$  bijektiv einer Menge entsprechen (vgl. (AHS06, Definition 7.82) bzw. (AHS06, Definition 7.87)).

Falls aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, dass es sich um ein Objekt der Kategorie  $\mathcal{D}$  handelt, wird der Index  $\mathcal{D}$  an  $U$  bzw.  $Q$  auch weggelassen.

**Bemerkung 2.23**

Es sei  $\mathcal{D}$  eine Kategorie, die wellpowered ist, und  $X \in \mathcal{D}$  ein Objekt.

- (i) Ist  $\mathcal{D}$  endlich vollständig, dann ist  $U(X) \in \mathcal{P}os_{\wedge}$ .
- (ii) Ist  $\mathcal{D}$  vollständig, dann ist  $U(X) \in \mathcal{P}os_{\&}$ .

Duale Aussagen gelten für (endlich) kovollständige  $\mathcal{D}$  und  $Q$ .

*Beweis.* Es sei  $T \subset U(X)$ . Wähle für jede Äquivalenzklasse  $[m] \in T$  einen Repräsentanten  $m \in \mathcal{M}_X$ . Es sei  $T'$  die Menge all dieser Repräsentanten.  $T'$  induziert ein Diagramm  $D = (U_m \xrightarrow{m} X)_{m \in T'}$ . Ist  $\mathcal{D}$  (endlich) vollständig (und  $T \cong T'$  endlich), dann besitzt  $D$  einen Limes in  $\mathcal{D}$ . Es seien  $\lim D \xrightarrow{\pi_X} X$  und  $\lim D \xrightarrow{\pi_m} U_m$  die kanonische Limesprojektion.

- Für  $A \in \mathcal{D}$  und alle Morphismen  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, \lim D)$  mit  $\pi_X \circ f = \pi_X \circ g$  gilt  $m \circ \pi_m \circ f = \pi_X \circ f = \pi_X \circ g = m \circ \pi_m \circ g$  wegen  $\pi_X = m \circ \pi_m$  für alle  $m \in T'$ . Dies impliziert  $\pi_m \circ f = \pi_m \circ g$ , da jedes  $m \in T'$  monomorph ist. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage des Limes folgt dann  $f = g$ , so dass  $\pi_X$  monomorph ist.
- Es sei  $U_n \xrightarrow{n} X$  mit  $n \leq m$  für alle  $m \in T'$ . Dann gibt es für alle  $m \in T'$  ein  $g_m$  mit  $n = m \circ g_m$ , so dass es nach der universellen Eigenschaft des Limes auch ein  $h$  gibt mit  $\pi_X = n \circ h$ .

Damit ist  $\pi_X \in \mathcal{M}_X$  und  $[\pi_X] \in U(X)$  ein Infimum von  $T$ . □

**Proposition 2.24**

Es sei  $\mathcal{D}$  eine Kategorie, die beliebige Faserprodukte besitzt und wellpowered ist.

Dann erhält man einen kontravarianten Funktor

$$U' : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{P}os, \quad X \longmapsto U(X),$$

wobei die Abbildung auf den Morphismen wie folgt gegeben ist:

Es seien  $X, Y \in \mathcal{D}$  und  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ . Für alle Monomorphismen  $U_m \xrightarrow{m} Y$  bezeichne  $X \times_Y U_m \xrightarrow{f^*(m)} X$  den nach (AHS06, Proposition 11.18) monomorphen Faserprodukt-Morphismus eines Faserproduktendiagramms:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y U_m & \longrightarrow & U_m \\ f^*(m) \downarrow & & \downarrow m \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Für  $U'$  gelten folgende Eigenschaften:

- (i) Falls eine Teilmenge  $T \subset U(Y)$  ein Infimum  $\bigwedge T \in U(Y)$  besitzt, dann ist  $U(f)(\bigwedge T)$  ein Infimum von  $U(f)(T)$ , d.h.  $U(f)$  respektiert alle Infima.

(ii) Wegen Bemerkung 2.23 und (i) gilt

a)  $\mathcal{D} \xrightarrow{U'} \mathcal{P}os_{\wedge}$ , falls  $\mathcal{D}$  endlich vollständig ist.

b)  $\mathcal{D} \xrightarrow{U'} \mathcal{P}os_{\mathbb{N}}$ , falls  $\mathcal{D}$  vollständig ist.

- Achtung: Wenn es keine kanonische Konstruktion eines Faserprodukts gibt, dann wird für die Auswahl eines  $f^+(m)$  das Auswahlaxiom für Klassen benötigt. Außerdem wird das Auswahlaxiom für Konglomerate verwendet, um zu zeigen, dass die von  $f$  induzierte Abbildung Infima respektiert. Dies lässt sich ebenfalls umgehen, wenn es für jedes Unterobjekt (aufgefasst als Äquivalenzklasse) einen kanonischen Repräsentanten gibt.
- Nach dem Dualitätsprinzip erhält man für Kategorien  $\mathcal{D}$  mit beliebigen Kofaserprodukten, die co-wellpowered sind, einen (kovarianten) Funktor  $\mathcal{D} \xrightarrow{Q'} \mathcal{P}os$ .

*Beweis.* Es seien  $U_m \xrightarrow{m} Y$  bzw.  $U_n \xrightarrow{n} Y$  zwei Monomorphismen in  $\mathcal{D}$  mit  $m \leq n$ , d.h. es gibt ein  $U_m \xrightarrow{g} U_n$  mit  $n \circ g = m$ . Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 A \times_B U_m & \longrightarrow & U_m \\
 \downarrow \exists! g' & & \downarrow g \\
 A \times_B U_n & \longrightarrow & U_n \\
 \downarrow f^*(n) & & \downarrow n \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}$$

Das äußere Rechteck so wie das untere Quadrat sind Faserprodukt diagramme und der rechte Seitenteil kommutiert nach Voraussetzung. Folglich gibt es nach der Faserprodukteigenschaft des Quadrats ein eindeutiges  $g'$ , so dass das gesamte Diagramm kommutiert. Damit ist  $f^*(n) \circ g' = f^*(m)$  und folglich  $f^*(m) \leq f^*(n)$ . Die Zuordnung  $m \mapsto f^*(m)$  induziert eine ordnungserhaltende Abbildung  $\mathcal{M}_Y \rightarrow \mathcal{M}_X$  und damit nach Definition von  $U(X)$  bzw.  $U(Y)$  eine ordnungserhaltende Abbildung  $U(Y) \xrightarrow{U'(f)} U(X)$ .

- Da nachfolgendes Diagramm für alle  $m \in \mathcal{M}_X$  ein Faserprodukt diagramm ist, ist  $U'(\text{id}_X) = \text{id}_{U(X)}$  für alle  $X \in \mathcal{D}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 U_m & \xrightarrow{\text{id}_{U_m}} & U_m \\
 m \downarrow & & \downarrow m \\
 X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X
 \end{array}$$

- Für  $X, Y, Z \in \mathcal{D}$  und  $U_m \xrightarrow{m} Z$  betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \\
 & & \exists! f' & & \\
 X \times_Z U_m & \xrightarrow{\quad} & Y \times_Z U_m & \longrightarrow & U_m \\
 (g \circ f)^*(m) \downarrow & & \downarrow f^*(m) & & \downarrow m \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

Das äußere Rechteck und das rechte Quadrat sind Faserprodukt diagramme und kommutieren. Nach der Faserprodukteigenschaft des Quadrats existiert dann ein  $f'$ , so dass das gesamte Diagramm kommutiert. Insbesondere ist das linke Quadrat dann ebenfalls ein Faserprodukt diagramm, so dass  $f^*(g^*(m)) = (g \circ f)^*(m)$  gewählt werden kann. Insgesamt ist also  $U'(g \circ f) = U'(f) \circ U'(g)$  und damit  $U'$  ein Funktor.

- (i) Es seien  $X, Y \in \mathcal{D}$  und  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ . Für eine Teilmenge  $T \subset U(Y)$ , die in  $U(Y)$  ein Infimum  $\bigwedge T$  besitzt, wähle eine Teilmenge  $T' \subset \mathcal{M}_Y$  von Repräsentanten und einen Repräsentanten  $\pi_Y$  der Äquivalenzklasse  $\bigwedge T$ . Da  $\bigwedge T$  eine untere Schranke von  $T$  ist, gibt es für alle  $m \in T'$  ein  $\pi_m$  mit  $\pi_Y = m \circ \pi_m$ . Nach der universellen Eigenschaft für Infima bildet  $U_{\pi_Y}$  zusammen mit  $\pi_Y$  und den  $\pi_m$  einen Limes des von  $T'$  induzierten Diagramms  $(U_m \xrightarrow{m} X)_{m \in T'}$ . Schreibe daher  $\lim T' = U_{\pi_Y}$ . Für  $m \in T'$  betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f^*(\pi_Y) & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 (\lim T') \times_Y X & \xrightarrow{\exists! p_m} & U_m \times_Y X & \xrightarrow{f^*(m)} & X \\
 \downarrow & & \downarrow m^*(f) & & \downarrow f \\
 \lim T' & \xrightarrow{\pi_m} & U_m & \xrightarrow{m} & Y \\
 & & \curvearrowleft & & \\
 & & \pi_Y & & 
 \end{array}$$

Zunächst kommutiert das rechte Quadrat und das äußere Rechteck, da sie Faserprodukt-diagramme sind. Nach der universellen Eigenschaft des Faserprodukts existiert dann ein eindeutiges  $p_m$  wie eingezeichnet, das das gesamte Diagramm kommutieren lässt. Nun sei  $A \in \mathcal{D}$  und  $a \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, X)$  sowie  $a_m \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, U_m \times_Y X)$  der Art, dass  $a = f^*(m) \circ a_m$  ist, für alle  $m \in T'$ . Betrachte das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & a & & \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 & \exists! c & a_m & & \\
 & \xrightarrow{\exists! b} & (\lim T') \times_Y X & \xrightarrow{p_m} & U_m \times_Y X & \xrightarrow{f^*(m)} & X \\
 & & \downarrow & & \downarrow m^*(f) & & \downarrow f \\
 & & \lim T' & \xrightarrow{\pi_m} & U_m & \xrightarrow{m} & Y \\
 & & & & \curvearrowleft & & \\
 & & & & \pi_Y & & 
 \end{array}$$

Aufgrund der Kommutativität des rechten Diagramms für alle  $m \in T'$  gilt  $f \circ a = m \circ (m^*(f) \circ a_m)$  für alle  $m \in T'$ , so dass nach der universellen Eigenschaft des Limes wie eingezeichnet genau ein  $A \xrightarrow{b} \lim T'$  existiert mit  $\pi_Y \circ b = f \circ a$  und  $\pi_m \circ b = m^*(f) \circ a_m$ , für alle  $m \in T'$ . Nach der universellen Eigenschaft des Faserprodukts existiert dann genau ein  $A \xrightarrow{c} \lim T' \times_Y X$ , so dass das gesamte Diagramm kommutiert. Damit ist  $\lim T' \times_Y X$  ein Limes von  $(U_m \times_Y X \xrightarrow{f^*(m)} X)_{m \in T'}$  und folglich  $U'(f)(\bigwedge T) = U'(f)([\pi_Y]) = [f^*(\pi_Y)]$  ein Infimum von  $U'(f)(T)$ .

□

### 2.4.1 Unterobjekte und Quotienten (Epi,Mono)-strukturierter Kategorien

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass es unter bestimmten Bedingungen, d.h. im Fall einer (Epi,Mono)-strukturierten Kategorie jeweils eine zweite Form des Unterobjekt- und Quotientenfunktors gibt. Proposition 2.28 stellt darüber hinaus eine Verbindung zwischen den Unterobjekten und Quotienten her.

**Definition 2.25**

Es sei  $\mathcal{D}$  eine Kategorie und  $E$  und  $M$  Klassen von Morphismen in  $\mathcal{D}$ . Die Kategorie  $\mathcal{D}$  heißt  $(E, M)$ -**strukturiert**, wenn folgende Eigenschaften gelten:

- (i)  $E$  und  $M$  sind abgeschlossen unter Verkettung mit Isomorphismen aus  $\mathcal{D}$ .
- (ii) Für alle Morphismen  $f$  in  $\mathcal{D}$  gibt es ein  $e \in E$  und ein  $m \in M$ , so dass  $f = m \circ e$  ist.
- (iii) Alle kommutativen Quadrate in  $\mathcal{D}$ , mit  $e \in E$  und  $m \in M$  wie unten abgebildet, lassen sich unter Bewahrung der Kommutativität mit einem eindeutigen, diagonalen  $\mathcal{D}$ -Morphismus  $d$  ergänzen.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & B \\ f \downarrow & \exists! d \nearrow & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{m} & D \end{array}$$

(vgl. (AHS06, Definition 14.1))

**Proposition 2.26**

Es sei  $\mathcal{D}$  eine Kategorie, die  $(Epi, Mono)$ -strukturiert ist.

Weiterhin seien  $X, Y \in \mathcal{D}$  und  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ .

- (i) Für  $n \in \mathcal{M}_X$  gibt es eine Faktorisierung  $f \circ n = m_{f \circ n} \circ e_{f \circ n}$  mit epimorphem  $e_{f \circ n}$  und monomorphem  $m_{f \circ n}$ . Dies definiert eine ordnungserhaltende Abbildung

$$U(f) : U(X) \longrightarrow U(Y), \quad [n] \longmapsto [m_{f,n}].$$

Insbesondere erhält man einen Funktor  $\mathcal{D} \xrightarrow{U} \mathcal{P}os$ , falls  $\mathcal{D}$  wellpowered ist.

- (ii) Für  $d \in \mathcal{E}_Y$  gibt es eine Faktorisierung  $d \circ f = m_{d \circ f} \circ e_{d \circ f}$  mit epimorphem  $e_{d \circ f}$  und monomorphem  $m_{d \circ f}$ . Dies definiert eine ordnungserhaltende Abbildung

$$Q(f) : Q(Y) \longrightarrow Q(X), \quad [d] \longmapsto [e_{d \circ f}].$$

Insbesondere erhält man einen (kontravarianten) Funktor  $\mathcal{D} \xrightarrow{Q} \mathcal{P}os$ , falls  $\mathcal{D}$  co-wellpowered ist.

Achtung: Wenn es keine kanonische  $(Epi, Mono)$ -Faktorisierung eines Morphismus gibt, dann wird das Auswahlaxiom für Klassen benötigt.

*Beweis.* Es seien  $m, n \in \mathcal{M}_X$  mit  $m \leq n$ , d.h. es gibt einen Morphismus  $U_m \xrightarrow{g} U_n$  mit  $n \circ g = m$ . Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & m & & \\ & & \curvearrowright & & \\ U_m & \xrightarrow{g} & U_n & \xrightarrow{n} & X \\ e_{f \circ m} \downarrow & & e_{f \circ n} \downarrow & & \downarrow f \\ U_{f \circ m} & \xrightarrow{\exists! d} & U_{f \circ n} & \xrightarrow{m_{f \circ n}} & Y \\ & & \curvearrowleft & & \\ & & m_{f \circ m} & & \end{array}$$



Nach Definition der Faktorisierungen kommutieren das äußere und das rechte Quadrat. Ebenso kommutiert der obere Teil. Nach der Diagonaleigenschaft der Faktorisierungen existiert dann der Morphismus  $d$ , der das gesamte Diagramm kommutieren lässt. Insbesondere ist  $m_{f \circ m} \leq m_{f \circ n}$ .

Damit erhält man eine ordnungserhaltende Abbildung von Konglomeraten

$$\mathcal{M}_X \longrightarrow \mathcal{M}_Y, \quad m \longmapsto m_{f \circ m},$$

die nach Definition der Relationen „ $\sim$ “ eine ordnungserhaltende Abbildung  $U(X) \xrightarrow{U(f)} U(Y)$  induziert.

- Für alle  $X \in \mathcal{D}$  und  $m \in \mathcal{M}_X$  ist  $U(\text{id}_X)([m]) = [m_{\text{id}_X \circ m}] = [m_m] = [m]$  und folglich  $U(\text{id}_X) = \text{id}_{U(X)}$ .
- Es seien  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  Morphismen in  $\mathcal{D}$  und  $m \in \mathcal{M}_X$ . Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 U_m & \xrightarrow{m} & X \\
 \downarrow e_{f \circ m} & & \downarrow f \\
 U_{f \circ m} & \xrightarrow{m_{f \circ m}} & Y \\
 \downarrow \exists! d & & \downarrow g \\
 U_{g \circ f \circ m} & \xrightarrow{m_{g \circ f \circ m}} & Z
 \end{array}$$

*(Note: A curved arrow labeled  $e_{g \circ f \circ m}$  points from  $U_m$  to  $U_{g \circ f \circ m}$ .)*

Das äußere und obere Quadrat kommutieren nach Definition der Faktorisierungen. Wieder existiert ein  $d$  nach der Diagonaleigenschaft, so dass das gesamte Diagramm kommutiert. Da  $e_{g \circ f \circ m}$  epimorph ist, ist auch  $d$  epimorph und folglich  $g \circ m_{f \circ m} = m_{g \circ f \circ m} \circ d$  eine (Epi, Mono)-Faktorisierung. Damit gilt  $U(g \circ f)([m]) = U(g)(U(f)([m]))$  und folglich  $U(g \circ f) = U(g) \circ U(f)$ , so dass  $U$  ein Funktor ist.

Analog zeigt man auch die Aussage für  $Q$ . □

**Korollar 2.27**

Es seien  $\mathcal{D}$  eine (Epi, Mono)-strukturierte Kategorie und  $X \xrightarrow{f} Y$  ein  $\mathcal{D}$ -Morphismus.

- (i) Falls  $f$  monomorph ist, dann ist  $U(X) \xrightarrow{U(f)} U(Y)$  injektiv.
- (ii) Falls  $f$  epimorph ist, dann ist  $Q(Y) \xrightarrow{Q(f)} Q(X)$  injektiv.

*Beweis.*

- (i) Die von  $f$  induzierte Abbildung  $U(X) \xrightarrow{U(f)} U(Y)$  ordnet jeder Klasse  $[m]$  die Klasse  $[f \circ m]$  zu, denn  $f \circ m$  ist als Verkettung zweier Monomorphismen selbst monomorph, so dass  $f \circ m = (f \circ m) \circ \text{id}_{U_m}$  eine (Epi, Mono)-Faktorisierung ist. Für zwei Monomorphismen  $m, n \in \mathcal{M}_X$  mit  $f \circ m \leq f \circ n$  gibt es ein  $g$  mit  $f \circ m = f \circ n \circ g$ . Da  $f$  monomorph ist, folgt  $m = n \circ g$  und damit  $m \leq n$ . Damit impliziert  $[f \circ m] = [f \circ n]$  schon  $[m] = [n]$ , so dass  $U(f)$  injektiv ist.
- (ii) Diese Aussage ist dual zu (i). □

**Proposition 2.28**

Es sei  $\mathcal{D}$  eine Kategorie, die  $(Epi, Mono)$ -strukturiert, wellpowered und co-wellpowered ist. Weiterhin existiere ein terminales Objekt  $T \in \mathcal{D}$  der Art, dass jeder Morphismus  $X \xrightarrow{t} T$  epimorph ist.

Für alle  $X \in \mathcal{D}$  und  $m \in \mathcal{M}_X$  existiere ein Kofaserprodukt

$$\begin{array}{ccc} U_m \hookrightarrow & m & \longrightarrow X \\ t_{U_m} \downarrow & & \downarrow m' \\ T & \longrightarrow & T \amalg_{U_m} X, \end{array}$$

wobei  $t_{U_m}$  der nach der universellen Eigenschaft eines terminalen Objekts eindeutige Epimorphismus ist. Nach der dualen Aussage von (AHS06, Proposition 11.18) ist dann  $m'$  epimorph.

Die Zuordnung  $m \mapsto m'$  induziert eine Abbildung  $U'(X) \xrightarrow{\varphi_X} Q(X)$ , welche im Allgemeinen jedoch nicht natürlich in  $X$  ist.

*Achtung:* Wiederum wird das Auswahlaxiom für Klassen benötigt, falls es für obige Situationen kein kanonisches Kofaserprodukt in  $\mathcal{D}$  gibt.

*Beweis.* Es seien  $X \in \mathcal{D}$  und  $m \in \mathcal{M}_X$ . Nach der dualen Aussage von (AHS06, Proposition 11.18) ist  $m'$  epimorph, da nach Voraussetzung  $t_{U_m}$  epimorph ist. Damit erhält man eine Abbildung  $\mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{E}_X$ . Es seien  $m, n \in \mathcal{M}_X$  mit  $m \leq n$ , d.h. es gibt ein  $g$ , so dass  $m = n \circ g$  ist. Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & m & & \\ & & \curvearrowright & & \\ U_m & \xrightarrow{g} & U_n \hookrightarrow & n & \longrightarrow X \\ & \searrow t_{U_m} & \downarrow t_{U_n} & & \downarrow n' \\ & & T & \longrightarrow & T \amalg_{U_n} X \\ & \searrow & & \nearrow \exists! g' & \searrow m' \\ & & & & T \amalg_{U_m} X \end{array}$$

Das rechte Quadrat kommutiert, da es ein Kofaserprodukt diagramm ist. Das linke Dreieck kommutiert nach der Eindeutigkeitsaussage der universellen Eigenschaft eines terminalen Objekts. Die äußeren Wege kommutieren, da diese ebenfalls ein Kofaserprodukt diagramm bilden. Damit kommutiert das gesamte Diagramm. Nach der universellen Eigenschaft des Kofaserprodukts existiert dann ein  $g'$ , wie eingezeichnet, so dass die Kommutativität erhalten bleibt. Damit gilt insbesondere  $m' = g' \circ n'$  bzw.  $m' \leq n'$  nach Definition der Präordnung auf  $\mathcal{E}_X$ . Damit ist die Abbildung  $\mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{E}_X$  ordnungserhaltend und definiert die ordnungserhaltende Abbildung  $U'(X) \xrightarrow{\varphi_X} Q(X)$ . □

**Beispiel 2.29**

Die Kategorie  $\text{Set}$  ist vollständig und kovollständig (vgl. (AHS06, Example 12.6)) und außerdem  $(Epi, Mono)$ -strukturiert (siehe (AHS06, Beispiel 14.2 (4))). Für jede Abbildung  $X \xrightarrow{f} Y$  bildet  $X \twoheadrightarrow X/f^{-1}(\Delta_Y) \xrightarrow{\bar{f}} f(X) \hookrightarrow Y$  eine  $(Epi, Mono)$ -Faktorisierung von  $f$ , wobei die Diagonale  $\Delta_Y \subset Y \times Y$  als triviale Äquivalenzrelation auf  $Y$  aufgefasst wird und  $f^{-1}(\Delta_Y)$  dementsprechend als Äquivalenzrelation auf  $X$ .

- (i) Für alle Mengen  $X \in \mathbf{Set}$  wird jede Äquivalenzklasse  $[m] \in U_{\mathbf{Set}}(X)$  von der Inklusion einer Teilmenge  $T \subset X$  erzeugt, so dass  $U_{\mathbf{Set}}(X)$  als die Potenzmenge von  $X$  mit der Inklusion als Halbordnung aufgefasst werden kann. Insbesondere ist  $\mathbf{Set}$  wellpowered.

Für eine Abbildung  $X \xrightarrow{f} Y$  ist mit dieser Interpretation von  $U_{\mathbf{Set}}$ :

- $U(f)(T) = f(T) \subset Y$  für alle  $T \subset X$ .
- $U'(f)(T) = f^{-1}(T)$  für alle  $T \subset Y$ .

- (ii) Für alle Mengen  $X \in \mathbf{Set}$  wird jede Äquivalenzklasse  $[e] \in Q_{\mathbf{Set}}(X)$  von einer Projektion  $X \twoheadrightarrow X/R$  erzeugt, wobei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$  ist. Man kann  $Q_{\mathbf{Set}}(X)$  daher mit der Klasse aller Äquivalenzrelationen auf  $X$  identifizieren. Da jede Äquivalenzrelation auf  $X$  wiederum als Teilmengen von  $X \times X$  aufgefasst werden kann, entspricht  $Q_{\mathbf{Set}}(X)$  bijektiv einer Teilmenge der Potenzmenge von  $X \times X$ . Die auf  $Q_{\mathbf{Set}}(X)$  definierte Halbordnung stimmt per Konstruktion mit der von der Potenzmenge geerbten Inklusionshalbordnung überein. Insbesondere ist  $\mathbf{Set}$  co-wellpowered.

Für eine Abbildung  $X \xrightarrow{f} Y$  ist mit dieser Interpretation von  $Q_{\mathbf{Set}}$ :

- $Q(f)(R) = (f \times f)^{-1}(R)$ , für alle Äquivalenzrelationen  $R \subset Y \times Y$  auf  $Y$ .
- $Q'(f)(R)$  ist die von  $(f \times f)(R)$  erzeugte Äquivalenzrelation auf  $Y$ , für alle Äquivalenzrelationen  $R \subset X \times X$  auf  $X$ .

- (iii) Für alle Mengen  $X \in \mathbf{Set}$  übersetzt sich die Abbildung aus Proposition 2.28 und deren duale Aussage zu folgenden Abbildungen:

- Für alle Teilmengen  $T \subset X$  ist  $\varphi_X(T)$  die Äquivalenzrelation auf  $X$ , die  $T$  zu einem Punkt kollabiert.
- Für alle Relationen  $R \subset X \times X$  auf  $X$  ist  $\varphi_X(R) = \emptyset$ .

Die erste Abbildung  $\varphi_X$  verhält sich sehr gut, um  $U$  und  $Q$  zu vergleichen, denn sie bildet eine injektive Einbettung partiell geordneter Mengen. Die Abbildung der dualen Aussage dagegen ist konstant und überträgt keinerlei Informationen der einen Menge auf die andere.

- (iv) Verwendet man die Kategorie der punktierten Mengen mit den Abbildungen, die die ausgezeichneten Punkte aufeinander abbilden, als Morphismen, dann erhält man für (i) und (ii) die gleiche Beschreibung der Funktoren  $U$ ,  $U'$ ,  $Q$  und  $Q'$ , aber für die duale Abbildung  $\varphi_X$  eine bessere Vergleichsabbildung. In diesem Fall würde eine Äquivalenzrelation  $R$  auf einer punktierten Menge  $(X, x_0)$  abgebildet auf die Teilmenge  $[x_0]_R \subset X$ .
- (v) Noch bessere Eigenschaften haben die Abbildungen  $\varphi_X$  aus Proposition 2.28 und deren dualer Aussage im Fall von abelschen Kategorien. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass diese im Fall einer abelschen Kategorie zu einander inverse Isomorphismen partiell geordneter Mengen bilden.

## 2.4.2 Unterobjekte und Quotienten in abelschen Kategorien

Dieses Kapitel zeigt, dass die partiell geordnete Menge der Unter- und Quotientenobjekte eines Objekts in einer abelschen Kategorie übereinstimmt. Da dies in allgemeinen Kategorien nicht der Fall ist, zeigt Kapitel 9, dass es zwei zueinander duale Begriffe von „noethersch“ gibt, die im Falle der abelschen Kategorie von Moduln über einem Ring übereinstimmen und daher nicht unterschieden werden müssen.

**Definition 2.30**

Es sei  $\mathcal{D}$  eine Kategorie und  $N \in \mathcal{D}$  ein Objekt, das sowohl initial als auch terminal ist. Ein solches Objekt  $N$  heißt **Nullobjekt**.

- (i) Für alle  $X, Y \in \mathcal{D}$  gibt es einen kanonischen Morphismus  $X \xrightarrow{t_X} N \xrightarrow{i_Y} Y$ , wobei  $t_X$  und  $i_Y$  eindeutig existieren nach der universellen Eigenschaft terminaler bzw. initialer Objekte. Dieser Morphismus  $0 = i_Y \circ t_X \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$  heie **Nullmorphimus**.
- (ii) Es seien  $X, Y \in \mathcal{D}$  und  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ .

a) Ein Differenzkern  $K \xrightarrow{\text{ker } f} X \xrightarrow[f]{0} Y$  heißt **Kern** von  $f$ .

b) Ein Differenzkokern  $X \xrightarrow[f]{0} Y \xrightarrow{\text{coker } f} C$  heißt **Kokern** von  $f$ .

(vgl. (Mac72, VIII.1))

**Bemerkung 2.31**

Es sei  $\mathcal{D}$  eine Kategorie mit einem Nullobjekt  $N \in \mathcal{D}$ .

Dann gelten folgende Eigenschaften:

- (i) Jeder Morphismus nach  $N$  ist epimorph.
- (ii) Falls jeder Morphismus einen Kern und einen Kokern besitzt und falls jeder Monomorphismus ein Kern in  $\mathcal{D}$  ist, dann ist  $\mathcal{D}$  (Epi, Mono)-strukturiert.

*Beweis.*

- (i) Es sei  $X \in \mathcal{D}$  und  $X \xrightarrow{f} N$ . Da  $N$  initial ist, gibt es einen eindeutigen Morphismus  $N \xrightarrow{g} X$ . Weiterhin ist  $\text{id}_N$  der einzige Endomorphismus auf  $N$ , so dass  $f \circ g = \text{id}_N$  sein muss. Damit besitzt  $f$  ein Rechtsinverses und ist insbesondere epimorph.
- (ii) Es seien  $X, Y \in \mathcal{D}$  und  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ . Dann existiert  $m = \text{ker}(\text{coker } f)$  und nach der universellen Eigenschaft eines Differenzkerns, gibt es ein eindeutiges  $e$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow[\text{0}]{\text{coker } f} C \\
 \downarrow \text{id} & \nearrow e & \\
 K & & 
 \end{array}$$

$\text{ker}(\text{coker } f)$

Nach Lemma (Mac72, VIII.1 Lemma 1) ist  $e$  epimorph und es gilt die Diagonaleigenschaft, da in  $\mathcal{D}$  nach Voraussetzung jeder Monomorphismus ein Kern ist. □

**Proposition 2.32**

Es sei  $\mathcal{D}$  eine (Epi, Mono)-strukturierte Kategorie, die ein Nullobjekt  $N \in \mathcal{D}$  und für alle Morphismen einen Kokern besitzt. Für alle  $X \in \mathcal{D}$  und  $m \in \mathcal{M}_X$  bildet dann

$$\begin{array}{ccc}
 U_m \xrightarrow{m} X & & \\
 \downarrow t_{U_m} & & \downarrow \text{coker } m \\
 N \xrightarrow{i_C} C & & 
 \end{array}$$

ein Kofaserprodukt diagramm, wobei  $t_{U_m}$  und  $i_C$  die nach der universellen Eigenschaft eines Nullobjekts eindeutigen Morphismen sind und  $C$  der Zielbereich von  $\text{coker } m$  ist.

Folglich ist die Abbildung  $\varphi_X$  für alle  $X \in \mathcal{D}$  aus Proposition 2.28 gegeben durch

$$\varphi_X : U'(X) \longrightarrow Q(X), \quad [m] \longmapsto [\text{coker } m].$$

(i) Falls jeder Morphismus einen Kern besitzt, dann gilt:

a) Ist jeder Monomorphismus ein Kern in  $\mathcal{D}$ , dann besitzt  $\varphi_X$  ein Linksinverses und ist insbesondere injektiv.

b) Ist jeder Epimorphismus ein Kokern in  $\mathcal{D}$ , dann besitzt  $\varphi_X$  ein Rechtsinverses und ist insbesondere surjektiv.

(ii)  $\varphi_X$  ist ein Isomorphismus, falls  $\mathcal{D}$  eine abelsche Kategorie ist.

*Beweis.* Es sei  $Y \in \mathcal{D}$  sowie  $X \xrightarrow{f} Y$  und  $N \xrightarrow{g} Y$  zwei Morphismen mit  $f \circ m = g \circ t_{U_m}$ . Dann ist  $f \circ m = g \circ t_{U_m} = 0 = f \circ 0$  nach Definition des Nullmorphisms. Insbesondere gibt es nach der universellen Eigenschaft des Differenzkokerns einen eindeutigen Morphismus  $C \xrightarrow{h} Y$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 U_m & \xrightarrow{m} & X \\
 \downarrow t_{U_m} & \searrow \text{coker } m & \downarrow \\
 N & \xrightarrow{i_C} & C \\
 & \searrow g & \downarrow \exists! h \\
 & & Y
 \end{array}$$

(Note: A curved arrow labeled  $f$  also points from  $X$  to  $Y$  in the original diagram.)

wobei die linke untere Seite nach der universellen Eigenschaft eines initialen Objekts kommutiert. Damit erfüllt das Diagramm die gewünschte Kofaserprodukteigenschaft.

(i) Da jeder Monomorphismus ein Kern und jeder Epimorphismus ein Kokern ist, folgt dies unmittelbar aus der dualen Aussage des soeben Gezeigten unter Benutzung von Bemerkung 2.19 in Bezug auf die Galois-Verbindung

$$f \leq \ker g \iff \text{coker } f \leq g,$$

für alle  $X, Y \in \mathcal{D}$  und alle  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$  aus (Mac72, VIII.1 S. 211 oben). Beachte, dass die dort definierte Präordnung auf den Epimorphismen dual ist zu der hier definierten.

(ii) Alle erforderlichen Voraussetzungen sind Axiome einer abelschen Kategorie (Mac72, VIII.3).

□



**Teil I**

**Algebraische  
Monoidring-Konstruktionen**





# Kapitel 3

## Monoide

In diesem Kapitel wird das Konzept der monoidalen Kategorien vorgestellt, welches sich wie ein roter Faden durch die gesamte Diplomarbeit zieht. Dies liegt daran, dass nicht zuletzt die Kategorie der Monoide und die der Ringe eine kanonische monoidale Struktur trägt, deren direkte Verbindung der Monoidring darstellt. Viele Konzepte, die in der Kategorie der Ringe und Moduln über einem Ring auftauchen, finden sich in einer abgewandelten Form auch in der Kategorie der Monoide bzw. später in der Kategorie der (lokal) proendlichen, eigentlichen Monoide. Anstatt alle Fälle einzeln zu betrachten, kann man eben auch alle Fälle zusammengefasst unter dem Begriff der monoidalen Kategorie betrachten.

### 3.1 Monoidale Kategorien

#### Definition 3.1

Eine Kategorie  $\mathcal{D}$  zusammen mit einem Bifunktor

$$- \boxtimes - : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}, \quad (A, B) \longmapsto A \boxtimes B,$$

einem Objekt  $E \in \mathcal{D}$  und drei natürlichen Isomorphismen

- $\alpha : (- \boxtimes (- \boxtimes -)) \xrightarrow{\sim} ((- \boxtimes -) \boxtimes -)$ ,
- $\lambda : (E \boxtimes -) \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{D}}$  und
- $\rho : (- \boxtimes E) \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{D}}$

heißt **monoidale Kategorie**, wenn  $\alpha$ ,  $\lambda$  und  $\rho$  folgende **Kohärenzeigenschaften** besitzen:

(i) Für alle  $A, B, C, D \in \mathcal{D}$  kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 A \boxtimes (B \boxtimes (C \boxtimes D)) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \boxtimes D}} & (A \boxtimes B) \boxtimes (C \boxtimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A \boxtimes B,C,D}} & ((A \boxtimes B) \boxtimes C) \boxtimes D \\
 \text{id}_A \boxtimes \alpha_{B,C,D} \downarrow & & & & \alpha_{A,B,C} \boxtimes \text{id}_D \uparrow \\
 A \boxtimes ((B \boxtimes C) \boxtimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A,B \boxtimes C,D}} & & & (A \boxtimes (B \boxtimes C)) \boxtimes D
 \end{array}$$

(ii) Für alle  $A, C \in \mathcal{D}$  kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 A \boxtimes (E \boxtimes C) & \xrightarrow{\alpha_{A,E,C}} & (A \boxtimes E) \boxtimes C \\
 \searrow \text{id}_A \boxtimes \lambda & & \swarrow \rho \boxtimes \text{id}_C \\
 & A \boxtimes C &
 \end{array}$$

(iii)  $\lambda_E = \rho_E$ .

(vgl. (Mac72, VII.1))

**Proposition 3.2**

Es sei  $\mathcal{D}$  eine Kategorie mit endlichen Produkten.

Dann gibt es ein terminales Objekt  $T \in \mathcal{D}$  (das leere Produkt) und kanonische Isomorphismen  $(- \times (- \times -)) \xrightarrow{\alpha} ((- \times -) \times -)$ ,  $(T \times -) \xrightarrow{\lambda} \text{id}_{\mathcal{D}}$  und  $(- \times T) \xrightarrow{\rho} \text{id}_{\mathcal{D}}$ , so dass  $(\mathcal{D}, \times, T, \alpha, \lambda, \rho)$  eine monoidale Kategorie ist.

Achtung: Wenn es keine kanonische Konstruktion eines Produkts zweier Objekte in  $\mathcal{D}$  gibt, dann wird das Auswahlaxiom für Klassen benötigt.

*Beweis.*

- Nach der universellen Eigenschaft von Produkten gibt es für alle  $A, A', B, B' \in \mathcal{D}$  und alle  $A \xrightarrow{f} A'$  und  $B \xrightarrow{g} B'$  ein eindeutiges  $f \times g$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\pi_A} & A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B \\ \downarrow \text{id}_A & & \downarrow \exists! f \times g & & \downarrow \text{id}_B \\ A' & \xleftarrow{\pi_{A'}} & A' \times B' & \xrightarrow{\pi_{B'}} & B' \end{array}$$

Die Eindeutigkeit impliziert dann, dass die Morphismenabbildung  $(f, f') \mapsto f \times f'$  folgenden Funktor definiert:

$$- \times - : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}, \quad (A, B) \longmapsto A \times B$$

- Für drei Objekte  $A, B, C \in \mathcal{D}$  sind sowohl  $(A \times B) \times C$  mit den Projektionen  $\pi_A \circ \pi_{A \times B}$ ,  $\pi_B \circ \pi_{A \times B}$  und  $\pi_C$  als auch  $A \times (B \times C)$  mit analogen Projektionen Produkte von  $A, B$  und  $C$  in  $\mathcal{D}$ . Nach der universellen Eigenschaft des Produkts gibt es dann eindeutige  $A \times (B \times C) \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}} (A \times B) \times C$  und  $(A \times B) \times C \xrightarrow{\beta_{A,B,C}} A \times (B \times C)$ , die mit diesen Produktprojektionen verträglich sind. Folglich sind auch  $\beta_{A,B,C} \circ \alpha_{A,B,C}$  und  $\alpha_{A,B,C} \circ \beta_{A,B,C}$  mit den Projektionen verträglich, so dass die Eindeutigkeitsaussage des Produkts zeigt, dass diese beiden Morphismen die Identität auf den jeweiligen Objekten sind. Folglich sind  $\alpha_{A,B,C}$  und  $\beta_{A,B,C}$  Isomorphismen. Wieder nach der universellen Eigenschaft des Produkts ist  $\alpha$  natürlich in  $A, B$  und  $C$ , so dass man den natürlichen Isomorphismus  $(- \times (- \times -)) \xrightarrow{\alpha} ((- \times -) \times -)$  erhält.

Der natürliche Isomorphismus  $\alpha$  erfüllt die Bedingung (i) aus Definition 3.1, da alle Morphismen des Diagramms nach Konstruktion von  $\alpha$  mit den Projektionen verträglich sind. Mit der universellen Eigenschaft des vierfachen Produkts folgt dann wiederum die Eindeutigkeit solcher Morphismen und insbesondere die Kommutativität des Diagramms.

- Für alle  $A \in \mathcal{D}$  gibt es nach der universellen Eigenschaft des terminalen Objekts eindeutigen Morphismus  $t \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, T)$  und damit nach der universellen Eigenschaft des Produkts von  $A$  und  $T$  einen eindeutigen Morphismus  $f$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \swarrow \text{id}_A & | & \searrow t & \\ A & & \downarrow \exists! f & & T \\ & \swarrow \pi_A & A \times T & \searrow \pi_T & \end{array}$$

Dies impliziert  $\pi_A \circ f = \text{id}_A$ . Aufgrund der Eindeutigkeit des Morphismus in das terminale Objekt, kommutiert auch folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\pi_A} & A \times T & \xrightarrow{\pi_T} & T \\ \text{id}_A \downarrow & & \downarrow f \circ \pi_A & & \downarrow \text{id}_T \\ A & \xleftarrow{\pi_A} & A \times T & \xrightarrow{\pi_T} & T \end{array}$$

Die Eindeutigkeitsaussage für Produkte impliziert dann  $f \circ \pi_A = \text{id}_A \times \text{id}_T = \text{id}_{A \times T}$  und folglich ist  $\rho_A := \pi_A$  ein Isomorphismus. Setzt man im Diagramm des ersten Punkts für  $B = B' = T$  und  $g = \text{id}_T$  ein, so zeigt die Kommutativität, dass  $\rho$  einen natürlichen Isomorphismus  $(- \times T) \xrightarrow{\rho} \text{id}_{\mathcal{D}}$  definiert. Auf die gleiche Weise lässt sich  $\lambda$  konstruieren.

Da es genau einen Morphismus in das terminale Objekt  $T$  gibt, ist  $T \times T \xrightarrow{\lambda_T = \rho_T} T$ , so dass  $\lambda$  und  $\rho$  der Bedingung (iii) aus Definition 3.1 genügen. Bedingung (ii) schließlich folgt wieder aus der Eindeutigkeitsaussage von Produkten, da nach Konstruktion von  $\alpha$ ,  $\lambda$  und  $\rho$  alle Morphismen des Diagramms mit den Projektionen  $\pi_A$  und  $\pi_C$  vertauschen.

□

## 3.2 Monoide

In jeder monoidalen Kategorie gibt es Objekte, die sich zusammen mit einem Multiplikationsmorphismus wie gewöhnliche Monoide verhalten (nicht zuletzt sind diese selbst Monoide in der monoidalen Kategorie *Set* zusammen mit dem direkten Produkt als Bifunktor). Diese Objekte definieren eine Monoid-Kategorie über der monoidalen Basis-Kategorie. Neben den Mengen-Monoiden liefert Beispiel 3.4 weitere Beispiele dieser Monoid-Kategorien.

### Definition 3.3

Es sei  $(\mathcal{D}, \boxtimes, E, \alpha, \lambda, \rho)$  eine monoidale Kategorie.

- (i) Ein **Monoid** in  $\mathcal{D}$  ist ein Objekt  $M \in \mathcal{D}$  zusammen mit  $\mathcal{D}$ -Morphismen  $M \boxtimes M \xrightarrow{\mu_M} M$  und  $E \xrightarrow{\eta_M} M$ , so dass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccccc} M \boxtimes (M \boxtimes M) & \xrightarrow{\alpha_{M,M,M}} & (M \boxtimes M) \boxtimes M & & E \boxtimes M \xrightarrow{\eta_M \boxtimes \text{id}_M} M \boxtimes M \xleftarrow{\text{id}_M \boxtimes \eta_M} M \boxtimes E \\ \text{id}_M \boxtimes \mu_M \downarrow & & \downarrow \mu \boxtimes \text{id}_M & & \searrow \lambda_M \quad \downarrow \mu_M \quad \swarrow \rho_M \\ M \boxtimes M & \xrightarrow{\mu_M} & M & \xleftarrow{\mu_M} & M \boxtimes M \end{array}$$

- (ii) Es seien  $(M, \mu_M, \eta_M)$  und  $(N, \mu_N, \eta_N)$  zwei Monoide in  $\mathcal{D}$ . Ein  $\mathcal{D}$ -Morphismus  $M \xrightarrow{f} N$  mit  $f \circ \mu_M = \mu_N \circ (f \boxtimes f)$  und  $f \circ \eta_M = \eta_N$  heißt **Monoidhomomorphismus**.
- (iii) Es bezeichne  $\mathcal{D}\text{-Mon}$  die Kategorie der Monoide in  $\mathcal{D}$  mit den Monoidhomomorphismen aus (ii) als Homomorphismen.

Im Folgenden schreibe abkürzend auch  $M$  statt  $(M, \mu_M, \eta_M)$ . Mit  $\mu_M$  und  $\eta_M$  sind dann die dazugehörigen Morphismen gemeint.

### Beispiel 3.4

Nach Proposition 3.2 gilt:

- (i)  $(\text{Set}, \times, \{1\})$  ist monoidal und Monoide darin sind die „gewöhnlichen Monoide“. Schreibe abkürzend  $\text{Mon} = \text{Set-Mon}$ .
- (ii)  $(\text{Top}, \times, \{1\})$  ist monoidal und Monoide darin sind die topologischen Monoide. Schreibe abkürzend  $\text{TMon} = \text{Top-Mon}$ .

Weitere Beispiele für monoidale Kategorien und Monoide sind:

- (i)  $(\text{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$  ist monoidal und Monoide darin sind Ringe (mit 1), wobei  $\text{Ab}$  die Kategorie der abelschen Gruppen ist. Zum Beweis siehe (Mac72, VII.1 S. 159).
- (ii) Für jede monoidale Kategorie  $(\mathcal{D}, \boxtimes, E)$  ist  $(E, \lambda_E = \rho_E)$  in kanonischer Weise ein Monoid und heißt **triviales Monoid**.

### 3.3 $M$ -Objekte

Während Monoide das Konzept von Ringen verallgemeinern, so verallgemeinern  $M$ -Objekte das Konzept der  $R$ -Moduln. Diese sind wichtig für die Definition eines (ko-)noetherschen Monoids einer beliebigen monoidalen Kategorie in Kapitel 9.

#### Definition 3.5

Es sei  $(\mathcal{D}, \boxtimes, E, \alpha, \lambda, \rho)$  eine monoidale Kategorie und  $(M, \mu_M, \eta_M) \in \mathcal{D}\text{-Mon}$  ein Monoid.

- (i) Für ein Objekt  $X \in \mathcal{D}$  heißt ein Morphismus  $M \boxtimes X \xrightarrow{\mu_X} X$   **$M$ -Linksoperation** auf  $X$ , wenn folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 M \boxtimes (M \boxtimes X) & \xrightarrow{\alpha_{M,M,X}} & (M \boxtimes M) \boxtimes X \\
 \text{id}_M \boxtimes \mu_X \downarrow & & \downarrow \mu_M \boxtimes \text{id}_X \\
 M \boxtimes X & \xrightarrow{\mu_X} & X \xleftarrow{\mu_X} M \boxtimes X
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 E \boxtimes X & \xrightarrow{\eta_M \boxtimes \text{id}_X} & M \boxtimes X \\
 \searrow \lambda_X & & \downarrow \mu_X \\
 & & X
 \end{array}$$

Das Paar  $(X, \mu_X)$  heißt  **$M$ -Links- $\mathcal{D}$ -Objekt**.

- (ii) Für zwei  $M$ -Links- $\mathcal{D}$ -Objekte  $(X, \mu_X)$  und  $(Y, \mu_Y)$  heißt ein Morphismus  $X \xrightarrow{f} Y$   **$M$ -linkslin**ear, wenn  $f \circ \mu_X = \mu_Y \circ (\text{id}_M \boxtimes f)$  ist.
- (iii) Analog seien auch  **$M$ -Rechts- $\mathcal{D}$ -Objekte** und  **$M$ -rechtslin**ear Morphismen definiert.
- (iv) Für ein weiteres Monoid  $N \in \mathcal{D}\text{-Mon}$  und einem Objekt  $X \in \mathcal{D}$  mit einer  $M$ -Linksoperation  $\mu_X$  und einer  $N$ -Rechtsoperation  $\nu_X$  ist  $(X, \mu_X, \nu_X)$  ein  **$(M, N)$ -Bi- $\mathcal{D}$ -Objekt**, wenn folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 M \boxtimes (X \boxtimes N) & \xrightarrow{\alpha_{M,X,N}} & (M \boxtimes X) \boxtimes N \\
 \text{id}_M \boxtimes \nu_X \downarrow & & \downarrow \mu_X \boxtimes \text{id}_N \\
 M \boxtimes X & \xrightarrow{\mu_X} & X \xleftarrow{\nu_X} X \boxtimes N
 \end{array}$$

- (v) Ein  $\mathcal{D}$ -Morphismus  $X \xrightarrow{f} Y$  zwischen  $(M, N)$ -Bi- $\mathcal{D}$ -Objekten  $(X, \mu_X, \nu_X)$  und  $(Y, \mu_Y, \nu_Y)$  heißt  **$(M, N)$ -lin**ear, wenn  $f$  sowohl  $M$ -linkslinear als auch  $N$ -rechtslinear ist.

- (vi) Es bezeichne  $M\text{-}\mathcal{D}$  die Kategorie der  $M$ -Links- $\mathcal{D}$ -Objekte mit den  $M$ -linkslinearen Morphismen als Morphismen. Analog sei  $\mathcal{D}\text{-}M$  die Kategorie der  $M$ -Rechts- $\mathcal{D}$ -Objekte mit den  $M$ -rechtslinearen Morphismen als Morphismen. Ebenso ist  $M\text{-}\mathcal{D}\text{-}N$  die Kategorie der  $(M, N)$ -Biobjekte, dessen Morphismen  $(M, N)$ -lineare Morphismen sind.

Wie für Monoide verwende die abkürzende Schreibweise  $X$  statt  $(X, \mu_X)$  bzw.  $(X, \nu_X)$  bzw.  $(X, \mu_X, \nu_X)$ . Mit  $\mu_X$  ist dann jeweils die dazugehörige Links- und mit  $\nu_X$  die Rechtsoperation auf  $X$  gemeint. (vgl. (Mac72, VII.4))

### Beispiel 3.6

Die Kategorie der  $M$ -Objekte über einem Monoid  $M$  einer monoidalen Kategorie spezialisiert zu folgenden bekannten Beispielen:

- (i) Für ein Monoid  $M$  ist  $M\text{-Set}$  die Kategorie der  $M$ -**Linksmengen**.
- (ii) Für ein topologisches Monoid  $M$  ist  $M\text{-Top}$  die Kategorie der **topologischen  $M$ -Linksmengen**.
- (iii) Für einen Ring  $R$  aufgefasst als Monoid in  $(\text{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$  ist  $R\text{-Ab} = R\text{-Mod}$  die bekannte Kategorie der  **$R$ -Linksmodule** (siehe (Mac72, VII.4)).

### Definition 3.7

Für jede monoidale Kategorie  $\mathcal{D}$  und  $M \in \mathcal{D}\text{-Mon}$  ist  $(M, \mu_M, \mu_M) \in M\text{-}\mathcal{D}\text{-}M$ .

- (i) Die Unterobjekte  $[m] \in U_{M\text{-}\mathcal{D}}(M)$  heißen **Linksideale** von  $M$ .
- (ii) Die Unterobjekte  $[m] \in U_{\mathcal{D}\text{-}M}(M)$  heißen **Rechtsideale** von  $M$ .
- (iii) Die Unterobjekte  $[m] \in U_{M\text{-}\mathcal{D}\text{-}M}(M)$  heißen (**beidseitige**) **Ideale** von  $M$ .

### Bemerkung 3.8

Für die monoidale Kategorie  $(\text{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$  und einen Ring  $R \in \text{Ab}\text{-Mon}$  ist  $R\text{-Ab} = R\text{-Mod}$  eine abelsche Kategorie.

Für jede Klasse  $[m] \in U_{R\text{-Ab}}(M)$  gibt es genau einen  $R$ -Linksuntermodul  $N \leq M$ , dessen Inklusion  $N \hookrightarrow M$  diese Klasse erzeugt. Dies induziert eine ordnungserhaltende Bijektion zwischen der Menge der  $R$ -Untermoduln von  $M$  mit der Halbordnung „ $\subseteq$ “ und der halbgeordneten Menge  $U_{R\text{-Ab}}(M)$ .

Insbesondere gibt es eine ordnungserhaltende Bijektion zwischen den (Links-/Rechts-)Idealen von  $R$  aus Definition 3.7 und der Menge der klassischen Ideale von  $R$ .

### Bemerkung 3.9

Für die monoidale Kategorie  $(\text{Set}, \times, \{1\})$  sei  $M \in \text{Set}\text{-Mon}$  ein Monoid und  $X \in M\text{-Set}$  eine  $M$ -Linksmenge.

- (i) Jede Linksteilmenge  $[m] \in U_{M\text{-Set}}(X)$  von  $X$  wird als Äquivalenzklasse von der kanonischen Inklusion einer Teilmenge  $U \subseteq X$  mit  $M \cdot U = \{m \cdot u; m \in M, u \in U\} \subseteq U$  erzeugt, weshalb man diese Teilmengen auch Linksteilmengen nennt. Die Halbordnung auf  $U_{M\text{-Set}}(X)$  stimmt mit der kanonischen Inklusionshalbordnung überein.

Analoges gilt für Rechtsteilmengen und beidseitig multiplikative Teilmengen. Analog zur Idealdefinition bei Ringen werden auch die (Links-/Rechts-)Teilmengen von  $M$  als (Links-/Rechts-)Ideale von  $M$  bezeichnet.

- (ii) Jede Äquivalenzklasse  $[e] \in Q_{M\text{-Set}}(X)$  von  $X$  wird von der kanonischen  $M$ -linkslinearen Projektion  $X \rightarrow X/R$  erzeugt, wobei  $R$  eine linksmultiplikative Äquivalenzrelation auf  $X$  ist, d.h. für alle  $r, s \in X$  und  $m \in M$  folgt  $(mr)R(ms)$  aus  $rRs$ . Die Halbordnung auf  $Q_{M\text{-Set}}(X)$  stimmt mit der kanonischen Inklusionshalbordnung überein, wenn man Äquivalenzrelationen als Teilmenge von  $X \times X$  auffasst.

Analoges gilt für rechts- und beidseitig multiplikative Äquivalenzrelationen.

### 3.3.1 Limiten und Kolimiten von $M$ -Objekten

#### Satz 3.10

Es sei  $(\mathcal{D}, \boxtimes, E, \alpha, \lambda, \rho)$  eine monoidale Kategorie,  $(M, \mu_M, \eta_M) \in \mathcal{D}\text{-Mon}$  ein Monoid und  $M\text{-}\mathcal{D} \xrightarrow{U} \mathcal{D}$  der kanonische Vergissfunktorkomplex. Weiterhin sei  $I \xrightarrow{F} M\text{-}\mathcal{D}$  ein Diagramm.

- Wenn  $U \circ F$  einen Limes mit Limesdiagramm  $(\lim(U \circ F) \xrightarrow{\pi_i} U \circ F(i))_{i \in I}$  in  $\mathcal{D}$  besitzt und der Funktor  $\mathcal{D} \xrightarrow{(M \boxtimes -)} \mathcal{D}$  Limiten erhält, dann gibt es eine kanonische  $M$ -Linksoperation  $\mu_L$  auf  $\lim(U \circ F)$ , so dass  $(\lim(U \circ F), \mu_L) \xrightarrow{\pi_i} F(i)_{i \in I}$  ein Limesdiagramm von  $F$  in  $M\text{-}\mathcal{D}$  ist.
- Wenn  $U \circ F$  einen Kolimes mit Kolimesdiagramm  $(U \circ F(i) \xrightarrow{\iota_i} \text{colim}(U \circ F))_{i \in I}$  in  $\mathcal{D}$  besitzt und der Funktor  $\mathcal{D} \xrightarrow{(M \boxtimes -)} \mathcal{D}$  Kolimiten erhält, dann gibt es eine kanonische  $M$ -Linksoperation  $\mu_L$  auf  $\text{colim}(U \circ F)$ , so dass  $(F(i) \xrightarrow{\iota_i} (\text{colim}(U \circ F), \mu_L))_{i \in I}$  ein Kolimesdiagramm von  $F$  in  $M\text{-}\mathcal{D}$  ist.

Insbesondere erzeugt der Vergissfunktorkomplex  $M\text{-}\mathcal{D} \xrightarrow{U} \mathcal{D}$  (Ko-)Limiten, wenn  $M \boxtimes -$  (ko-)stetig ist.

*Beweis.* Da für alle  $f_{i,j} \in \text{Hom}_I(i, j)$  nach Voraussetzung  $F(f_{i,j})$  ein  $M$ -linkslinearer  $\mathcal{D}$ -Morphismus ist, bildet  $(\mu_{F(i)})_{i \in I}$  eine natürliche Transformation  $(M \boxtimes -) \circ U \circ F \xrightarrow{\mu_{F(-)}} U \circ F$ . Nach Voraussetzung ist  $(M \boxtimes (\lim F) \xrightarrow{M \boxtimes \pi_i} M \boxtimes F(i))_{i \in I}$  ein Limesdiagramm in  $\mathcal{D}$ , so dass man nach der universellen Eigenschaft einen eindeutigen  $\mathcal{D}$ -Morphismus  $\mu_L = \lim \mu_{F(-)}$  erhält, der für alle  $i \in I$  folgendes Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccc} M \boxtimes (\lim(U \circ F)) & \xrightarrow{\exists! \mu_L} & \lim(U \circ F) \\ \text{id}_M \boxtimes \pi_i \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ M \boxtimes (U \circ F(i)) & \xrightarrow{\mu_{F(i)}} & (U \circ F(i)) \end{array}$$

Da  $(F(i), \mu_{F(i)}) \in M\text{-}\mathcal{D}$  für alle  $i \in I$  ist, impliziert die Vertauschbarkeit von  $\lim$  und  $M \boxtimes -$  die Kommutativität der Diagramme aus (i) von Definition 3.5. Folglich ist  $(\lim F, \mu_L) \in M\text{-}\mathcal{D}$  und nach der Kommutativität des oberen Diagramms sind auch alle  $\pi_i$   $M$ -linkslinear. Bleibt zu zeigen, dass  $(\lim(U \circ F), \mu_L) \xrightarrow{\pi_i} F(i)_{i \in I}$  ein Limesdiagramm in  $M\text{-}\mathcal{D}$  ist.

Für alle Familien  $(X, \mu_X) \xrightarrow{p_i} F(i)$ , die mit den Übergangsabbildungen verträglich sind, gibt es nach der universellen Eigenschaft des Limes in  $\mathcal{D}$  ein  $p \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\lim(U \circ F), X)$ , so dass  $\pi_i \circ p = U(p_i)$  ist für alle  $i \in I$ . Wieder impliziert die Vertauschbarkeit von  $\lim$  und  $M \boxtimes -$  und die Kommutativität des linken Diagramms für alle  $i \in I$  die Kommutativität des rechten Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} M \boxtimes X & \xrightarrow{\mu_X} & X \\ \text{id}_M \boxtimes U(p_i) \downarrow & & \downarrow U(p_i) \\ M \boxtimes (U \circ F(i)) & \xrightarrow{\mu_{F(i)}} & (U \circ F(i)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M \boxtimes X & \xrightarrow{\mu_X} & X \\ \text{id}_M \boxtimes p = \lim_i (\text{id}_M \boxtimes U(p_i)) \downarrow & & \downarrow p \\ M \boxtimes (\lim(U \circ F)) & \xrightarrow{\mu_L} & \lim(U \circ F) \end{array}$$

Auf die gleiche Weise zeigt man die analoge Aussage für Kolimiten. □

### 3.3.2 Freie $M$ -Objekte

#### Proposition 3.11

Es seien  $(\mathcal{D}, \boxtimes, E)$  eine monoidale Kategorie und  $(M, \mu_M, \eta_M) \in \mathcal{D}\text{-Mon}$  ein Monoid.

(i) Es gibt einen Bifunktor

$$M\text{-}\mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow M\text{-}\mathcal{D}, \quad (L, X) \longmapsto (L \boxtimes X, \mu_{L \boxtimes X} = (\mu_L \boxtimes \text{id}_X) \circ \alpha_{M,L,X}).$$

(ii) Es gibt eine Adjunktion

$$\text{Hom}_{M\text{-}\mathcal{D}}(M \boxtimes X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, U(Y)), \quad f \longmapsto f \circ (\eta_M \boxtimes \text{id}_X) \circ \lambda_X^{-1}, \quad \mu_Y \circ (\text{id}_M \boxtimes g) \longleftarrow g,$$

wobei  $M\text{-}\mathcal{D} \xrightarrow{U} \mathcal{D}$ ,  $(X, \mu_X) \longmapsto X$  der Vergissfunktorkomplexion ist.

Aufgrund dieser Eigenschaft heißen die Objekte  $M \boxtimes X \in M\text{-}\mathcal{D}$  **freie  $M$ -Linksobjekte**. Analoge Eigenschaften gelten für  $M$ -Rechtsobjekte.

*Beweis.*

(i) Die Kommutativitätsbedingungen werden direkt von  $L$  geerbt.

(ii) Wegen (Mac72, IV.1 Satz 2 (ii)) genügt es zu zeigen, dass für alle  $X \in \mathcal{D}$

$$u_X : X \xrightarrow{\lambda_X^{-1}} E \boxtimes X \xrightarrow{\eta_M \boxtimes \text{id}_X} M \boxtimes X$$

ein universeller Pfeil von  $X$  nach  $U$  ist. Dazu seien  $Y \in \mathcal{D}\text{-}M$  und  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, U(Y))$ . Es ist zu zeigen, dass ein eindeutiges  $M$ -linkslineares  $M \boxtimes X \xrightarrow{g'} Y$  existiert mit  $g = g' \circ u_X$ . Es sei  $g' = \mu_Y \circ (\text{id}_M \boxtimes g)$ .

• Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & \eta_M \boxtimes \text{id}_X & \longrightarrow & M \boxtimes X & \xrightarrow{\text{id}_M \boxtimes g} & & & \\ & & \searrow & & \searrow & & & & \\ E \boxtimes X & \xrightarrow{\text{id}_E \boxtimes g} & E \boxtimes Y & \xrightarrow{\eta_M \boxtimes \text{id}_Y} & M \boxtimes Y & & & & \\ \lambda_X \downarrow & & \lambda_Y \downarrow & & \swarrow \mu_Y & & & & \\ X & \xrightarrow{g} & Y & & & & & & \end{array}$$

Das Quadrat links unten kommutiert, da  $\lambda$  eine natürliche Transformation ist. Der Diagrammteil darüber kommutiert, da  $\boxtimes$  ein Funktor ist. Die Kommutativität des rechten Dreiecks folgt aus der des zweiten Diagramms aus Definition 3.5 (i), da  $Y$  ein  $M$ -Linksobjekt ist. Damit kommutiert das gesamte Diagramm und es folgt

$$g = (\mu_Y \circ (\text{id}_M \boxtimes g)) \circ ((\eta_M \boxtimes \text{id}_X) \circ \lambda_X^{-1}) = g' \circ u_X$$

- Betrachte das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 M \boxtimes (M \boxtimes X) & \xrightarrow{\alpha_{M,M,X}} & (M \boxtimes M) \boxtimes X & \xleftarrow{\alpha_{M,M,X}} & M \boxtimes (M \boxtimes X) \\
 \downarrow \mu_{M \boxtimes X} & \swarrow \mu_M \boxtimes \text{id}_X & \downarrow (\text{id}_M \boxtimes \text{id}_M) \boxtimes g & & \downarrow \text{id}_M \boxtimes (\text{id}_M \boxtimes g) \\
 M \boxtimes X & & (M \boxtimes M) \boxtimes Y & \xleftarrow{\alpha_{M,M,Y}} & M \boxtimes (M \boxtimes Y) \\
 \downarrow g' & \searrow \text{id}_M \boxtimes g & \downarrow \mu_M \boxtimes \text{id}_Y & & \downarrow \text{id}_M \boxtimes \mu_Y \\
 Y & & M \boxtimes Y & & M \boxtimes Y \\
 & \xleftarrow{\mu_Y} & & & \xleftarrow{\mu_Y} \\
 & & & & \xleftarrow{\mu_Y}
 \end{array}$$

$\text{id}_M \boxtimes g'$

Das linke obere Dreieck kommutiert nach Definition von  $\mu_{M \boxtimes X}$ . Das linke untere Dreieck kommutiert nach Definition von  $g'$ . Das von diesen beiden Dreiecken eingeschlossene Dreieck kommutiert, da  $\boxtimes$  ein Funktor ist. Das Quadrat rechts oben kommutiert, da  $\alpha$  eine natürliche Transformation ist. Der rechte Teil kommutiert nach Definition von  $g'$  und da  $\boxtimes$  ein Funktor ist. Da  $Y$  ein  $M$ -Linksobjekt ist, impliziert die Kommutativität des linken Diagramms in Definition 3.5 schließlich die Kommutativität der letzten verbliebenen Fläche. Damit kommutiert das gesamte Diagramm und es gilt  $g' \circ \mu_{M \boxtimes X} = \mu_Y \boxtimes (\text{id}_M \boxtimes g')$ , so dass  $g'$   $M$ -linkslinear ist.

- Betrachte nun folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 (M \boxtimes E) \boxtimes X & \xleftarrow{\alpha_{M,E,X}} & M \boxtimes (E \boxtimes X) & \xrightarrow{\text{id}_M \boxtimes (g' \circ (\eta_M \boxtimes \text{id}_X))} & M \boxtimes Y \\
 \downarrow (\text{id}_X \boxtimes \eta_M) \boxtimes \text{id}_X & & \downarrow \text{id}_M \boxtimes (\eta_M \boxtimes \text{id}_X) & & \downarrow \mu_Y \\
 (M \boxtimes M) \boxtimes X & \xleftarrow{\alpha_{M,M,X}} & M \boxtimes (M \boxtimes X) & \xrightarrow{\text{id}_M \boxtimes g'} & M \boxtimes Y \\
 \downarrow \mu_M \boxtimes \text{id}_X & & \downarrow \mu_{M \boxtimes X} & & \downarrow \mu_Y \\
 M \boxtimes X & \xrightarrow{\text{id}_M \boxtimes \text{id}_X = \text{id}_{M \boxtimes X}} & M \boxtimes X & \xrightarrow{g'} & Y
 \end{array}$$

Da  $M$  ein Monoid ist, folgt die Kommutativität des linken Teils aus der Kommutativität des zweiten Diagramms von Definition 3.3. Das obere Quadrat in der Mitte kommutiert, da  $\alpha$  eine natürliche Transformation ist. Das Dreieck darunter kommutiert nach Definition von  $\mu_{M \boxtimes X}$ . Das Quadrat rechts unten kommutiert nach der soeben gezeigten  $M$ -Linkslinearität von  $g'$ . Das Dreieck darüber kommutiert, da  $\boxtimes$  ein Funktor ist. Damit kommutiert das gesamte Diagramm und folglich gilt

$$g' = \mu_Y \circ (\text{id}_M \boxtimes (g' \circ (\eta_M \boxtimes \text{id}_M))) \circ \alpha_{M,E,X}^{-1} \circ (\rho_M \boxtimes \text{id}_X)^{-1}.$$

Sind nun also  $g', g'' \in \text{Hom}_{M\text{-}\mathcal{D}}(M \boxtimes X, Y)$  mit  $g = g' \circ u_X = g'' \circ u_X$ . Dann impliziert dies  $g' \circ (\eta_M \boxtimes \text{id}_M) = g'' \circ (\eta_M \boxtimes \text{id}_M)$  nach Definition von  $u_X$ , da  $\lambda_X$  ein Isomorphismus ist. Aus der gerade bewiesenen Formel resultiert dann  $g' = g''$ , so dass die Eindeigkeitseigenschaft gezeigt ist.

Insgesamt ist damit  $u_X$  ein universeller Pfeil von  $X$  nach  $U$ .

□

### Korollar 3.12

Es seien  $(\mathcal{D}, \boxtimes, E)$  eine monoidale Kategorie und  $(M, \mu_M, \eta_M), (N, \mu_N, \eta_N) \in \mathcal{D}\text{-Mon}$ .



(i) Es gibt einen Funktor

$$M\text{-}\mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}\text{-}N \longrightarrow M\text{-}\mathcal{D}\text{-}N, \quad (L, X, R) \longmapsto (L \boxtimes (X \boxtimes R), \mu_{L \boxtimes (X \boxtimes R)}, \nu_{L \boxtimes (X \boxtimes R)}),$$

wobei die  $M$ - bzw.  $N$ -Operation gegeben ist durch

- $\mu_{L \boxtimes (X \boxtimes R)} = (\mu_L \boxtimes \text{id}_{X \boxtimes R}) \circ \alpha_{M, L, X \boxtimes R}$  und
- $\nu_{L \boxtimes (X \boxtimes R)} = \alpha_{L, X, R} \circ (\text{id}_{L \boxtimes X} \boxtimes \nu_R) \circ \alpha_{L \boxtimes X, R, M} \circ (\alpha_{L, X, R} \boxtimes \text{id}_M)$ .

(ii) Es gibt eine Adjunktion

$$\text{Hom}_{M\text{-}\mathcal{D}\text{-}N}(M \boxtimes (X \boxtimes N), Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, U(Y)),$$

wobei  $M\text{-}\mathcal{D}\text{-}N \xrightarrow{U} \mathcal{D}$ ,  $(X, \mu_X, \nu_X) \longmapsto X$  der Vergissfunktor ist.

Die Objekte  $M \boxtimes (X \boxtimes N) \in M\text{-}\mathcal{D}\text{-}N$  heißen dementsprechend **freie**  $(M, N)$ -**Biobjekte**.

*Beweis.*

(i) Der angegebene Funktor kann beschrieben werden als Verkettung

$$M\text{-}\mathcal{D} \times (\mathcal{D} \times \mathcal{D}\text{-}N) \longrightarrow M\text{-}\mathcal{D} \times \mathcal{D}\text{-}N \longrightarrow M\text{-}\mathcal{D}\text{-}N,$$

wobei der linke Teil das Produkt des Identitätsfunktors auf  $M\text{-}\mathcal{D}$  mit der Rechtsvariante des Funktors aus Proposition 3.11 (i) ist und der rechte Teil eine abgewandelte Form der Linksvariante ist. Nach Definition der  $M$ -Linksoperation respektiert diese die vorhandene Rechtsoperation, so dass der Funktor aus Proposition 3.11 (i) sich zu dem gewünschten Funktor erweitert.

(ii) Durch Verkettung der (gegebenenfalls modifizierten) Adjunktionen aus Proposition 3.11 erhält man mit gleicher Argumentation wie in (i) die Adjunktion

$$\text{Hom}_{M\text{-}\mathcal{D}\text{-}N}(M \boxtimes (X \boxtimes N), Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}\text{-}N}(X \boxtimes N, U_M(Y)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, U_N \circ U_M(Y)),$$

wobei  $U_M$  und  $U_N$  die Vergissfunktionen  $M\text{-}\mathcal{D}\text{-}N \xrightarrow{U_M} \mathcal{D}\text{-}N \xrightarrow{U_N} \mathcal{D}$  sind mit  $U_N \circ U_M = U$ .

□

### Bemerkung 3.13

Es seien  $(\mathcal{D}, \boxtimes, E)$  eine monoidale Kategorie,  $M, N \in \mathcal{D}\text{-}Mon$  zwei Monoide.

Jeder Monoidhomomorphismus  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{D}\text{-}Mon}(M, N)$  induziert einen treuen Funktor

$$\varphi\text{-}\mathcal{D} : N\text{-}\mathcal{D} \longrightarrow M\text{-}\mathcal{D}, \quad (X, \mu_X) \longmapsto (X, \mu_X \circ (\varphi \boxtimes \text{id}_X))$$

der folgende Eigenschaften erfüllt:

(i)  $\varphi\text{-}\mathcal{D}$  erhält Monomorphismen.

(ii)  $\text{id}_M\text{-}\mathcal{D} = \text{id}_{M\text{-}\mathcal{D}}$ .

(iii)  $(\varphi \circ \psi)\text{-}\mathcal{D} = (\psi\text{-}\mathcal{D}) \circ (\varphi\text{-}\mathcal{D})$  für alle Monoide  $L, M, N \in \mathcal{D}\text{-}Mon$  und alle Monoidhomomorphismen  $L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N$ .

Analoge Aussagen gelten für die Rechts- und Biobjekte.

*Beweis.* Nach Konstruktion ist  $\varphi\text{-}\mathcal{D}(X)$  für jedes  $X \in N\text{-}\mathcal{D}$  ein  $M$ -Linksobjekt. Ebenso ist  $\varphi\text{-}\mathcal{D}(f) = f$   $M$ -linkslinear für alle  $f \in \text{Hom}_{N\text{-}\mathcal{D}}(X, Y)$ . Es seien  $M\text{-}\mathcal{D} \xrightarrow{U_M} \mathcal{D}$  bzw.  $N\text{-}\mathcal{D} \xrightarrow{U_N} \mathcal{D}$  die treuen Vergissfunktoren. Wegen  $U_M \circ \varphi\text{-}\mathcal{D} = U_N$ , erbt  $\varphi\text{-}\mathcal{D}$  die Funktoreigenschaften von  $U_N$  und ist ebenso auch treu.

Nach Proposition 3.11 ist der Vergissfunctor  $U_N$  ein Rechtsadjungierter und vertauscht daher nach (Mac72, V.5 Satz 1) mit Limiten. Wegen (AHS06, Proposition 11.16) vertauscht  $U_N$  dann auch mit Monomorphismen. Es seien nun  $Y \xrightarrow{m} Z$  ein Monomorphismus in  $N\text{-}\mathcal{D}$  und weiterhin  $X \xrightarrow{f, g} \varphi\text{-}\mathcal{D}(Y)$  zwei Morphismen in  $M\text{-}\mathcal{D}$  mit  $(\varphi\text{-}\mathcal{D})(m) \circ f = (\varphi\text{-}\mathcal{D})(m) \circ g$ , dann impliziert dies  $U_N(m) \circ U_M(f) = U_N(m) \circ U_M(g)$  wegen der Faktorisierung  $U_M \circ \varphi\text{-}\mathcal{D} = U_N$ . Da  $U_N(m)$  monomorph ist, gilt  $U_M(f) = U_M(g)$  und damit  $f = g$ , da  $U_M$  treu ist. Dies zeigt Aussage (i). Die Eigenschaften (ii) und (iii) folgen unmittelbar aus der Definition. □

### 3.3.3 (Epi, Mono)-strukturierte Kategorien von $M$ -Objekten

#### Proposition 3.14

Es seien  $(\mathcal{D}, \boxtimes, E)$  eine monoidale Kategorie und  $(M, \mu_M, \eta_M) \in \mathcal{D}\text{-Mon}$  ein Monoid.

Falls  $\mathcal{D}$  (Epi, Mono)-strukturiert ist und der Funktor  $\mathcal{D} \xrightarrow{M\boxtimes} \mathcal{D}$  Epimorphismen erhält, dann ist auch  $M\text{-}\mathcal{D}$  (Epi, Mono)-strukturiert.

Genauer gilt: Sind  $A, B \in M\text{-}\mathcal{D}$  und  $f \in \text{Hom}_{M\text{-}\mathcal{D}}(A, B)$  mit einer (Epi, Mono)-Faktorisierung  $A \xrightarrow{e} X \xrightarrow{m} B$ , dann gibt es eine kanonische  $M$ -Linksoperation auf  $X$ , so dass  $X \in M\text{-}\mathcal{D}$  ist und  $m$  und  $e$   $M$ -linkslinear sind.

*Beweis.* Es seien  $A, B \in M\text{-}\mathcal{D}$  und  $f \in \text{Hom}_{M\text{-}\mathcal{D}}(A, B)$  und  $A \xrightarrow{e} X \xrightarrow{m} B$  wie in den Voraussetzungen. Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & M \boxtimes A & \xrightarrow{\mu_A} & A & \xrightarrow{f} & B \\
 & \downarrow \text{id}_M \boxtimes e & & \downarrow e & \nearrow m & \\
 \text{id}_M \boxtimes f & M \boxtimes X & \xrightarrow{\exists! \mu_X} & X & & \\
 & \downarrow \text{id}_M \boxtimes m & & & & \\
 & M \boxtimes B & & & & \\
 & & & & & \nearrow \mu_B
 \end{array}$$

Die linke Fläche kommutiert, da  $\boxtimes$  ein Funktor ist. Das Dreieck oben rechts kommutiert nach Definition von  $m$  und  $e$  als Faktorisierung. Die Außenwege kommutieren aufgrund der  $M$ -Linkslinearität von  $f$ . Da  $M \boxtimes -$  Epimorphismen erhält und  $e$  nach Konstruktion epimorph ist, ist auch  $\text{id}_M \boxtimes e$  epimorph. Nach der Diagonaleigenschaft von (Epi, Mono)-Faktorisierungen gibt es dann ein eindeutiges  $\mu_X$ , so dass die Kommutativität des Diagramms erhalten bleibt.

- Betrachte:

$$\begin{array}{ccccc}
 M \boxtimes (M \boxtimes A) & \xrightarrow{\alpha_{M,M,A}} & (M \boxtimes M) \boxtimes A & & \\
 \downarrow \text{id}_M \boxtimes (\text{id}_M \boxtimes e) & \searrow \text{id}_M \boxtimes \mu_A & \downarrow \mu_M \boxtimes \text{id}_A & & \\
 & M \boxtimes A & \xrightarrow{\mu_A} & A & \xleftarrow{\mu_A} & M \boxtimes A \\
 & \downarrow \text{id}_M \boxtimes e & \downarrow e & & \downarrow \text{id}_M \boxtimes e & \\
 M \boxtimes (M \boxtimes X) & \xrightarrow{\alpha_{M,M,X}} & (M \boxtimes M) \boxtimes X & & \\
 \downarrow \text{id}_M \boxtimes (\text{id}_M \boxtimes e) & \searrow \text{id}_M \boxtimes \mu_X & \downarrow \mu_M \boxtimes \text{id}_X & & \\
 & M \boxtimes X & \xrightarrow{\mu_X} & X & \xleftarrow{\mu_X} & M \boxtimes X
 \end{array}$$

Die Oberseite kommutiert nach Definition 3.5 (i), da  $A \in M\text{-}\mathcal{D}$ . Alle Seitenflächen kommutieren nach Definition von  $\mu_X$  (siehe erstes Diagramm) bzw. da  $\boxtimes$  ein Funktor ist. Da  $\text{id}_M \boxtimes (\text{id}_M \boxtimes e)$  nach Voraussetzung epimorph ist, kommutiert auch die Unterseite.

- Betrachte:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \lambda_A & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 E \boxtimes A & \xrightarrow{\eta_M \boxtimes \text{id}_A} & M \boxtimes A & \xrightarrow{\mu_A} & A \\
 \downarrow \text{id}_E \boxtimes e & & \downarrow \text{id}_M \boxtimes e & & \downarrow e \\
 E \boxtimes X & \xrightarrow{\eta_M \boxtimes \text{id}_X} & M \boxtimes X & \xrightarrow{\mu_X} & X \\
 & & \lambda_X & & \\
 & & \curvearrowleft & & 
 \end{array}$$

Die äußeren Wege kommutieren aufgrund der Natürlichkeit von  $\lambda$ . Der obere Teil kommutiert nach Diagramm (ii) von Definition 3.5 (i). Das linke Quadrat kommutiert, da  $\boxtimes$  ein Funktor ist. Das rechte Quadrat kommutiert per Definition von  $\mu_X$ . Damit kommutiert auch der untere Teil.

Insgesamt ist also  $(X, \mu_X) \in M\text{-}\mathcal{D}$ . □

### 3.4 Freie Monoide

Eine wichtige Klasse von Monoiden bilden die freien Monoide einer monoidalen Kategorie, die einerseits die freien (Mengen-)Monoide, andererseits aber auch Tensoralgebren eines  $R$ -Moduls über einem Ring  $R$  verallgemeinern. Später wird gezeigt, dass die Kategorie der lokal proendlichen Monoide freie Monoide besitzt, die den freien Monoiden als Mengen entsprechen, aber eine kanonische lokal proendliche Topologie tragen. In Bezug auf vollständige Monoidringe ist man in erster Linie an eigentlichen Monoiden interessiert. Man wird sehen, dass freie Monoide erzeugt von lokal proendlichen Räumen auch eigentlich sind.

#### Satz 3.15

Es seien  $(\mathcal{D}, \boxtimes, E)$  eine monoidale Kategorie und  $(M, \mu_M, \eta_M) \in \mathcal{D}\text{-Mon}$  ein Monoid mit den Eigenschaften:

- (i)  $\mathcal{D}$  besitzt abzählbare Koproducte.

(ii) Für alle  $X \in \mathcal{D}$  vertauschen die Funktoren  $X \boxtimes -$  und  $- \boxtimes X$  mit Koproducten.

Dann gibt es eine Adjunktion  $\text{Hom}_{\mathcal{D}\text{-Mon}}(F(X), M) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, U(M))$  mit dem **freien Monoid**  $F(X) = \coprod_{k \geq 0} X^k$  mit  $X^0 = E$  und  $X^{k+1} = (X^k) \boxtimes X$  für  $X \in \mathcal{D}$ .

*Beweis.* (Mac72, VII.3 Satz 2).

□

# Kapitel 4

## Monoidring-Konstruktionen

Zunächst wird in diesem Kapitel die algebraische Theorie erarbeitet, die dem Konzept des topologischen bzw. vollständigen (Schief-)Monoidrings zu Grunde liegt.

### 4.1 Monoidringe

#### Definition 4.1

Es sei  $R$  ein Ring (mit 1) und  $M$  ein (gewöhnliches) Monoid. Der **Monoidring**  $R[M]$  von  $M$  mit Koeffizienten in  $R$  ist definiert als der freie  $R$ -Linksmodul

$$R^{(M)} = \bigoplus_{m \in M} R \cdot m$$

mit der Multiplikation definiert durch die additive Fortsetzung von  $(r \cdot m) \cdot (s \cdot n) = (rs) \cdot (mn)$  für  $r, s \in R$  und  $m, n \in M$ .

#### Beispiel 4.2

Der Monoidring spezialisiert zu folgenden bekannten Konstruktionen:

- (i) Für  $M = \langle t \rangle \cong (\mathbb{N}_0, +)$  ist  $R[M] = R[t]$  der **Polynomring** über  $R$ .
- (ii) Falls  $G$  eine Gruppe ist, dann nennt man  $R[G]$  auch den **Gruppenring** von  $G$  mit Koeffizienten in  $R$ .

#### Bemerkung 4.3

Man hat eine kanonische Einbettung von  $R$  in  $R[M]$  via  $\iota_R(r) = r \cdot 1_M$  für  $r \in R$  und eine kanonische Einbettung von  $M$  in  $R[M]$  via  $\iota_M(m) = 1_R \cdot m$  für  $m \in M$ , so dass man sich  $R[M]$  als Ringerweiterung von  $R$  mit den Elementen aus  $M$  vorstellen kann, bei der die Multiplikation von Monoidelementen durch die Monoidmultiplikation gegeben ist und alle  $r \in R$  mit  $m \in M$  vertauschen.

Außerdem ist  $R[M]$  durch diese Einbettungen auch ein freier  $R$ -Rechtsmodul mit  $M$  als Basis.

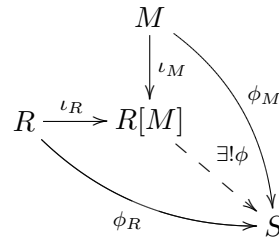
#### 4.1.1 Die universelle Eigenschaft

#### Bemerkung 4.4

Der Monoidring über  $M$  mit Koeffizienten in  $R$  erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Für alle Ringe  $S$ ,  $\phi_R \in \text{Hom}_{\text{Ring}}(R, S)$  und  $\phi_M \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, (S, \cdot))$  mit

$$\phi_R(r) \cdot \phi_M(m) = \phi_M(m) \cdot \phi_R(r)$$

für alle  $r \in R$  und  $m \in M$  existiert genau ein  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{R}ing}(R[M], S)$ , so dass



kommutiert.

*Beweis.* Durch  $\phi_R$  wird  $S$  zum  $R$ -Linksmodul. Nach der universellen Abbildungseigenschaft des freien  $R$ -Linksmoduls, existiert genau ein  $R$ -Linksmodulhomomorphismus  $\phi : R^{(M)} \rightarrow S$ , so dass  $\phi \circ \iota_M = \phi_M$  gilt. Wegen der Kommutativitätsbedingung ist  $\phi$  ein Ringhomomorphismus.

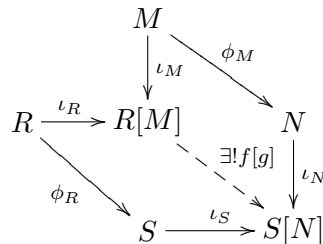
□

**Korollar 4.5**

Man erhält einen Funktor

$$\text{Ring} \times \text{Mon} \rightarrow \text{Ring}, \quad (R, M) \mapsto R[M],$$

der jedem Paar  $(f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{R}ing}(R, S) \times \text{Hom}_{\mathcal{M}on}(M, N)$  für  $R, S \in \text{Ring}$  und  $M, N \in \text{Mon}$  den nach Bemerkung 4.4 eindeutigen Ringhomomorphismus  $R[M] \xrightarrow{f[g]} S[N]$  zuordnet:



**Korollar 4.6**

Für ein festes  $R \in \text{Ring}$  erhält man den Funktor:

$$\text{Mon} \rightarrow \text{Ring}, \quad (R, M) \mapsto R[M], \quad \text{Hom}_{\mathcal{M}on}(M, N) \ni f \mapsto R[f]$$

**Korollar 4.7**

Zusammen mit dem kanonischen Vergissfunktor  $\text{Ring} \xrightarrow{U} \text{Mon}$ , der jedem Ring sein unterliegendes multiplikatives Monoid  $(R, \cdot)$  zuordnet, induziert der Monoidring über  $\mathbb{Z}$  eine Adjunktion  $\text{Hom}_{\mathcal{R}ing}(\mathbb{Z}[M], R) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}on}(M, U(R))$  mit der kanonischen Injektion  $\iota_M : M \hookrightarrow (\mathbb{Z}[M], \cdot)$  als Einheit.

*Beweis.* Es ist  $U$  ein Funktor. Für alle  $M \in \text{Mon}$  gibt es das Objekt  $\mathbb{Z}[M]$  und wegen Korollar 4.4 ist  $\iota_M$  ein universeller Pfeil von  $M$  nach  $U$ . Mit (Mac72, IV.1 Satz 2 (ii)) folgt dann die Behauptung.

□

**Definition 4.8**

Es seien  $\mathcal{D}$  eine Kategorie und  $D \in \mathcal{D}$  ein Objekt. Dann ist  $D \downarrow \mathcal{D}$  die Kategorie der **Objekte unter  $D$** , deren Objekte Paare  $(E, f)$  mit  $E \in \mathcal{D}$  und  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, E)$  sind und deren Homomorphismen  $(E, f) \xrightarrow{h} (E', f')$  die  $\mathcal{D}$ -Morphismen  $E \xrightarrow{h} E'$  sind mit  $h \circ f = f'$  (vgl. (Mac72, II.6)).

**Korollar 4.9**

Es sei  $R \in \text{Ring}$  ein Ring und  $(R \downarrow \text{Ring})$  die Kategorie der Ringe unter  $R$  (für kommutative  $R$  ist dies die Kategorie der  $R$ -Algebren).

Dann induziert der Monoidring über  $R$  mit dem Vergissfunktor  $(R \downarrow \text{Ring}) \xrightarrow{U} \text{Mon}$ , der jedem Objekt  $(S, f)$  in  $(R \downarrow \text{Ring})$  das unterliegende multiplikative Monoid  $(S, \cdot)$  zuordnet, eine Adjunktion  $\text{Hom}_{\text{Ring}}(R[M], R) \cong \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, U(R))$  mit der Injektion  $\iota_M : M \hookrightarrow (R[M], \cdot)$  als Einheit.

*Beweis.* Siehe Korollar 4.7. □

## 4.2 Schiefmonoidringe

Nun wird der Begriff des Schiefmonoidrings eingeführt. Er verallgemeinert den Begriff des Monoidrings und ist im Falle einer Gruppe vom Allgemeingrad zwischen dem Begriff des Smash-Products (vgl. (MR01, I.1.5.4)) und des Crossed-Products (vgl. (MR01, I.1.5.8)) einzuordnen. Per Definition umfasst das Konzept des Schiefmonoidrings über einer Gruppe alle Crossed-Produkte, in denen die Multiplikation der beinhaltenden Gruppenelemente mit der Gruppenmultiplikation übereinstimmt. Ein allgemeines Crossed-Produkt enthält die Gruppe nur als Menge.

**Definition 4.10**

Es sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein Monoid. Eine Verknüpfung

$$* : R^{(M)} \times R^{(M)} \longrightarrow R^{(M)}, \quad (x, y) \longmapsto x * y$$

mit den Eigenschaften

- (i)  $r * (s * x) = (rs) * x$  für alle  $r, s \in R$  und  $x \in R^{(M)}$  und
- (ii)  $(x * m) * n = x * (mn)$  für alle  $m, n \in M$  und  $x \in R^{(M)}$

heißt **Schiefmonoidringmultiplikation** auf  $R^{(M)}$ , wenn  $(R^{(M)}, +, *)$  ein Ring ist. Hierbei sei  $R$  wiederum durch  $\iota_R$  in  $R^{(M)}$  eingebettet (vgl. Bemerkung 4.3). Man nennt diesen Ring **Schiefmonoidring** von  $M$  mit Koeffizienten in  $R$ .

### 4.2.1 Assoziierte Monoidhomomorphismen

In diesem Abschnitt werden alle möglichen Schiefmonoidringe eines Monoids  $M$  über einem Ring  $R$  durch gewisse assoziierte Monoidhomomorphismen klassifiziert, die die Schiefmonoidringstruktur vollständig beschreiben. Diese Monoidhomomorphismen spielen später für die Angabe von Existenzkriterien für topologische Schiefmonoidringe eine wichtige Rolle.

**Bemerkung 4.11**

Es sei  $\text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)$  der Ring der additiven Gruppenendomorphismen auf dem Ring  $R$ . Durch

$$R \hookrightarrow \text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R), \quad r \mapsto \lambda_r$$

kann  $R$  als Teilring von  $\text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)$  bzw.  $\text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)$  als  $R$ -Algebra aufgefasst werden.  $\lambda_r$  bezeichne hierbei die Linksmultiplikation mit dem Element  $r$ .

**Proposition 4.12**

Es sei  $M$  ein Monoid und  $R$  ein Ring. Jede Schiefmonoidringmultiplikation „ $*$ “ auf  $R^{(M)}$  induziert einen  $R$ -linearen Ringhomomorphismus

$$\phi : (R^{(M)}, +, *) \longrightarrow \text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)[M], \quad x \mapsto \sum_{m \in M} (\pi_m \circ \lambda_x \circ \iota_R) \cdot m,$$

wobei  $R^{(M)} \xrightarrow{\pi_m} R$  die Projektion auf die  $m$ -te Koordinate,  $\lambda_x$  die Linksmultiplikation mit  $x \in R^{(M)}$  und  $R \xrightarrow{\iota_R} R^{(M)}$  die kanonische Einbettung aus Bemerkung 4.3 ist.

*Beweis.* Die Additivität von  $\phi$  gilt nach Definition von  $\lambda_x$  und der Additivität von  $\pi_m$ . Mittels der kanonischen Einbettung

$$\text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)[M] \hookrightarrow \text{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R, R[M]), \quad \sum_{m \in M} \alpha_m m \mapsto \left[ r \mapsto \sum_{m \in M} \alpha_m(r) \cdot m \right]$$

ist dann für  $x, y \in R^{(M)}$  und  $r \in R$

$$\phi(x)(r) = \sum_{m \in M} (\pi_m \circ \lambda_x \circ \iota_R)(r) \cdot m = \sum_{m \in M} \pi_m(x * r) \cdot m = x * r.$$

Mit  $\phi(r) = \lambda_r$  folgt nach Definition der Multiplikation auf  $\text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)$

$$\phi(x * y)(r) = (x * y) * r = x * (y * r) = \phi(x)(\phi(y)(r)) = (\phi(x) \cdot \phi(y))(r)$$

und außerdem die  $R$ -Linearität von  $\phi$ . □

**Korollar 4.13**

Jede Schiefmonoidringmultiplikation „ $*$ “ auf  $R^{(M)}$  induziert einen Monoidhomomorphismus

$$\theta_* : M \longrightarrow (\text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)[M], \cdot), \quad m \mapsto \phi \circ \iota_M(m).$$

**Satz 4.14**

Es sei  $\theta \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, (\text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)[M], \cdot))$  ein Monoidhomomorphismus.

Über die Einbettung  $\text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)[M] \hookrightarrow \text{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R, R[M])$  induziert  $\theta$  eine Abbildung

$$M \times R \longrightarrow R^{(M)}, \quad (m, r) \mapsto m *_\theta r = \theta(m)(r),$$

die sich eindeutig  $R$ -linkslinier und  $M$ -rechtslinear zu einer Verknüpfung  $R^{(M)} \times R^{(M)} \xrightarrow{*_\theta} R^{(M)}$  fortsetzt. Ferner gilt:

- (i)  $r *_\theta s = rs$  für  $r, s \in R$ .



(ii)  $m *_{\theta} n = mn$  für  $m, n \in M$ .

Dann und nur dann, wenn  $m *_{\theta} (rs) = (m *_{\theta} r) *_{\theta} s$ , für alle  $m \in M$  und  $r \in R$ , ist  $*_{\theta}$  eine Schiefmonoidringmultiplikation.

*Beweis.* Da  $R^{(M)}$  der freie  $R$ -Linksmodul ist, auf dem es eine kanonische  $M$ -Rechtsoperation gibt, kann  $*_{\theta}$  unter den Linearitätsbedingungen auf genau eine Weise definiert werden. Die Verknüpfung  $*_{\theta}$  ist nach Konstruktion distributiv. Die Assoziativität der Multiplikation eingeschränkt auf  $R$  bzw.  $M$  wird wegen (i) und (ii) von den Multiplikationen auf  $R$  bzw.  $M$  geerbt. Weiterhin gilt für alle  $m, n \in M$  und  $r \in R$ , dass  $(m *_{\theta} n) *_{\theta} r = m *_{\theta} (n *_{\theta} r)$ , da  $\theta$  ein Monoidhomomorphismus ist. Daher ist  $*_{\theta}$  genau dann assoziativ und damit eine Ringmultiplikation, wenn die geforderte Bedingung erfüllt ist. □

### Korollar 4.15

Die Zuordnungen  $* \mapsto \theta_*$  aus Korollar 4.13 und  $\theta \mapsto *_{\theta}$  aus Satz 4.14 bilden eine Bijektion zwischen der Menge aller Schiefmonoidringmultiplikationen auf  $R^{(M)}$  und der Menge aller Monoidhomomorphismen  $\theta \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, (\text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)[M], \cdot))$ , für die  $m *_{\theta} (rs) = (m *_{\theta} r) *_{\theta} s$  ist für alle  $m \in M, r, s \in R$ .

### Definition 4.16

Für jeden solchen Monoidhomomorphismus  $\theta$  bezeichne mit  $R[M; \theta]$  den dazu **assozierten Schiefmonoidring** von  $M$  mit Koeffizienten in  $R$ .

## 4.2.2 Beispiele

### Definition 4.17

Es seien  $R$  ein Ring und  $\sigma \in \text{End}_{\text{Ring}}(R)$  ein Ringendomorphismus. Ein  $\delta \in \text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)$  heißt  **$\sigma$ -Derivation**, falls  $\delta(ab) = \delta(a)b + \sigma(a)\delta(b)$  für alle  $a, b \in R$ .

### Proposition 4.18

Es seien  $R$  ein Ring,  $M$  ein Monoid mit einer erzeugenden Teilmenge  $N \subseteq M$  und

$$\theta : M \longrightarrow (\text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)[M], \cdot), \quad n \longmapsto \sigma_n \cdot n + \delta_n \quad \text{für } n \in N$$

ein Monoidhomomorphismus, wobei  $\sigma_n \in \text{End}_{\text{Ring}}(R)$  ein Ringendomorphismus und  $\delta_n$  eine  $\sigma_n$ -Derivation ist für alle  $n \in N$ .

Dann ist  $R[M; \theta]$  ein Schiefmonoidring.

*Beweis.* Nach Definition eines Ringendomorphismus bzw. einer Derivation gilt für  $n \in N$  und  $r, s \in R$ , dass

$$\begin{aligned} (n *_{\theta} r) *_{\theta} s &= \theta(n)(r) *_{\theta} s = (\sigma_n(r) \cdot n + \delta_n(r)) *_{\theta} s = \sigma_n(r) \cdot n *_{\theta} s + \delta_n(r)s \\ &= \sigma_n(r)\sigma_n(s) \cdot n + \sigma_n(r)\delta_n(s) + \delta_n(r)s = \sigma_n(rs) \cdot n + \delta_n(rs) = \theta(n)(rs). \end{aligned}$$

Da  $N \subseteq M$  eine erzeugende Teilmenge ist, gilt bereits  $(m *_{\theta} r) *_{\theta} s = m *_{\theta} (rs)$  für alle  $m \in M$  und  $r, s \in R$ . Mit Satz 4.14 folgt dann die Behauptung. □

### Beispiel 4.19

Es sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein Monoid.

- (i) Ist  $M = \langle t \rangle$  der freie einfach erzeugte Monoid,  $\sigma \in \text{End}_{\mathcal{R}ing}(R)$  ein Ringendomorphismus und  $\delta$  eine  $\sigma$ -Derivation, dann definiert

$$\theta_{\sigma, \delta} : M \longrightarrow \text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)[M], \quad t \longmapsto \sigma \cdot t + \delta$$

einen Monoidhomomorphismus und induziert wegen Proposition 4.18 eine Ringmultiplikation auf  $R^{(M)}$ . Die  $R$ -Algebra  $R[t; \sigma, \delta] = R[M; \theta_{\sigma, \delta}]$  heißt dann **Schiefpolynomring** (vgl. (MR01, I.1.2)).

- (ii) Ist  $G$  eine Gruppe und

$$\theta : G \longrightarrow \text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)[G], \quad g \longmapsto \sigma_g \cdot g$$

ein Monoidhomomorphismus, wobei  $\sigma_g \in \text{Aut}(R)$  für alle  $g \in G$  Ringautomorphismen sind, dann induziert  $\theta$  wiederum wegen Proposition 4.18 eine Ringmultiplikation auf  $R^{(G)}$  und man nennt die  $R$ -Algebra  $R\sharp G = R[G; \theta]$  **Schiefgruppenring** oder **Smash Produkt** von  $R$  und  $G$  (vgl. (MR01, I.1.5)).

### 4.2.3 Innerer und äußerer Koeffizientenring

Der zu einem Schiefmonoidring assoziierte Monoidhomomorphismus  $\theta$  suggeriert die Begriffe des inneren und äußeren Koeffizientenrings, deren Differenzen zum „eentlichen“ Koeffizientenring die Komplexität des Schiefmonoidrings messen. Im Falle des gewöhnlichen Monoidrings stimmen alle drei Koeffizientenringe überein. Im Fall topologischer und vollständiger Schiefmonoidringe wird später eine vom Koeffizientenring induzierte Topologie auf dem äußeren Koeffizientenring eingeführt. Die Stetigkeit des assoziierten Monoidhomomorphismus wird dann eine Bedingung des Existenzkriteriums für topologische und damit auch vollständige Schiefmonoidringe sein.

#### Proposition 4.20

Jeder Schiefmonoidring  $R[M; \theta]$  über einem Ring  $R$  induziert einen Teilring

$$\begin{aligned} R_\theta &= \{r \in R; m *_\theta r = r *_\theta m \quad \forall m \in M\} \\ &= \bigcap_{m \in M} \left( \ker(\pi_m(\theta(m)) - \text{id}_R) \cap \left( \bigcap_{m \neq n \in M} \ker \pi_n(\theta(m)) \right) \right), \end{aligned}$$

wobei  $\text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)[M] \cong \text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)^{(M)} \xrightarrow{\pi_m} \text{End}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(R)$  die Projektion auf die Koordinate  $m \in M$  ist.

Insbesondere ist also  $\theta(M) \subseteq \text{End}_{\text{Mod-}R_\theta}(R)[M]$ .

*Beweis.* Nach Definition von  $*_\theta$  ist  $m *_\theta r = \theta(m)(r)$  für  $r \in R$  und  $m \in M$ , so dass gilt

$$m *_\theta r = r *_\theta m \iff \theta(m)(r) = r \cdot m,$$

womit gezeigt ist, dass beide Beschreibungen von  $R_\theta$  übereinstimmen. Falls  $r, s \in R_\theta$ , dann gilt nach Definition von  $*_\theta$  (siehe Satz 4.14):

- Wegen  $m *_\theta (rs) = (m *_\theta r) *_\theta s = (r *_\theta m) *_\theta s = \dots = (rs) *_\theta m$  ist auch  $rs \in R_\theta$ .
- Mit  $m *_\theta (r + s) = m *_\theta r + m *_\theta s = r *_\theta m + s *_\theta m = (r + s) *_\theta m$  ist auch  $r + s \in R_\theta$ .

Insgesamt ist also  $R_\theta$  ein Teilring von  $R$ . □

**Definition 4.21**

Anschaulich sind die Ringe  $R_\theta$  und  $E_\theta = \text{End}_{\text{Mod-}R_\theta}(R)$  ein Maßstab dafür, „wie trivial“  $\theta$  ist. Im Allgemeinen ist  $R_\theta \subseteq R \subseteq E_\theta$ . Falls  $\theta = \iota_M$ , d.h.  $\theta(m) = \text{id}_R \cdot m$  für alle  $m \in M$  gilt, dann ist  $R_\theta = R = E_\theta$  und  $R[M; \theta] = R[M]$ . Der Ring  $R_\theta$  werde im folgenden als der **innere Koeffizientenring** und  $E_\theta$  als der **äußere Koeffizientenring** des Schiefmonoidrings  $R[M; \theta]$  bezeichnet.

**4.2.4 Die universelle Eigenschaft**

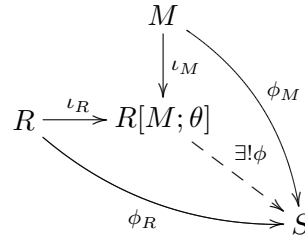
Analog zur universellen Eigenschaft des Monoidrings erhält man auch eine Abbildungseigenschaft für Schiefmonoidringe.

**Bemerkung 4.22**

Jeder Schiefmonoidring  $R[M; \theta]$  erfüllt folgende universelle Eigenschaft:  
Für alle Ringe  $S$ ,  $\phi_R \in \text{Hom}_{\mathcal{R}ing}(R, S)$  und  $\phi_M \in \text{Hom}_{\mathcal{M}on}(M, (S, \cdot))$  mit

$$\phi_M(n) \cdot \phi_R(r) = \sum_{m \in M} \phi_R \circ \pi_m(n *_\theta r) \cdot \phi_M(m)$$

für alle  $r \in R$  und  $n \in M$  existiert genau ein  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{R}ing}(R[M; \theta], S)$ , so dass nachfolgendes Diagramm kommutiert.



*Beweis.* Wie in Bemerkung 4.4 sieht man, dass  $\phi$  die  $R$ -linkslineare Fortsetzung von  $\phi_M$  ist. □

**Korollar 4.23**

Es sei  $R[M; \theta]$  ein Schiefmonoidring eines Monoids  $M$  über einem Ring  $R$ .

- (i) Ist  $\sigma \in \text{Aut}_{\mathcal{M}on}(M)$  ein Monoidautomorphismus auf  $M$ , dann ist  $R[M; E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1}]$  ein Schiefmonoidring, welcher über  $R[\sigma]$  zu  $R[M; \theta]$  isomorph ist.

Hierbei bezeichne  $E_\theta[\sigma]$  bzw.  $R[\sigma]$  den von  $\sigma$  induzierten Ringendomorphismus  $E_\theta[\sigma] \in \text{End}_{\mathcal{R}ing}(E_\theta[M])$  bzw.  $R[\sigma] \in \text{End}_{\mathcal{R}ing}(R[M])$  (vgl. Korollar 4.6).

- (ii) Ist  $\tau \in \text{Aut}_{\mathcal{R}ing}(R)$  ein Ringautomorphismus auf  $R$ , dann definiert

$$\tau \theta : M \longrightarrow \text{End}_{\text{Mod-}Z}(R)[M], \quad m \longmapsto \tau \cdot \theta(m) \cdot \tau^{-1}$$

einen Schiefmonoidring  $R[M; \tau \theta]$ , welcher über die  $M$ -rechtslineare Fortsetzung  $\bar{\tau} \in \text{End}_{\text{Mod-}Z}(R^{(M)})$  von  $\tau$  zu  $R[M; \theta]$  isomorph ist.

*Beweis.*

(i) Es seien  $m \in M$  und  $r, s \in R$ . Zunächst gilt

$$m *_{E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1}} r = (E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1})(m)(r) = R[\sigma](\theta \circ \sigma^{-1}(m)(r)) = R[\sigma](\sigma^{-1}(m) *_\theta r)$$

und folglich ist

$$\begin{aligned} m *_{E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1}}(rs) &= R[\sigma](\sigma^{-1}(m) *_\theta(rs)) = R[\sigma](\sigma^{-1}(m) *_\theta r *_\theta s) \\ &= R[\sigma]\left(\sum_{n \in M} \pi_n(\sigma^{-1}(m) *_\theta r) \cdot (n *_\theta s)\right) \\ &= \sum_{n \in M} \pi_{\sigma^{-1}(n)}(\sigma^{-1}(m) *_\theta r) \cdot R[\sigma](\sigma^{-1}(n) *_\theta s) \\ &= \sum_{n \in M} \pi_n \circ R[\sigma](\sigma^{-1}(m) *_\theta r) \cdot (n *_{E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1}} s) \\ &= (m *_{E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1}} r) *_{E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1}} s. \end{aligned}$$

Außerdem ist  $E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1}$  ein Monoidhomomorphismus, so dass  $R[M; E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1}]$  nach Satz 4.14 ein Schiefmonoidring ist. Für alle  $r \in R$  und  $m \in M$  ist außerdem

$$\begin{aligned} (\iota_M \circ \sigma)(m) *_{E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1}} (\iota_R \circ \text{id}_R)(r) &= \sigma(m) *_{E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1}} r = R[\sigma](m *_\theta r) \\ &= \sum_{n \in M} \pi_n(m *_\theta r) \cdot \sigma(n) \\ &= \sum_{n \in M} (\iota_R \circ \text{id}_R)(\pi_n(m *_\theta r)) \cdot (\iota_M \circ \sigma)(n), \end{aligned}$$

so dass nach der universellen Eigenschaft des Schiefmonoidrings (vgl. Bemerkung 4.22) ein eindeutiger Ringhomomorphismus  $\phi$  existiert, der folgendes Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \downarrow \iota_M & \searrow \sigma & \\ R & \xrightarrow{\iota_R} & R[M; \theta] & & M \\ & \searrow \text{id}_R & \dashrightarrow \phi & & \downarrow \iota_M \\ & & R & \xrightarrow{\iota_R} & R[M; E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1}] \end{array}$$

Als  $R$ -lineare Fortsetzung von  $\sigma$  ist  $\phi = R[\sigma]$  ein Isomorphismus von  $R$ -Moduln und daher auch ein Ringisomorphismus.

(ii) Für  $m \in M$  und  $r, s \in R$  ist wiederum

$$\begin{aligned} m *_{\tau_\theta}(rs) &= \bar{\tau}(m *_\theta \tau^{-1}(rs)) = \bar{\tau}((m *_\theta \tau^{-1}(r)) *_\theta \tau^{-1}(s)) \\ &= \bar{\tau}\left(\sum_{n \in M} \pi_n(m *_\theta \tau^{-1}(r)) \cdot (n *_\theta \tau^{-1}(s))\right) \\ &= \sum_{n \in M} \pi_n(\bar{\tau}(m *_\theta \tau^{-1}(r))) \cdot \bar{\tau}(n *_\theta \tau^{-1}(s)) \\ &= \sum_{n \in M} \pi_n(m *_{\tau_\theta} r) \cdot (n *_{\tau_\theta} s) = (m *_{\tau_\theta} s) *_{\tau_\theta} s. \end{aligned}$$

Da  $\tau\theta$  ein Monoidhomomorphismus ist, ist wieder  $R[M; \tau\theta]$  nach Satz 4.14 ein Schiefmonoidring.

Für alle  $r \in R$  und  $m \in M$  gilt

$$m *_{\tau\theta} \tau(r) = \sum_{n \in M} \pi_n(\bar{\tau} \circ \theta(m)(r)) \cdot n = \sum_{n \in M} \tau \circ \pi_n(m *_{\theta} r) \cdot n$$

und man erhält wie in (i) den gewünschten Ringisomorphismus  $\bar{\tau}$ . □

Wichtig für den Beweis des Existenzkriteriums topologischer Schiefmonoidringe ist folgendes Lemma.

**Lemma 4.24**

Es sei  $R$  ein Ring,  $M \xrightarrow{\varphi} N$  ein Monoidhomomorphismus und  $R[M; \theta]$  ein Schiefmonoidring. Dann induziert die  $R$ -linkslinere Fortsetzung  $R^{(\varphi)} : R^{(M)} \rightarrow R^{(N)}$  via

$$R[M; \theta] \times R[N] \rightarrow R[N], \quad (a, x) \mapsto \sum_{n \in N} R^{(\varphi)}(a *_{\theta} \pi_n(x)) \cdot n$$

eine  $R[M; \theta]$ -Linksmodulstruktur auf  $R[N]$ , so dass  $R[M; \theta] \xrightarrow{R^{(\varphi)}} R[N]$  zu einer  $R[M; \theta]$ -linkslinieren Abbildung wird.

*Beweis.* Zunächst ist  $R^{(\varphi)}$  additiv und damit gelten die Distributivgesetze für die Verknüpfung „\*“. Für alle  $a, b \in R[M; \theta]$  und  $n \in N$  ist

$$\pi_n(R^{(\varphi)}(b)) = \sum_{\substack{m \in M \\ \varphi(m)=n}} \pi_m(b)$$

und folglich

$$\begin{aligned} a * R^{(\varphi)}(b) &= \sum_{n \in N} R^{(\varphi)}(a *_{\theta} \sum_{\substack{m \in M \\ \varphi(m)=n}} \pi_m(b)) \cdot n = \sum_{n \in N} \sum_{\substack{m \in M \\ \varphi(m)=n}} R^{(\varphi)}(a *_{\theta} \pi_m(b)) \cdot n \\ &= \sum_{m \in M} R^{(\varphi)}(a *_{\theta} \pi_m(b)) \cdot \varphi(m) = R^{(\varphi)}(a *_{\theta} b). \end{aligned}$$

Wenn „\*“ also eine Linksmodulstruktur definiert, dann ist  $R^{(\varphi)}$  ein Linksmodulhomomorphismus. Aber das gerade Gezeigte impliziert für alle  $x \in R[N]$

$$\begin{aligned} (a *_{\theta} b) * x &= \sum_{n \in N} R^{(\varphi)}((a *_{\theta} b) *_{\theta} \pi_n(x)) \cdot n = \sum_{n \in N} R^{(\varphi)}(a *_{\theta} (b *_{\theta} \pi_n(x))) \cdot n \\ &= \sum_{n \in N} a * R^{(\varphi)}(b *_{\theta} \pi_n(x)) \cdot n = a * (b * x). \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$1 * x = \sum_{n \in N} R^{(\varphi)}(1 *_{\theta} \pi_n(x)) \cdot n = \sum_{n \in N} R^{(\varphi)}(\pi_n(x)) \cdot n = x,$$

so dass „\*“ tatsächlich eine Modulverknüpfung ist. □

### 4.3 Zusammenhang mit dem semidirekten Produkt

Während man den Monoidring als Erweiterung des Koeffizientenrings mit Elementen eines Monoids auffassen kann, so kann man sich das direkte Produkt zweier Monoide als Erweiterung des einen Monoids mit Elementen des anderen vorstellen. So wie der Schiefmonoidring das Konzept des Monoidrings verallgemeinert, so verallgemeinert in analoger Weise auch das Konzept des semidirekten Produkts zweier Monoide das Konzept des direkten Produkts. Da der Monoidring als Linksadjungierter Funktor (siehe Korollar 4.7 bzw. Korollar 4.9) mit Produkten von Monoiden vertauscht, liegt die Vermutung nahe, dass der Schiefmonoidring mit semidirekten „vertauscht“. Dies wird in diesem Abschnitt gezeigt.

#### 4.3.1 Semidirekte Produkte von Monoide

##### Definition 4.25

Es seien  $M$  und  $N$  Monoide und  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, \text{End}_{\text{Mon}}(N))$ .

- $N$  zusammen mit der von  $\varphi$  induzierten  $M$ -Linksoperation

$$\mu_\varphi : M \times N \longrightarrow N, \quad (m, n) \longmapsto \varphi(m)(n)$$

heißt  **$M$ -Monoid**.

- Schreibe abkürzend  ${}^m n = \varphi(m)(n)$  für  $m \in M$  und  $n \in N$ .
- Durch  $(n, m) \cdot (n', m') = (n {}^m n', m m')$  für  $m, m' \in M$  und  $n, n' \in N$  wird eine Monoid-Verknüpfung auf  $N \times M$  definiert. Dieses Monoid heißt **semidirektes Produkt** von  $M$  und  $N$  und wird mit  $N \rtimes_\varphi M$  gekennzeichnet.

##### Bemerkung 4.26

Via  $\iota_M(m) = (m, 1)$  für  $m \in M$  und  $\iota_N(n) = (1, n)$  für  $n \in N$  sind  $M$  und  $N$  Teilmonoide von  $N \rtimes_\varphi M$ , so dass man sich  $N \rtimes_\varphi M$  auch als Monoiderweiterung von  $N$  mit  $M$  vorstellen kann, für die die Vertauschungsregel  $mn = {}^m nm$  für  $m \in M$  und  $n \in N$  gilt.

##### Proposition 4.27

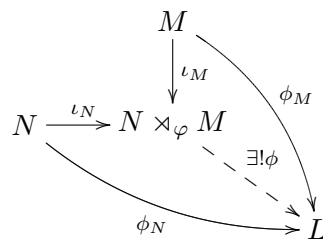
Es seien  $M \in \text{Mon}$  ein Monoid und  $N$  ein  $M$ -Monoid via  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, \text{End}_{\text{Mon}}(N))$ .

Dann erfüllt das semidirekte Produkt folgende universelle Eigenschaft:

Für jedes Monoid  $L \in \text{Mon}$ ,  $\phi_M \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, L)$  und  $\phi_N \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(N, L)$  mit

$$\phi_M(m) \cdot \phi_N(n) = \phi_N({}^m n) \cdot \phi_M(m)$$

für alle  $m \in M$  und  $n \in N$  existiert genau ein  $\phi \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(N \rtimes_\varphi M, L)$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert:



*Beweis.* Für  $(n, m) \in N \rtimes_{\varphi} M$  setze  $\phi(n, m) = \phi_N(n) \cdot \phi_M(m)$ . Es seien  $(n, m), (m', n') \in N \rtimes_{\varphi} M$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \phi((n, m)(n', m')) &= \phi(n^m n', mm') = \phi_N(n) \cdot \phi_N(n^m) \cdot \phi_M(m) \cdot \phi_M(m') \\ &= \phi_N(n) \cdot \phi_M(m) \cdot \phi_N(n') \cdot \phi_M(m') = \phi(n, m) \cdot \phi(m', n') \end{aligned}$$

und  $\phi(1) = \phi(1, 1) = \phi_N(1) \cdot \phi_M(1) = 1 \cdot 1 = 1$  und damit  $\phi$  ein Monoidhomomorphismus. Für jedes  $\phi' \in \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mon}}(N \rtimes_{\varphi} M, L)$ , das die gewünschten Eigenschaften erfüllt, ist  $\phi'(n, m) = \phi'((n, 1)(1, m)) = \phi'(n, 1) \cdot \phi'(1, m) = \phi_N(n) \cdot \phi_M(m) = \phi(n, m)$  für alle  $m \in M$  und  $n \in N$  und folglich  $\phi' = \phi$ , womit die Eindeutigkeit von  $\phi$  gezeigt ist.  $\square$

### Korollar 4.28

Es seien  $M \in \text{Mon}$  ein Monoid und  $N$  ein  $M$ -Monoid via  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, \text{End}_{\text{Mon}}(N))$ .

(i) Für ein weiteres Monoid  $M'$  und ein  $\psi \in \text{End}_{\text{Mon}}(M', M)$  ist  $N$  via  $\varphi \circ \psi$  ein  $M'$ -Monoid und man erhält einen Monoidhomomorphismus  $N \rtimes_{\varphi \circ \psi} M' \xrightarrow{\text{id}_N \times \psi} N \rtimes_{\varphi} M$ .

(ii) Für ein weiteres Monoid  $N'$  und Monoidhomomorphismen  $N \xrightarrow{\tau} N' \xrightarrow{\sigma} N$  definiert

$${}_{\sigma}^{\tau}\varphi : M \longrightarrow \text{End}_{\text{Mon}}(N'), \quad m \longmapsto \tau \circ \varphi(m) \circ \sigma$$

eine  $M$ -Operation auf  $N'$ . Falls zusätzlich  $\sigma \circ \tau = \text{id}_N$  gilt, dann erhält man ein kommutatives Diagramm von Monoidhomomorphismen:

$$\begin{array}{ccccc} N' \rtimes_{{}_{\sigma}^{\tau}\varphi} M & \xrightarrow{\tau \times \text{id}_M} & N \rtimes_{\varphi} M & \xrightarrow{\sigma \times \text{id}_M} & N' \rtimes_{{}_{\sigma}^{\tau}\varphi} M \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & \text{id}_{N' \rtimes_{{}_{\sigma}^{\tau}\varphi} M} & & \end{array}$$

*Beweis.*

(i) Für  $n \in N$  und  $m' \in M'$  gilt

$$(1, \psi(m'))(n, 1) = \left( \psi(m')n, \psi(m') \right) = \left( m'n, \psi(m') \right) = \left( \left( m'n, 1 \right) (1, \psi(m')) \right),$$

so dass die universelle Abbildungseigenschaft des semidirekten Produkts aus Proposition 4.27 den gewünschten Homomorphismus definiert. Nach Konstruktion ist dieser durch  $\text{id}_N \times \psi$  gegeben.

(ii) Es gelte  $\sigma \circ \tau = \text{id}_N$ . Für  $n' \in N$  und  $m \in M$  ist  ${}^m\sigma(n') = (\varphi(m) \circ \sigma)(n') = (\sigma \circ \tau \circ \varphi(m) \circ \sigma)(n') = \sigma({}^m n')$  und folglich

$$(1, m)(\sigma(n'), 1) = ({}^m\sigma(n'), m) = (\sigma({}^m n'), m) = (\sigma({}^m n'), 1)(1, m),$$

so dass die universelle Eigenschaft des semidirekten Produkts den ersten Homomorphismus definiert, welcher nach Konstruktion durch  $\sigma \times \text{id}_M$  gegeben ist.

Für  $n \in N$  und  $m \in M$  ist wegen  ${}^m\tau(n) = (\tau \circ \varphi(m) \circ \sigma \circ \tau)(n) = \tau({}^m n)$  dann

$$(1, m)(\tau(n), 1) = ({}^m\tau(n), m) = (\tau({}^m n), m) = (\tau({}^m n), 1)(1, m)$$

und die universelle Eigenschaft liefert auch den zweiten Homomorphismus  $\tau \times \text{id}_M$ .

Es gilt  $(\sigma \times \text{id}_M) \circ (\tau \times \text{id}_M) = (\sigma \circ \tau) \times \text{id}_M = \text{id}_{N \rtimes_{\varphi} M}$ .

$\square$

## 4.3.2 (Schief-)Monoidringe eines semidirekten Produkts

**Proposition 4.29**

Es seien  $R$  ein Ring,  $M$  ein Monoid und  $N$  ein  $M$ -Monoid via  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, \text{End}_{\text{Mon}}(N))$ . Dann induziert  $\varphi$  einen Monoidhomomorphismus

$$\theta_\varphi : M \longrightarrow \text{End}_{\text{Mod-}R}(R[N])[M], \quad m \longmapsto R[\varphi(m)]m$$

und es gilt  $R[N \rtimes_\varphi M] \cong R[N][M; \theta_\varphi]$ .

*Beweis.* Zunächst ist  $\theta_\varphi$  wie in Proposition 4.18, so dass  $R[N][M; \theta_\varphi]$  tatsächlich ein Schiefmonoidring von  $M$  über  $R[N]$  ist. Nach Definition des semidirekten Produkts erfüllt  $R[N \rtimes_\varphi M]$  die Vertauschungsbedingung aus Bemerkung 4.22, so dass ein  $R[N][M; \theta_\varphi] \xrightarrow{\phi} R[N \rtimes_\varphi M]$  existiert, der  $nm$  auf  $(n, m)$  abbildet für  $m \in M$  und  $n \in N$ . Da diese Elemente eine Basis des jeweiligen unterliegenden freien  $R$ -Linksmoduls bilden, ist  $\phi$  bijektiv und daher ein Ringisomorphismus.  $\square$

**Korollar 4.30**

Es seien  $R$  ein Ring,  $M$  ein Monoid und  $N$  ein  $M$ -Monoid via  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, \text{End}_{\text{Mon}}(N))$ . Weiterhin sei  $R[N \rtimes_\varphi M; \theta]$  ein Schiefmonoidring.

- (i) Falls  $\theta(N) \subseteq E_\theta \cdot (N \times \{1\}) \subseteq E_\theta[N \rtimes_\varphi M]$ , dann ist  $R[N; \theta|_N]$  ein Schiefmonoidring und man erhält einen Monoidhomomorphismus

$$\theta_M : M \longrightarrow \text{End}_{\text{Mod-}Z}(R[N; \theta|_N])[M], \quad m' \longmapsto \sum_{m \in M} \alpha_{m', m} \cdot m$$

mit  $\alpha_{m', m}(x) = \sum_{n \in N} \pi_{n, m}((1, m') *_\theta x) \cdot n$  für  $m, m' \in M$ . Dieser induziert einen Schiefmonoidring  $R[N; \theta|_N][M; \theta_M] \cong R[N \rtimes_\varphi M; \theta]$ .

- (ii) Falls  $\sigma \in \text{Aut}_{\text{Mon}}(N \rtimes_\varphi M)$  mit  $E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1}(N) \subseteq E_\theta \cdot (N \times \{1\}) \subseteq E_\theta[N \rtimes_\varphi M]$ , dann erhält man mit  $\tilde{\theta} = E_\theta[\sigma] \circ \theta \circ \sigma^{-1}$  und (i) bzw. Korollar 4.23 einen Schiefmonoidring

$$R[N; \tilde{\theta}|_N][M; \tilde{\theta}_M] \cong R[N \rtimes_\varphi M; \tilde{\theta}] \cong^{R[\sigma]} R[N \rtimes_\varphi M; \theta].$$

*Beweis.* Da  $\theta(N) \subseteq E_\theta \cdot (N \times \{1\})$  und da  $R[N \rtimes_\varphi M; \theta]$  ein Schiefmonoidring ist, ist mit  $E_\theta[N] \cong E_\theta \cdot (N \times \{1\})$  auch  $R[N; \theta|_N]$  als Teilring von  $R[N \rtimes_\varphi M; \theta]$  selbst ein Schiefmonoidring. Weiterhin gibt es einen kanonischen  $R$ -Modulisomorphismus  $\phi$

$$R[N; \theta|_N][M; \theta_M] \cong (R^{(N)})^{(M)} \cong R^{(N \times M)} \cong R[N \rtimes_\varphi M; \theta]$$

für den für alle  $m' \in M$ ,  $n' \in N$  und  $x \in R[N; \theta|_N]$  nach Definition von  $\theta_M$  gilt:

- $\phi(n' *_{\theta|_N} x) = \sum_{n \in N} \phi(\pi_n(n' *_{\theta|_N} x) \cdot n) = \sum_{n \in N} \pi_n(n' *_{\theta|_N} x) \cdot (n, 1) = (n', 1) *_\theta x$
- $\phi(m' *_{\theta_M} x) = \sum_{(n, m) \in N \rtimes_\varphi M} (\pi_{(n, m)}((1, m') *_\theta x) \cdot (n, 1)) \cdot (1, m) = (1, m') *_\theta x$

Die  $R[N; \theta|_N]$ -Linkslinearität und die  $M$ -Rechtslinearität von  $\phi$  implizieren, dass  $\phi$  multiplikativ ist. Insbesondere ist dann  $R[N; \theta|_N][M; \theta_M]$  ein Ring, also ein Schiefmonoidring über  $M$ .  $\square$



### 4.3.3 Das trivial operierende Teilmonoid

Analog zum Begriff des inneren Koeffizientenrings kann man auch das trivial operierende Monoid betrachten. Dieser Abschnitt zeigt, dass jeder Schiefmonoidring als ein „echter“ Schiefmonoidring über dem Monoidring des trivial operierenden Monoids beschrieben werden kann.

**Proposition 4.31**

Jeder Schiefmonoidring  $R[M; \theta]$  induziert ein Teilmonoid  $M_\theta = (\theta - \iota_M)^{-1}(0) \subseteq M$ .

*Beweis.* Für  $m, n \in M_\theta$  gilt wegen  $\theta|_{M_\theta} = \iota_M|_{M_\theta}$ , dass

$$\theta(mn) - \iota_M(mn) = \theta(m)\theta(n) - \iota_M(m)\iota_M(n) = \iota_M(m)\iota_M(n) - \iota_M(m)\iota_M(n) = 0,$$

so dass  $mn \in M_\theta$ . Außerdem ist  $\theta(1) = 1 = \iota_M(1)$ , so dass  $1 \in M_\theta$  und damit  $M_\theta \leq M$  ein Teilmonoid ist. □

**Bemerkung 4.32**

Es seien  $R$  ein Ring,  $N$  ein Monoid und  $R[N; \theta]$  ein Schiefmonoidring.

Falls es ein Monoid  $M$  gibt, so dass  $N \cong N_\theta \rtimes_\varphi M$  mit  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, \text{End}_{\text{Mon}}(N_\theta))$ , dann erhält man einen Monoidhomomorphismus

$$\theta_M : M \longrightarrow \text{End}_{\text{Mod-Z}}(R[N_\theta])[M], \quad m' \longmapsto \sum_{m \in M} \alpha_{m', m} \cdot m$$

mit  $\alpha_{m', m}(x) = \sum_{n \in N_\theta} \pi_{n, m}((1, m') *_\theta x) \cdot n$  für  $m, m' \in M$ , wodurch  $R[N_\theta][M; \theta_M] \cong R[N; \theta]$  wegen Korollar 4.30 zu einem Schiefmonoidring wird.



**Teil II**

**Topologische  
Monoidring-Konstruktionen**



# Kapitel 5

## (Lokal) Proendliche Räume, Monoide und $M$ -Mengen

In diesem Kapitel wird die Kategorie der lokal proendlichen, eigentlichen Monoide definiert, für die dann in Kapitel 7 der topologische und vollständige Schiefmonoidring definiert werden kann. Dazu wird zunächst die Teilkategorie  $\mathcal{T}op_{L,P} \subseteq \mathcal{T}op$  der lokal proendlichen, eigentlichen Räume konstruiert, auf der das Produkt (von  $\mathcal{T}op$ ) einen Bifunktor induziert.  $\mathcal{T}op_{L,P}$  wird dann auf diese Weise eine monoidale Kategorie und die lokal proendlichen, eigentlichen Monoide bilden die Monoid-Kategorie von  $\mathcal{T}op_{L,P}$ .

### 5.1 (Lokal) Proendliche Räume

#### 5.1.1 Proendliche Räume

Hier werden zunächst die topologischen Grundlagen erarbeitet und einige nützliche Hilfsmittel für die spätere Theorie der topologischen und vollständigen Monoidringe bereitgestellt.

##### Definition 5.1

Ein topologischer Raum  $X$  heißt ...

- (i) ... **hausdorffsch**, wenn es zu je zwei Punkten disjunkte Umgebungen gibt (Bou66a, I.8.1 Definition 1). Man nennt  $X$  dann einen **Hausdorff-Raum**.
- (ii) ... **zusammenhängend**, wenn er sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht-leerer, offener Mengen schreiben lässt (Bou66a, I.11.1 Definition 1).
- (iii) ... **total unzusammenhängend**, wenn die Punktmengen  $\{x\} \subseteq X$  seine einzigen nicht-leeren, zusammenhängenden Teilräume sind (Bou66a, I.11.5 Definition 3).
- (iv) ... **quasi-kompakt**, wenn es für jede offene Überdeckung  $X = \bigcup_i U_i$  eine endliche Teilüberdeckung gibt, so dass  $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$  ist (Bou66a, I.9.1 Definition 1).
- (v) ... **kompakt**, wenn  $X$  quasi-kompakt und hausdorffsch ist (Bou66a, I.9.1 Definition 1).
- (vi) ... **lokal kompakt**, wenn  $X$  hausdorffsch ist und jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt (Bou66a, I.9.7 Definition 4).
- (vii) ... **diskret**, wenn jede Teilmenge von  $X$  offen ist (Bou66a, I.1.1 Example).

(viii) ... **indiskret**, wenn die leere Menge und  $X$  selbst seine einzigen offenen Teilmengen sind.

Leider ist die Literatur sich uneinig bei der Definition eines (lokal) kompakten Raums. Viele Autoren lassen die Hausdorff-Bedingung weg, so dass dort ein kompakter Raum dasselbe ist wie hier ein quasi-kompakter Raum. Nach obiger Definition wäre die Formulierung „kompakt und hausdorffsch“ unsinnig, da kompakte Räume ja schon hausdorffsch sind. Aber um Verwirrungen zu vermeiden, wird trotzdem an jeder Stelle, an der die Hausdorff-Eigenschaft gefordert wird, diese auch explizit erwähnt.

**Lemma 5.2**

Für einen topologischen Raum  $X$  sind äquivalent:

- (i)  $X$  ist der projektive Limes endlicher diskreter Räume,
- (ii)  $X$  ist hausdorffsch, kompakt und besitzt eine Basis aus offenen Kompakta,
- (iii)  $X$  ist hausdorffsch, kompakt und total unzusammenhängend.

*Beweis.* Da jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raums abgeschlossen darin ist und jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums wieder kompakt ist, ist (ii) äquivalent dazu, dass  $X$  eine Basis aus offenen und gleichzeitig abgeschlossenen Teilmengen besitzt. Die Behauptung gilt dann nach (RZ00, Theorem 1.1.12). □

**Definition 5.3**

Ein topologischer Raum, der die äquivalenten Bedingungen aus Lemma 5.2 erfüllt, heißt **proendlich** (RZ00, 1.1 S. 10).

Folgendes Lemma ist hilfreich für die spätere Konstruktion topologischer (Schief-)Monoidringe, da hiermit viele Rechnungen aus dem proendlichen Fall auf den endlichen Fall zurückgeführt werden können.

**Lemma 5.4**

Es sei  $(D_i)$  ein projektives System endlicher, diskreter Räume  $D_i$  und  $D$  ein endlicher, diskreter Raum. Dann gibt es eine Bijektion

$$\varinjlim_i \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(D_i, D) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\varprojlim_i D_i, D), \quad \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(D_i, Y) \ni f \longmapsto f \circ \pi_i$$

wobei die  $\varprojlim_i D_i \xrightarrow{\pi_i} D_i$  für alle  $i$  die kanonischen Projektionen sind.

*Beweis.* Siehe (BJ01, Lemma 3.4.12) oder (RZ00, Lemma 1.1.16). □

Ebenso wichtig ist folgendes Lemma, das als Grundlage vieler Beweise dient, die vollständige abelsche Gruppen oder (lokal) proendliche Räume und Monoide betreffen.

**Lemma 5.5**

Es sei  $X$  ein topologischer Raum,  $Y = \varinjlim_i Y_i$  ein projektiver Limes topologischer Räume  $Y_i$  und  $X \xrightarrow{f_i} Y_i$  stetige Surjektionen, die mit den Übergangsabbildungen kompatibel sind. Dann gilt für die induzierte Limesabbildung  $X \xrightarrow{f} Y$ :

- (i)  $f$  ist stetig.
- (ii) Ist  $X$  nicht leer, dann ist  $f(X) \subseteq Y$  eine dichte Teilmenge.

Trägt  $X$  die Initialtopologie bezüglich der  $f_i$ , dann gilt außerdem:

- (iii)  $X \xrightarrow{f} f(X)$  ist offen.
- (iv) Ist  $X$  hausdorffsch, dann ist  $X \xrightarrow{f} f(X)$  ein topologischer Isomorphismus.

*Beweis.*

- (i) Da  $Y$  die Initialtopologie bezüglich der  $f_i$  trägt, sind alle  $f_i$  stetig, so dass nach der universellen Eigenschaft des projektiven Limes auch  $f$  stetig ist.
- (ii) Da  $X$  nicht leer ist, ist auch  $Y \supseteq f(X)$  nicht leer, so dass (RZ00, Lemma 1.1.7) die Behauptung impliziert.
- (iii) Es sei  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge und  $x \in U$ , d.h.  $f(x) \in f(U)$ . Nach Definition der Initialtopologie gibt es eine offene Menge  $V_x \subseteq Y_i$ , so dass  $f_i^{-1}(V_x) \subseteq U$  ist. Es sei  $V'_x = \pi_i^{-1}(V_x)$ , wobei  $Y \xrightarrow{\pi_i} Y_i$  die Limesprojektion ist. Da  $\pi_i$  stetig ist, ist  $V'_x \subseteq Y$  offen. Es gilt  $f(X) \cap V'_x \subseteq f(U)$ , denn für  $y \in X$  mit  $f(y) \in V'_x$  gilt  $f_i(y) = \pi_i \circ f(y) \in V_x$ . Da  $f(X) \cap V'_x$  nach Definition der Teilraumtopologie eine offene Umgebung von  $f(x)$  in  $f(X)$  ist, ist  $f(U) = \bigcup_{x \in U} f(X) \cap V'_x$  offen in  $f(X)$ .
- (iv) Wegen (i) und (iii) braucht nur noch die Injektivität von  $f$  gezeigt werden. Angenommen es gibt  $x, y \in X$  mit  $f(x) = f(y)$  und  $x \neq y$ . Dann gibt es auch disjunkte offene Umgebungen  $U_x, U_y \subseteq X$  von  $x$  bzw.  $y$ , da  $X$  hausdorffsch ist. Da  $X$  die Initialtopologie bezüglich der  $f_i$  trägt, gibt es offene  $V_x \subseteq Y_i$  und  $V_y \subseteq Y_j$  mit  $x \in f_i^{-1}(V_x) \subseteq U_x$  und  $y \in f_j^{-1}(V_y) \subseteq U_y$ . Da das Limesystem projektiv ist, kann ohne weiteres  $i = j$  angenommen werden. Da  $U_x$  und  $U_y$  disjunkt sind, gilt

$$V_x \cap V_y \subseteq f_i(U_x) \cap f_i(U_y) = f_i(U_x \cap U_y) = f_i(\emptyset) = \emptyset$$

Aber dann führt  $f_i(x) = \pi_i \circ f(x) = \pi_i \circ f(y) = f_i(y) \in V_x \cap V_y$  zum Widerspruch. □

### Lemma 5.6

Es sei  $X = \varprojlim_i X_i$ , wobei  $(X_i, f_{i,j})$  ein projektives System topologischer Räume  $X_i$  ist. Es seien  $X \xrightarrow{\pi_i} X_i$  die Limesprojektionen.

Dann bilden die Mengen  $\pi_i^{-1}(U)$  mit offenen  $U \subseteq X_i$  nicht nur eine Subbasis, sondern sogar eine Basis der Topologie auf  $X$ .

*Beweis.* Es seien  $U_k \subseteq X_{i_k}$  offen, für  $1 \leq k \leq r$ . Da die Indexmenge gerichtet ist, gibt es ein  $i \leq i_1, \dots, i_r$ . Mit  $V_k = f_{i,i_k}^{-1}(U_k)$  für  $1 \leq k \leq r$  folgt dann

$$\pi_i^{-1}(V_1 \cap \dots \cap V_r) = \pi_i^{-1}(V_1) \cap \dots \cap \pi_i^{-1}(V_r) = \pi_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_{i_r}^{-1}(U_r)$$

Folglich ist die Menge aller  $\pi_i^{-1}(U)$ , für alle  $i$  und alle offenen  $U \subseteq X_i$ , abgeschlossen unter endlichen Schnitten. Insbesondere bildet sie schon eine Basis der Topologie auf  $X$ . □

### 5.1.2 Lokal proendliche Räume und eigentliche Abbildungen

In diesem Abschnitt wird der Begriff des proendlichen Raums auf den des lokal proendlichen Raums ausgeweitet. Dies ist notwendig, da das freie diskrete, einfach erzeugte Monoid (das für die Konstruktion des Schiefpotenzreihenrings benötigt wird) beispielsweise nicht kompakt ist. Es stellt sich heraus, dass man unter Aspekten der Funktorialität des topologischen Monoidrings nicht jede stetige Abbildung als Morphismus in dieser Kategorie zulassen sollte. In dieser Hinsicht haben die eigentlichen, stetigen Abbildungen jedoch sehr gute Eigenschaften, weshalb man sich auf diese Abbildungen beschränkt.

#### Lemma 5.7

Für einen topologischen Raum  $X$  sind äquivalent:

- (i)  $X$  ist hausdorffsch und besitzt eine Basis aus offenen Kompakta,
- (ii)  $X$  ist hausdorffsch, lokal kompakt und total unzusammenhängend.

*Beweis.* Es gelte (i). Dann ist  $X$  per Definition lokal kompakt. Es sei  $\emptyset \neq C \subseteq X$  eine zusammenhängende Teilmenge. Angenommen es gäbe  $x, y \in C$  mit  $x \neq y$ . Da  $X$  hausdorffsch ist, gibt es eine offene, kompakte d.h. auch abgeschlossene Umgebung  $K$  von  $x$ , die nicht  $y$  enthält. Folglich ist  $C = (C \cap K) \cup (C \setminus K)$  eine disjunkte Vereinigung zweier nicht-leerer Mengen, die in  $C$  offen sind, im Widerspruch dazu, dass  $C$  zusammenhängend ist.

Es sei umgekehrt  $x \in U \subseteq X$  eine offene Umgebung. Wegen (Bou66a, I.9.7 Proposition 9 Corollary) gibt es eine kompakte Umgebung  $x \in K \subseteq U$  und damit eine in  $U$  offene Umgebung  $x \in V \subseteq K \subseteq U$ . Als kompakter Teilraum von  $X$  ist  $K$  außerdem hausdorffsch und total unzusammenhängend, also nach Lemma 5.2 (iii) proendlich. Nach Lemma 5.2 (ii) gibt es daher ein in  $K$  offenes Kompaktum  $x \in K' \subseteq V \subseteq K$ . Nach Definition der Teilraumtopologie ist zunächst  $K'$  offen in  $V$ . Da außerdem  $V$  offen in  $U$  und  $U$  offen in  $X$  ist, sind nochmals nach Definition der Teilraumtopologie auch  $V$  bzw.  $K'$  offen in  $X$ . Da  $x$  und  $U$  beliebig waren, besitzt jeder Punkt in  $X$  eine Umgebungsbasis aus offenen Kompakta und damit schließlich  $X$  eine Basis aus offenen Kompakta. □

#### Definition 5.8

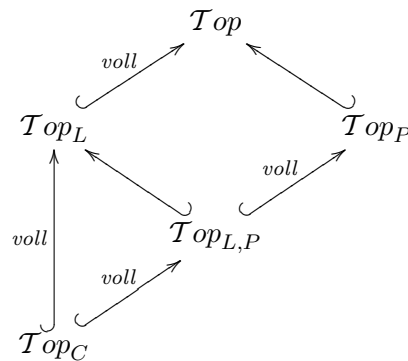
Erweitere die Kategorie der proendlichen Räume um folgende Objekte und Morphismen:

- (i) Ein topologischer Raum, der eine der äquivalenten Bedingungen aus Lemma 5.7 erfüllt, heißt **lokal proendlich**.
- (ii) Eine stetige Abbildung  $X \xrightarrow{f} Y$  zwischen zwei topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  heißt **eigentlich**, wenn für jeden topologischen Raum  $Z$  die Abbildung  $f \times \text{id}_Z$  abgeschlossen ist (Bou66a, I.10.1 Definition 1).

Es bezeichne  $\text{Top}_L \subseteq \text{Top}$  die volle Teilkategorie der lokal proendlichen Räume und  $\text{Top}_C \subseteq \text{Top}_L$  die volle Teilkategorie der proendlichen Räume. Weiterhin bezeichne  $\text{Top}_P \subseteq \text{Top}$  die Teilkategorie der topologischen Räume mit den eigentlichen, stetigen Abbildungen als Homomorphismen. Dies ist eine wohldefinierte Kategorie, da die Identitäten eigentlich sind und nach (Bou66a, I.10.1 Proposition 5 a)) auch Verkettungen eigentlicher, stetiger Abbildungen eigentlich



sind. Weiterhin sei  $\mathcal{T}op_{L,P} = \mathcal{T}op_L \cap \mathcal{T}op_P$ . Man erhält folgendes Diagramm von Kategorien:



Nach der nun folgenden Bemerkung 5.10 (ii) sind alle Abbildungen zwischen kompakten Hausdorff-Räumen eigentlich, weshalb  $\mathcal{T}op_C$  eine volle Teilkategorie von  $\mathcal{T}op_{L,P}$  ist.

**Bemerkung 5.9**

Jede lokal abgeschlossene Teilmenge, d.h. der Durchschnitt einer offenen mit einer abgeschlossenen Teilmenge (Bou66a, I.3.3 Definition 2 und Proposition 5), eines lokal proendlichen Raums, ist lokal proendlich.

*Beweis.* Es sei  $X \in \mathcal{T}op_{L,P}$  ein lokal proendlicher Raum und  $A \subseteq X$  eine lokal abgeschlossene Teilmenge. Versehen mit der Teilraumtopologie ist  $A$  hausdorffsch, total unzusammenhängend und nach (Bou66a, I.9.7 Proposition 13) lokal kompakt.

□

**Bemerkung 5.10**

Es seien  $X$  und  $Y$  zwei topologische Räume und  $X \xrightarrow{f} Y$  eine stetige Abbildung.

- (i)  $f$  ist genau dann eigentlich, wenn  $f$  abgeschlossen und für jedes  $y \in Y$  die Urbildmenge  $f^{-1}(y)$  quasi-kompakt ist.
- (ii) Wenn  $f$  eigentlich ist, dann ist für alle quasi-kompakten  $K \subseteq Y$  das Urbild  $f^{-1}(K)$  quasi-kompakt.

Falls  $X, Y$  Hausdorff-Räume sind und  $Y$  lokal kompakt, dann gilt auch die Umkehrung.

*Beweis.*

- (i) (Bou66a, I.10.2 Theorem 1).
- (ii) (Bou66a, I.10.2 Proposition 6) und (Bou66a, I.10.3 Proposition 7).

□

**Lemma 5.11**

Es seien  $X$  ein Hausdorff-Raum und  $Y$  ein lokal proendlicher Raum.

Eine stetige Abbildung  $X \xrightarrow{f} Y$  ist genau dann eigentlich, wenn das Urbild jedes offenen Kompaktums unter  $f$  kompakt ist.

*Beweis.* Es sei  $K \subseteq Y$  ein beliebiges Kompaktum.  $Y$  besitzt eine Basis aus offenen Kompakta, so dass  $Y = \bigcup_i K_i$  von offenen Kompakta  $K_i$  überdeckt wird. Diese überdecken daher auch  $K$  und da  $K$  kompakt ist, genügen endlich viele dieser  $K_i$ . Ohne Einschränkung sei daher  $K \subseteq K_1 \cup \dots \cup K_r =: K'$ . Es folgt nach Voraussetzung, dass  $f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}(K')$  Teilmenge eines Kompaktums ist. Außerdem ist  $K$  abgeschlossen in  $Y$ , da  $Y$  hausdorffsch ist. Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  ist auch  $f^{-1}(K)$  abgeschlossen in  $X$  und als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums selbst kompakt. □

### 5.1.3 Einpunktkompaktifizierung lokal proendlicher Räume

Entscheidend für die Konstruktion topologischer Schiefmonoidringe ist die Möglichkeit der Einpunktkompaktifizierung lokal proendlicher Räume bzw. später auch Monoide. Diese induziert einen Funktor  $\mathcal{T}op_{L,P} \rightarrow \mathcal{T}op_C$ , so dass eigentlich jede Frage, die lokal proendliche Räume bzw. Monoide betrifft, auf den proendlichen Fall übertragen werden kann. Dies ist ein wesentlicher Schritt bei der Konstruktion topologischer und vollständiger Monoidringe.

#### Satz 5.12

Es sei  $X$  ein lokal proendlicher Raum. Setze  $\hat{X} = X \cup \{0\}$  und definiere eine Menge  $U \subseteq \hat{X}$  als offen, wenn entweder  $0 \notin U \subseteq X$  offen ist oder  $0 \in U$  und  $\hat{X} \setminus U$  kompakt ist.

Dann ist  $\hat{X}$  mit der auf dieser Weise konstruierten Topologie ein proendlicher topologischer Raum.

Man nennt  $\hat{X}$  auch die **Einpunktkompaktifizierung** von  $X$ .

*Beweis.* Nach dem Beweis von (Bou66a, I.9.8 Theorem 4 (Alexandroff)) ist  $\hat{X}$  ein kompakter, topologischer Hausdorff-Raum. Für alle  $0 \in U \subseteq \hat{X}$  ist  $K = \hat{X} \setminus U \subseteq X$  kompakt. Da  $X$  lokal proendlich ist, lässt sich  $K$  durch offene Kompakta überdecken. Da  $K$  kompakt ist, genügt dann eine endliche Teilüberdeckung davon, so dass es offene Kompakta  $K_1, \dots, K_r \subseteq X$  gibt mit  $K \subseteq K_1 \cup \dots \cup K_r =: L$ .  $L$  ist kompakt und offen in  $X$ , so dass  $\hat{X} \setminus L$  offen und als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums  $\hat{X}$  kompakt ist. Nach Konstruktion ist  $0 \in \hat{X} \setminus L \subseteq U$ , so dass  $0$  eine Umgebungsbasis aus offenen Kompakta besitzt und insgesamt  $\hat{X}$  proendlich ist. □

#### Lemma 5.13

Es seien  $X$  und  $Y$  zwei lokal kompakte Hausdorff-Räume. Es gilt:

- (i) Eine stetige Abbildung  $X \xrightarrow{f} Y$  ist genau dann eigentlich, wenn die Fortsetzung  $\hat{X} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{Y}$ , definiert durch  $\hat{f}(0) = 0$ , stetig ist.
- (ii) Falls  $Y$  quasi-kompakt und  $X$  nicht quasi-kompakt, dann ist  $\text{Hom}_{\mathcal{T}op_P}(X, Y) = \emptyset$ .

*Beweis.*

- (i) Ist  $f$  eigentlich, dann ist  $\hat{f}$  stetig bei  $0$  nach Konstruktion der Topologie auf  $\hat{X}$  bzw.  $\hat{Y}$  und wegen Bemerkung 5.10. Außerdem ist  $\hat{f}|_X = f$  stetig, so dass insgesamt  $\hat{f}$  stetig ist. Umgekehrt ist jedes Kompaktum  $K \subseteq Y$  auch abgeschlossen in  $\hat{Y}$ , da  $\hat{Y}$  hausdorffsch ist. Die Stetigkeit von  $\hat{f}$  impliziert dann, dass  $f^{-1}(K) = \hat{f}^{-1}(K) \subseteq \hat{X}$  abgeschlossen und damit kompakt ist, da  $\hat{X}$  kompakt ist. Folglich ist  $f$  nach Bemerkung 5.10 eigentlich.
- (ii) Angenommen es gibt ein  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op_P}(X, Y)$ . Da  $f$  eigentlich ist, ist  $X = f^{-1}(Y)$  quasi-kompakt im Widerspruch zur Annahme.

□

**Korollar 5.14**

Man erhält einen treuen Kompaktifizierungsfunktor:

$$C : Top_{L,P} \longrightarrow Top_C, \quad X \longmapsto \hat{X}$$

**Lemma 5.15**

Es sei  $X$  ein lokal proendlicher Raum und  $\hat{X} \cong \varprojlim_i X_i$  mit diskreten, endlichen Räumen  $X_i$ . Dann gibt es für jedes offene Kompaktum  $K \subseteq X$  ein  $i$ , so dass  $K = \pi_i^{-1}\pi_i(K)$  ist.

*Beweis.* Da  $K \subseteq X \subseteq \hat{X}$  offen ist, gibt es eine offene Überdeckung  $K = \bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(U_i)$  mit offenen  $U_i \subseteq X_i$ , wobei  $\hat{X} \xrightarrow{\pi_i} X_i$  die Limesprojektionen sind. Da  $K$  kompakt ist, genügen schon endlich viele  $\pi_i^{-1}(U_i)$  um es zu überdecken, d.h.  $K = \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup \pi_{i_r}^{-1}(U_{i_r})$ . Da die  $X_i$  ein projektives System bilden und insbesondere die Indexmenge gerichtet ist, gibt es ein  $i \leq i_1, \dots, i_r$  und es folgt mit  $V_k = f_{i,i_k}^{-1}(U_{i,k})$  für  $1 \leq k \leq r$ , dass

$$K = \pi_i^{-1}(V_1) \cup \dots \cup \pi_i^{-1}(V_r) = \pi_i^{-1}(V_1 \cup \dots \cup V_r).$$

Insbesondere ist dann  $\pi_i(K) = V_1 \cup \dots \cup V_r$  bzw.  $K = \pi_i^{-1}\pi_i(K)$ .

□

**5.1.4 Quotienten und Relationenverbände topologischer Räume**

Wie in Kapitel 2 Abschnitt 2.4 Beispiel 2.29 gesehen, entsprechen die Äquivalenzrelationen auf einer Menge  $S$  den Quotienten von  $S$ . In diesem Abschnitt werden die Quotienten der Kategorien  $Top_P$ ,  $Top_{L,P}$  und  $Top_C$  analysiert. Der Homöomorphiesatz 5.18 zeigt, dass die Kategorie  $Top_P$  (Epi,Mono)-strukturiert ist, was sich auch auf dessen Teilkategorien  $Top_{L,P}$  und  $Top_C$  überträgt. Für proendliche Räume besitzen die offenen Äquivalenzrelationen als Teilverband der Äquivalenzrelationen eines proendlichen Raums nützliche Eigenschaften für spätere Resultate (vgl. Korollar 5.24).

**Definition 5.16**

Es seien  $X$  und  $Y$  Mengen und  $X \xrightarrow{f} Y$ . Die Äquivalenzrelation  $R$  auf  $X$ , definiert durch  $xRx'$ , falls  $f(x) = f(x')$ , heißt **Kern** von  $f$  und wird mit  $\ker f = R = (f \times f)^{-1}(\Delta_Y)$  bezeichnet.

**Definition 5.17**

Für eine Menge  $X$  bezeichne  $\mathcal{E}qu(X)$  die Menge der Äquivalenzrelationen auf  $X$ . Es sei nun  $X$  ein topologischer Raum.

- (i) Eine Äquivalenzrelation  $R \in \mathcal{E}qu(X)$  auf  $X$  heißt ...
  - ... **abgeschlossen**, wenn jede Äquivalenzklasse von  $R$  abgeschlossen in  $X$  ist.
  - ... **offen**, wenn jede Klasse von  $R$  offen in  $X$  ist.
  - ... **kompakt**, wenn jede Klasse von  $R$  abgeschlossen in  $X$  und quasi-kompakt ist.
- (ii) Weiterhin bezeichne ...
  - ...  $\mathcal{E}qu_A(X)$  die Teilmenge der abgeschlossenen Äquivalenzrelationen auf  $X$ .
  - ...  $\mathcal{E}qu_O(X)$  die Teilmenge der offenen Äquivalenzrelationen auf  $X$ .

- ...  $\mathcal{E}qu_C(X)$  die Teilmenge der kompakten Äquivalenzrelationen auf  $X$ .

**Satz 5.18** (Homöomorphie-Satz)

Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und  $X \xrightarrow{f} Y$  eine stetige Abbildung. Dann erhält man folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_{\ker f} \downarrow & & \uparrow \iota_{f(X)} \\ X/\ker f & \xrightarrow{\bar{f}} & f(X) \end{array}$$

$f$  ist genau dann eigentlich, wenn  $\ker f \in \mathcal{E}qu_C(X)$  kompakt,  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus und  $f(X) \xrightarrow{\iota_{f(X)}} Y$  eigentlich ist.

*Beweis.* Dies gilt per Definition einer kompakten Äquivalenzrelation nach (Bou66a, I.10.1 Corollary 4) und (Bou66a, I.10.1 Proposition 2). □

**Lemma 5.19**

Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Es gelten folgende Eigenschaften:

- (i)  $X/R$  ist genau dann hausdorffsch, wenn  $R \in \mathcal{E}qu_A(X)$  abgeschlossen ist.  
Insbesondere ist dann  $R \subseteq X \times X$  abgeschlossen.
- (ii)  $X/R$  ist genau dann diskret, wenn  $R \in \mathcal{E}qu_O(X)$  offen ist.  
Insbesondere ist dann  $R \subseteq X \times X$  offen.
- (iii) Wenn  $R \in \mathcal{E}qu_C(X)$  kompakt ist, dann gilt:
  - a) Die kanonische Projektion  $X \xrightarrow{\pi_R} X/R$  ist eigentlich.
  - b) Falls  $X$  hausdorffsch ist, dann gilt:  
 $X/R$  ist genau dann lokal kompakt, wenn  $X$  lokal kompakt ist.

Insbesondere gilt  $\mathcal{E}qu_O(X), \mathcal{E}qu_C(X) \subseteq \mathcal{E}qu_A(X)$ .

*Beweis.*

- (i)  $X/R$  ist genau dann hausdorffsch, wenn jeder Punkt abgeschlossen ist. Dies ist nach Definition der Quotiententopologie genau dann der Fall, wenn das Urbild jedes Punktes abgeschlossen ist. Diese Urbilder sind aber gerade die Äquivalenzklassen von  $R$ . Ist  $X/R$  ein Hausdorff-Raum, dann ist die Diagonale  $\Delta_{X/R} \subseteq X/R \times X/R$  abgeschlossen. Folglich ist auch  $R$  als Urbild von  $\Delta_{X/R}$  unter der stetigen Abbildung  $X \times X \xrightarrow{\pi_R \times \pi_R} X/R \times X/R$  abgeschlossen.
- (ii) Die Äquivalenzklassen von  $R$  sind die Urbilder der Punkte  $x \in X/R$  unter  $\pi_R$ . Folglich gilt die Behauptung. Wenn jede Äquivalenzklasse  $[x] \subseteq X$  offen ist, dann ist auch  $R = \bigcup_{x \in X} [x] \times [x]$  offen in  $X \times X$ .
- (iii) a) Dies gilt nach Bemerkung 5.10 (i).

- b) Falls  $X$  lokal kompakt ist, dann ist auch  $X/R$  lokal kompakt nach (Bou66a, I.10.4 Proposition 9). Ist umgekehrt  $X/R$  lokal kompakt, dann ist auch  $X$  lokal kompakt wegen (Bou66a, I.10.3 Proposition 7) unter Benutzung von a).

□

### Bemerkung 5.20

Beliebige Schnitte von Äquivalenzrelationen sind wieder Äquivalenzrelationen und die Äquivalenzklassen der Schnittrelation sind die Schnitte der Äquivalenzklassen. Folglich gilt per Definition:

- (i) Schnitte abgeschlossener/kompakter Äquivalenzrelationen sind abgeschlossen/kompakt.
- (ii) Schnitte zweier, offener Äquivalenzrelationen sind offen.

### Bemerkung 5.21

Es sei  $X$  ein topologischer Raum,  $R \in \mathcal{E}qu_O(X)$  und  $R \subseteq R' \in \mathcal{E}qu(X)$ .

Dann ist die Quotiententopologie auf  $X/R' = (X/R)/R'$  die diskrete Topologie, da  $X/R$  diskret ist, und folglich  $R'$  selbst offen.

### Korollar 5.22

Da jede Äquivalenzrelation als Teilmenge von  $X \times X$  aufgefasst werden kann, trägt  $\mathcal{E}qu(X)$  eine kanonische Halbordnung. Es gilt:

- (i)  $\mathcal{E}qu(X)$  ist ein vollständiger, distributiver Verband. Für eine Teilmenge  $S \subseteq \mathcal{E}qu(X)$  gilt:

$$\bigwedge S = \bigcap S, \quad \bigvee S = \bigcap_{\substack{R' \in \mathcal{E}qu(X), \\ R \subseteq R' \forall R \in S}} R'$$

- (ii)  $\mathcal{E}qu_A(X)$  ist ein vollständiger, distributiver Verband.
- (iii)  $\mathcal{E}qu_O(X) \leq \mathcal{E}qu_A(X)$  ist ein distributiver Teilverband, welcher Suprema nicht-leerer Teilmengen besitzt.
- (iv)  $\mathcal{E}qu_C(X) \leq \mathcal{E}qu_A(X)$  ist ein distributiver Teilverband, welcher Infima nicht-leerer Teilmengen besitzt.

Für jede Abbildung  $X \xrightarrow{f} Y$  definiert  $\mathcal{E}qu(Y) \xrightarrow{(f \times f)^{-1}} \mathcal{E}qu(X)$  einen Verbandshomomorphismus, so dass diese Konstruktion (kontravariante) Funktoren  $\text{Set} \xrightarrow{\mathcal{E}qu} \mathcal{P}os_{\mathbb{V}, \mathbb{A}, D}$ ,  $\text{Top} \xrightarrow{\mathcal{E}qu_A} \mathcal{P}os_{\mathbb{V}, \mathbb{A}, D}$ ,  $\text{Top} \xrightarrow{\mathcal{E}qu_O} \mathcal{P}os_{\mathbb{V}, \mathbb{A}, D}$  und  $\text{Top}_P \xrightarrow{\mathcal{E}qu_C} \mathcal{P}os_{\mathbb{V}, \mathbb{A}, D}$  definiert.

*Beweis.*

- (i) Nach Bemerkung 5.20 liegen die angegebenen Suprema und Infima auch tatsächlich wieder in  $\mathcal{E}qu(X)$ . Für eine Teilmenge  $S \subseteq \mathcal{E}qu(X)$  und  $T \in \mathcal{E}qu(X)$  gilt

$$T \wedge \left( \bigvee S \right) = \bigcap_{\substack{R' \in \mathcal{E}qu(X), \\ R \subseteq R' \forall R \in S}} T \cap R' = \bigcap_{\substack{R' \in \mathcal{E}qu(X), \\ T \cap R \subseteq R' \forall R \in S}} R' = \bigvee_{R \in S} (T \wedge R),$$

so dass  $\mathcal{E}qu(X)$  distributiv ist.

(ii) Bemerkung 5.20 (i) sichert die Existenz von Infima und für  $S \subseteq \mathcal{E}qu_A(X)$  ist

$$\bigvee S = \bigcap_{\substack{R' \in \mathcal{E}qu_A(X), \\ R \subseteq R' \forall R \in S}} R'$$

ein Supremum von  $S$ , so dass  $\mathcal{E}qu_A(X)$  vollständig ist. Die Distributivität zeigt man wie in (i).

(iii) Da wegen Lemma 5.19 jede offene Kongruenz auch abgeschlossen ist, gilt  $\mathcal{E}qu_O(X) \subseteq \mathcal{E}qu_A(X)$ . Nach Bemerkung 5.20 (ii) ist  $\mathcal{E}qu_O(X)$  abgeschlossen unter endlichen Schnitten. Für eine nicht-leere Teilmenge  $S \subseteq \mathcal{E}qu_O(X)$  ist wegen Bemerkung 5.21 das in  $\mathcal{E}qu_A(X)$  gebildete Supremum wieder eine offene Äquivalenzrelation auf  $M$ . Damit ist  $\mathcal{E}qu_O(X) \leq \mathcal{E}qu_A(X)$  ein supremumvollständiger Teilverband. Die Distributivität wird von  $\mathcal{E}qu_A(X)$  geerbt.

(iv) Für alle  $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{E}qu_C(X)$  sind die Äquivalenzklassen von  $\bigwedge S = \bigcap S$  abgeschlossene Teilmengen der quasi-kompakten Äquivalenzklassen eines jeden  $R \in S$  und damit selbst quasi-kompakt. Distributivität wird von  $\mathcal{E}qu_A(X)$  geerbt. □

### Proposition 5.23

Es seien  $X$  ein proendlicher Raum,  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{E}qu_O(X)$  eine gerichtete Teilmenge und  $R \in \mathcal{E}qu(X)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $R = \bigcap_{R \subseteq S \in \mathcal{R}} S$
- (ii)  $X/R \cong \varprojlim_{R \subseteq S \in \mathcal{R}} X/S$

*Beweis.* Es seien  $X \xrightarrow{\pi_S} X/S$  für  $S \in \mathcal{E}qu(X)$  die kanonischen Projektionen. Für  $R \subseteq S \in \mathcal{E}qu_O(X)$  gibt es wegen  $(X/R)/S \cong X/S$  außerdem die stetigen Projektionen  $X/R \xrightarrow{\bar{\pi}_S} X/S$ .

Es gelte (i). Der projektive Limes über  $(\bar{\pi}_S)_{T \in \mathcal{R}}$  induziert ein stetiges  $X/R \xrightarrow{f} \varprojlim_{R \subseteq S \in \mathcal{R}} X/S$ . Es seien  $x, y \in X$  mit  $f([x]_R) = f([y]_R)$ . Dann ist  $[x]_S = [y]_S$  für alle  $R \subseteq S \in \mathcal{R}$ , also  $[x]_R = [y]_R$  und folglich  $f$  injektiv. Nach Lemma 5.5 (ii) ist außerdem  $f(X/R) \subseteq \varprojlim_{R \subseteq S \in \mathcal{R}} X/S$  eine dichte Teilmenge. Da  $X$  kompakt ist, sind auch  $X/R$  bzw.  $f(X/R)$  kompakt und abgeschlossen in  $\varprojlim_{R \subseteq S \in \mathcal{R}} X/S$ . Damit ist  $f$  auch surjektiv. Da  $X$  kompakt und  $\varprojlim_{R \subseteq S \in \mathcal{R}} X/S$  hausdorffsch ist, ist  $f$  abgeschlossen und damit ein Homöomorphismus, so dass (ii) erfüllt ist.

Wenn (ii) gilt, dann ist  $X/R$  proendlich, also insbesondere hausdorffsch, und trägt die Initialtopologie bezüglich der  $\bar{\pi}_S$ . Folglich ist wegen  $\pi_S = \bar{\pi}_S \circ \pi_R$  für alle  $R \subseteq S \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} R &= (\pi_R \times \pi_R)^{-1}(\Delta_{X/R}) = \bigcap_{R \subseteq S \in \mathcal{R}} (\pi_R \times \pi_R)^{-1}(\bar{\pi}_S \times \bar{\pi}_S)^{-1}(\Delta_{X/S}) \\ &= \bigcap_{R \subseteq S \in \mathcal{R}} (\pi_S \times \pi_S)^{-1}(\Delta_{X/S}) = \bigcap_{R \subseteq S \in \mathcal{R}} S \end{aligned}$$

Damit gilt (i). □

### Korollar 5.24

Für einen proendlichen Raum  $X$  gilt  $\Delta_X = \bigcap \mathcal{E}qu_O(X)$  bzw.  $X \cong X/\Delta_X \cong \varprojlim_{R \in \mathcal{E}qu_O(X)} X/R$ .

*Beweis.* Es sei  $R = \bigcap \mathcal{E}qu_O(X)$ . Angenommen es gibt  $(x, y) \in R$  mit  $x \neq y$ . Da  $X$  hausdorffsch ist und es eine Basis aus offenen Kompakta gibt, gibt es ein offenes Kompaktum  $K \subseteq X$ , das  $x$ , aber nicht  $y$  enthält. Die Partition  $X = K \cup (X \setminus K)$  definiert eine offene Äquivalenzrelation  $S = (K \times K) \cup ((X \setminus K) \times (X \setminus K)) \in \mathcal{E}qu_O(X)$ . Wegen  $R = \bigcap \mathcal{E}qu_O(X)$  ist  $(x, y) \in S$  im Widerspruch zur Konstruktion von  $S$ . Damit gilt die Behauptung nach Proposition 5.23.  $\square$

### 5.1.5 (Ko-)Limiten (lokal) proendlicher Räume

Ziel dieses Abschnitts ist es, die wichtigen kategoriellen Eigenschaften der Vollständigkeit und Kovollständigkeit zu klären. Während sich die Kategorie der proendlichen Räume diesbezüglich sehr gut verhält, kann die Existenz von Limiten und Kolimiten für die Kategorie der lokal proendlichen Räume nur teilweise nachgewiesen werden.

#### Definition 5.25

Es seien  $\mathcal{D}$  eine Kategorie und  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$  eine Teilkategorie.

(i) Falls der Inklusionsfunktork  $\mathcal{E} \xrightarrow{I} \mathcal{D}$  einen Linksadjungierten  $R$  besitzt, dann heißt ...

- ...  $\mathcal{E}$  **reflektive Teilkategorie**,
- ...  $R$  **Reflektor**,
- ... die Koeinheit  $X \xrightarrow{\eta_X} IR(X)$  für jedes  $X \in \mathcal{D}$   **$\mathcal{E}$ -Reflektion** von  $X$

(vgl. (Mac72, IV.3) und (AHS06, Definition 4.16). Wegen (Mac72, IV.2 Satz 1 (ii)) sind beide Definitionen äquivalent).

(ii)  $\mathcal{E}$  heißt **Isomorphismen-abgeschlossen**, wenn jedes Objekt aus  $\mathcal{D}$ , das isomorph zu einem Objekt in  $\mathcal{E}$  ist, bereits selbst in  $\mathcal{E}$  liegt (AHS06, Definition 4.9 (1)).

#### Proposition 5.26

Es gibt einen Funktor

$$P : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{T}op_C, \quad X \longmapsto \varprojlim_{\substack{R \in \mathcal{E}qu_O(X) \\ X/R \text{ endlich}}} X/R$$

der linksadjungiert ist zum Inklusionsfunktork  $\mathcal{T}op_C \xrightarrow{I} \mathcal{T}op$ .

- Für einen topologischen Raum  $X$  heiÙe  $P(X)$  **proendlicher Abschluss** von  $X$ .
- $\mathcal{T}op_C \hookrightarrow \mathcal{T}op$  ist eine Isomorphismen-abgeschlossene, volle, reflektive Teilkategorie.

*Beweis.* Für  $X \in \mathcal{T}op$  sei  $X \xrightarrow{p_X} P(X)$  die vom Limes induzierte stetige Abbildung. Für alle stetigen  $X \xrightarrow{f} Y$  in einen proendlichen Raum  $Y$  ist für alle  $R \in \mathcal{E}qu_O(Y)$  auch  $(f \times f)^{-1}(R) \in \mathcal{E}qu_O(X)$  und außerdem gilt wegen der Bijektion  $X/(f \times f)^{-1}(R) \cong f(X)/R \subseteq Y/R$ , dass  $X/(f \times f)^{-1}(R)$  endlich ist. Dies induziert eine stetige Abbildung  $P(f)$ , die folgendes Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p_X \downarrow & & \downarrow p_Y \\ P(X) & \xrightarrow{P(f)} & P(Y) \end{array}$$

Für proendliche  $Y$  ist die Abbildung  $p_Y$  nach Korollar 5.24 ein Homöomorphismus, so dass  $f$  über  $P(X)$  faktorisiert. Es gibt also ein  $f' = p_Y^{-1} \circ P(f)$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{p_X} & IP(X) & & P(X) \\
 & \searrow f & \downarrow I(f') & & \downarrow \exists f' = p_Y^{-1} \circ P(f) \\
 & & I(Y) & & Y
 \end{array}$$

Nach Lemma 5.5 (ii) ist  $p_X(X) \subseteq P(X)$  dicht, so dass es genau ein solches  $f'$  gibt. Folglich ist  $p_X$  ein universeller Pfeil von  $X$  nach  $I$  und mit (Mac72, IV.1 Satz 2 (ii)) erhält man die gewünschte Adjunktion.

Nach der Charakterisierung proendlicher Räume aus Lemma 5.2 ist  $Top_C \subseteq Top$  abgeschlossen unter Isomorphismen und per Definition voll. □

**Satz 5.27**

Für die Kategorie  $Top_C$  gelten folgende Eigenschaften:

- (i)  $Top_C$  ist vollständig.

Genauer: Der Inklusionsfunktor  $Top_C \xhookrightarrow{I} Top$  erzeugt Limiten.

- (ii)  $Top_C$  ist kovollständig.

Genauer gilt: Falls  $J \xrightarrow{F} Top_C$  ein Diagramm mit Kolimesdiagramm  $(F(j) \xrightarrow{\iota_j} \text{colim } F)_{j \in J}$  in  $Top$  ist, dann ist  $(F(j) \xrightarrow{\iota_j} \text{colim } F \xrightarrow{P_{\text{colim } F}} P(\text{colim } F))_{j \in J}$  ein Kolimesdiagramm von  $F$  in  $Top_C$ .

- (iii) Der Inklusionsfunktor  $Top_C \xhookrightarrow{I} Top$  erzeugt endliche Koprodukte.

- (iv) Der Funktor  $Top \xrightarrow{P} Top_C$  vertauscht mit Kolimiten.

*Beweis.*

- (i) Nach (AHS06, Proposition 13.27) ist jeder in  $Top$  gebildete Limes eines Diagramms in  $Top_C$  auch ein Limes in  $Top_C$ . Damit erzeugt  $I$  Limiten. Die Vollständigkeit von  $Top$  impliziert die Vollständigkeit von  $Top_C$ .
- (ii) Kovollständigkeit folgt unmittelbar aus (AHS06, Proposition 13.30).
- (iii) Offenbar ist die disjunkte Vereinigung zweier proendlicher Räume wieder proendlich, da sich die Eigenschaften hausdorffsch und kompakt zu sein und eine topologische Basis aus offenen Kompakta zu besitzen direkt auf die disjunkte Vereinigung übertragen. Folglich sind endliche Koprodukte gebildet in  $Top$  auch Koprodukte in  $Top_C$  und  $I$  erzeugt ebenso endliche Koprodukte.
- (iv) Da  $P$  ein Linksadjungierter ist, folgt dies aus der dualen Aussage von (Mac72, V.5 Satz 1). □

**Satz 5.28**

Der Inklusionsfunktor  $Top_L \hookrightarrow Top$  erzeugt



- (i) *endliche Limiten und*
- (ii) *Koprodukte.*

*Beweis.*

- (i) In  $\mathcal{Top}$  gebildete endliche Produkte lokal proendlicher Räume sind wieder hausdorffsch. Außerdem bilden die Produkte der offenen, kompakten Teilmengen dieser Räume eine topologische Basis nach Definition der Produkttopologie, so dass insgesamt auch der Produktraum lokal proendlich ist.

Es seien  $X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} Y$  zwei stetige Abbildungen zwischen zwei lokal proendlichen Räumen  $X$  und  $Y$ . Dann bildet die Inklusion von  $K = \{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$  in  $X$  einen Differenzkern des Paares  $(f, g)$ . Für alle  $a \in U = X \setminus K$  ist  $f(a) = g(a)$ . Da  $Y$  ein Hausdorff-Raum ist, gibt es offene Mengen  $V, V' \subseteq Y$ , die  $f(a)$  und  $g(a)$  trennen. Es sei  $W = f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V')$ . Dann ist  $a \in W$  und für alle  $x \in W$  gilt  $f(x) \neq g(x)$ , da  $V \cap V' = \emptyset$ . Folglich ist  $a \in W \subseteq U$  eine offene Umgebung, so dass  $K \subseteq X$  abgeschlossen, also selbst lokal proendlich ist.

Die universelle Eigenschaft der Konstruktionen folgt aus der universellen Eigenschaft derselben in  $\mathcal{Top}$ . Damit ist  $\mathcal{Top}_L$  nach (AHS06, Theorem 12.4) endlich vollständig. Dieser Satz zeigt, dass endliche Limiten durch endliche Produkte und Differenzkerne ausgedrückt werden können. Insbesondere erzeugt der Inklusionsfunctor daher alle endlichen Kolimiten.

- (ii) Beliebige in  $\mathcal{Top}$  gebildete Koprodukte, d.h. disjunkte Vereinigungen lokal proendlicher Räume, sind wieder lokal proendlich. Die universelle Eigenschaft wird von  $\mathcal{Top}$  geerbt.

□

**Satz 5.29**

Für die Kategorie  $\mathcal{Top}_{L,P}$  gilt:

- (i) Der Kompaktifizierungsfunctor  $\mathcal{Top}_{L,P} \xrightarrow{C} \mathcal{Top}_C$  erzeugt projektive Limiten.
- (ii) Der Inklusionsfunctor  $\mathcal{Top}_{L,P} \hookrightarrow \mathcal{Top}$  erzeugt
  - a) projektive Limiten,
  - b) Differenzkerne und
  - c) endliche Koprodukte.
- (iii) Der Inklusionsfunctor  $\mathcal{Top}_C \hookrightarrow \mathcal{Top}_{L,P}$  vertauscht mit
  - a) genau den Limiten, deren Indexkategorie nicht leer ist, und
  - b) endlichen Kolimiten.

*Beachte:* Die Limiten des Funktors  $\emptyset \longrightarrow \mathcal{Top}_C$  sind genau die finalen Objekte in  $\mathcal{Top}_C$ , d.h. Ein-Punkt-Räume.

- (iv) Die Kategorie  $\mathcal{Top}_{L,P}$  besitzt kein terminales Objekt.

*Beweis.*

- (i) Es sei  $(X_i, f_{i,j})_{i \in I}$  ein projektives System in  $\mathcal{T}op_{L,P}$ . Dann ist  $(\hat{X}_i, \hat{f}_{i,j})$  ein projektives System in  $\mathcal{T}op_C$  und besitzt dort einen Limes  $(\varprojlim_i \hat{X}_i \xrightarrow{\pi_i} \hat{X}_i)$ . Es sei  $x \in \varprojlim_i \hat{X}_i$  mit  $\pi_i(x) = 0$  für ein  $i$ . Für jedes weitere  $j$  gibt es dann ein  $i, j \geq k \in I$ . Wegen  $f_{k,i} \circ \pi_k = \pi_i$  gilt

$$\pi_j(x) = f_{k,j}(\pi_k(x)) \in f_{k,j}(f_{k,i}^{-1}(\pi_i(x))) = f_{k,j}(f_{k,i}^{-1}(0)) = f_{k,j}(\{0\}) = \{0\}$$

und damit  $\pi_j(x) = 0$ . Da der projektive Limes in  $\mathcal{T}op_C$  nach Satz 5.27 (iii) in  $\mathcal{T}op$  gebildet werden kann und dort als Teilmenge des Produkts  $\prod_i \hat{X}_i$  explizit konstruiert werden kann, impliziert dies  $\pi_i^{-1}(0) = \{0\}$  für alle  $i \in I$ .

Zeige nun, dass  $(L := (\varprojlim_i \hat{X}_i) \setminus \{0\} \xrightarrow{p_i = \pi_i|_L} X_i)$  ein Limesdiagramm in  $\mathcal{T}op_{L,P}$  ist. Zunächst ist  $\varprojlim_i \hat{X}_i$  hausdorffsch und damit  $\{0\}$  darin abgeschlossen, so dass  $L$  darin offen und als offene Teilmenge eines proendlichen Raums lokal proendlich ist. Insbesondere ist  $\varprojlim_i \hat{X}_i \cong \hat{L}$  nach der universellen Eigenschaft der Einpunktkompaktifizierung (Bou66a, I.9.8 Theorem 4 (Alexandroff)). Nach (Bou66a, I.10.1 Proposition 3) sind alle  $p_i = \pi_i|_{\pi_i^{-1}(X_i)}$  eigentlich, so dass das angegebene Limesdiagramm tatsächlich in  $\mathcal{T}op_{L,P}$  liegt.

Für alle  $X \in \mathcal{T}op_{L,P}$  und alle Familien  $g_i \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op_{L,P}}(X, X_i)$ , die mit den Übergangsabbildungen vertauschen, vertauschen auch  $\hat{g}_i$  mit den Übergangsabbildungen  $\hat{f}_{i,j}$ , so dass nach der universellen Eigenschaft des Limes in  $\mathcal{T}op_C$  ein eindeutiges  $\hat{X} \xrightarrow{f} \varprojlim_i \hat{X}_i$  existiert mit  $\pi_i \circ f = \hat{g}_i$  für alle  $i \in I$ . Für alle  $x \in X$  gilt

$$f(x) = 0 \iff g_i(x) = \pi_i \circ f(x) = 0 \quad \forall i \in I \iff x = 0,$$

so dass  $f^{-1}(L) = X$  ist. Folglich ist  $f' = f|_{f^{-1}(L)}$  eigentlich und es gilt  $p_i \circ f' = g_i$  für alle  $i \in I$ . Ein  $f'$  mit diesen Kommutativitätseigenschaften ist eindeutig, da  $f$  eindeutig ist.

- (ii) a) Es sei  $J \xrightarrow{F} \mathcal{T}op_{L,P}$  ein Diagramm und  $J$  eine gerichtete Menge. Im Folgenden sei unterhalb eines Limes die Kategorie vermerkt, in welcher dieser gebildet wurde. Zunächst beachte man, dass die topologischen Einbettungen  $F(j) \xrightarrow{\iota_j} \hat{F}(j)$  für alle  $j \in J$  nach der universellen Eigenschaft des Limes in  $\mathcal{T}op$  eine stetige Abbildung  $\varprojlim_{\mathcal{T}op} F \xrightarrow{\iota} \varprojlim_{\mathcal{T}op} (C \circ F)$  induzieren. Nach der Konstruktion des Limes in  $\mathcal{T}op$  als Teilmenge des Produkts impliziert die Injektivität aller  $\iota_j$ , dass auch  $\iota$  injektiv ist. Nun trägt  $\varprojlim_{\mathcal{T}op} F$  die Initialtopologie bezüglich der Limesprojektionen und alle  $F(j)$  als topologische Einbettungen wiederum die Initialtopologie bezüglich der  $\iota_j$ . Da  $\iota$  injektiv ist und nach Konstruktion alle Diagramme der Form

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{\mathcal{T}op} F & \xrightarrow{\iota} & \varprojlim_{\mathcal{T}op} (C \circ F) \\ \pi_j \downarrow & & \downarrow \pi_j \\ F(j) & \xrightarrow{\iota_j} & \hat{F}(j) \end{array}$$

kommutieren und außerdem  $\varprojlim_{\mathcal{T}op} (C \circ F)$  die Initialtopologie bezüglich seiner Limesprojektionen trägt, trägt auch  $\varprojlim_{\mathcal{T}op} F$  die Initialtopologie bezüglich  $\iota$ . Nach Lemma 5.5 (iv) ist  $\iota$  dann eine topologische Einbettung. Nach Konstruktion des Limes in  $\mathcal{T}op$  ist  $\varprojlim_{\mathcal{T}op} (C \circ F) = \iota(\varprojlim_{\mathcal{T}op} F) \cup \{0\}$ . Punkt (i) und Satz 5.27 (iii) zeigen, dass

$$\varprojlim_{\mathcal{T}op} (C \circ F) = \varprojlim_{\mathcal{T}op_C} (C \circ F) = C(\varprojlim_{\mathcal{T}op_{L,P}} F)$$

gilt. Damit erhält man einen Homöomorphismus  $\lim_{\mathcal{Top}} F \cong \lim_{\mathcal{Top}_{L,P}} F$ , so dass insgesamt der Inklusionsfunctor  $\mathcal{Top}_{L,P} \hookrightarrow \mathcal{Top}$  mit projektiven Limiten vertauscht. Da außerdem  $\mathcal{Top}_{L,P}$  nach (i) und wegen der Vollständigkeit von  $\mathcal{Top}_C$  beliebige projektive Limiten besitzt und der Inklusionsfunctor auf Objekten injektiv und treu ist, erzeugt dieser auch projektive Limiten.

- b) Der Inklusionsfunctor erzeugt Differenzkerne, da diese abgeschlossene Teilmengen des Quellraums sind, wie im Beweis von Satz 5.28 (i) gezeigt wurde, und da Inklusionen abgeschlossener Teilräume nach (Bou66a, I.10.1 Proposition 2) eigentlich sind.
- c) Es seien  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{Top}_{L,P}$ . Dann ist  $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$  wieder hausdorffsch und total unzusammenhängend und besitzt eine topologische Basis aus offenen Kompakta, so dass auch  $X$  lokal proendlich ist. Mit Bemerkung 5.10 (i) verifiziert man, dass die kanonischen Inklusionen  $X_i \xhookrightarrow{\iota_i} X$  eigentlich sind. Falls  $Y \in \mathcal{Top}_{L,P}$  und  $f_i \in \text{Hom}_{\mathcal{Top}_{L,P}}(X_i, Y)$  für  $1 \leq i \leq k$ , dann ist die Verklebung

$$f = \bigcup_{i=1}^k f_i : X \longrightarrow Y, \quad f|_{X_i} = f_i$$

eigentlich, denn für alle kompakten  $K \subseteq Y$  ist  $f^{-1}(K) = \bigcup_{i=1}^k f_i^{-1}(K)$  als endliche Vereinigung von Kompakta selbst kompakt. Damit ist  $(X_i \xhookrightarrow{\iota_i} X)_{1 \leq i \leq k}$  ein Koproduct-Diagramm in  $\mathcal{Top}_{L,P}$ .

- (iii) a) Es sei  $\emptyset \neq J \xrightarrow{F} \mathcal{Top}_C$  ein Diagramm. Es sei nun  $(X \xrightarrow{f_j} F(j))_{j \in J}$  eine Familie stetiger, eigentlicher Abbildungen, die mit den Übergangsabbildungen verträglich ist. Dann muss  $X$  kompakt sein, da es keine eigentlichen, stetigen Abbildungen von nicht kompakten Räumen in kompakte Räume  $F(j)$  gibt. Ist  $X$  kompakt, dann ist  $X$  proendlich, so dass der in  $\mathcal{Top}_C$  gebildete Limes auch in  $\mathcal{Top}_{L,P}$  noch seine universelle Eigenschaft erfüllt.

Jede einpunktige Menge ist ein finales Objekt in  $\mathcal{Top}_C$ , aber nicht in  $\mathcal{Top}_{L,P}$ , da es keine eigentlichen, stetigen Abbildungen von lokal kompakten, aber nicht-kompakten Räumen in den kompakten Raum der einpunktigen Menge gibt.

- b) Der Inklusionsfunctor  $\mathcal{Top}_C \hookrightarrow \mathcal{Top}_{L,P}$  vertauscht wegen (ii) (a) und Satz 5.27 (iii) mit endlichen Koproducten.

Es sei nun

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \xrightarrow{c} C \\ & \xrightarrow{g} & \end{array}$$

ein Differenzkokerndiagramm in  $\mathcal{Top}_C$ . Für  $X \in \mathcal{Top}_{L,P}$  und  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{Top}_{L,P}}(B, X)$  mit  $h \circ f = h \circ g$  ist  $h(B)$  kompakt, da  $h$  stetig und  $B$  kompakt ist. Es sei  $h(B) \xhookrightarrow{\iota} X$  die kanonische Inklusion, die nach Satz 5.18 eigentlich ist. Nach der universellen Eigenschaft in  $\mathcal{Top}_C$  existiert also ein stetiges  $C \xrightarrow{h'} h(B)$ , so dass folgendes Diagramm

kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{c} & C \\
 & \xrightarrow{g} & & & \downarrow \exists! h' \\
 & & & & h(B) \\
 & & & \searrow h| & \downarrow \iota \\
 & & & & X \\
 & & \searrow h & & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

Folglich ist  $c$  auch ein Differenzkokern in  $\mathcal{T}op_{L,P}$ .

Der Inklusionsfunctor  $\mathcal{T}op_C \hookrightarrow \mathcal{T}op_{L,P}$  vertauscht also mit endlichen Koproducten und Differenzkokernen, so dass er nach der dualen Aussage von (AHS06, Proposition 13.3) mit endlichen Kolimiten vertauscht, da  $\mathcal{T}op_C$  nach Satz 5.27 (ii) kovollständig ist.

- (iv) Angenommen es gibt ein terminales Objekt  $T$  in  $\mathcal{T}op_{L,P}$ . Angenommen  $T$  enthielte zwei verschiedene Punkte  $x_1, x_2 \in T$ . Dann gibt es zwei stetige, eigentliche Abbildungen vom Ein-Punkt-Raum nach  $T$ , nämlich eine Abbildung auf den einen und eine Abbildung auf den anderen Punkt. Dies ist ein Widerspruch zur universellen Eigenschaft eines terminalen Objekts.  $T$  kann nicht leer sein, da es keine Abbildungen einer nicht-leeren Menge in die leere Menge gibt, was nochmals ein Widerspruch zur universellen Eigenschaft wäre. Also ist  $T$  ein Ein-Punkt-Raum. Es sei  $X$  ein unendlicher, diskreter Raum. Dann ist  $X$  lokal proendlich und es gibt nach der universellen Eigenschaft eine eindeutige stetige, eigentliche Abbildung  $X \rightarrow T$ . Da  $T$  aus nur einem Element besteht, schickt diese Abbildung alles auf dieses eine Element. Damit ist das Urbild dieses Elements ganz  $X$ , aber per Konstruktion ist  $X$  unendlich und diskret und damit insbesondere nicht kompakt, so dass diese Abbildung nicht eigentlich sein kann. Es kann also kein terminales Objekt geben.

□

## 5.2 (Lokal) Proendliche und eigentliche Monoide

Nachdem nun die topologischen Grundlagen behandelt wurden, können schließlich die (lokal) proendlichen, eigentlichen Monoide definiert werden, die sich als die geeigneten Objekte für die topologischen (Schief-)Monoidringe herausstellen. Man bemerkt, dass sich viele Eigenschaften der Kategorie  $\mathcal{T}op_{L,P}$  auf diese Kategorie  $\mathcal{T}Mon_{L,P}$  übertragen lassen.

### 5.2.1 (Lokal) Proendliche und eigentliche Monoide

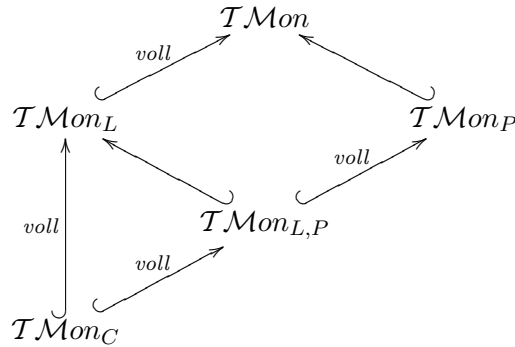
#### Definition 5.30

Ein topologisches Monoid  $M$  heißt ...

- (i) ... **(lokal) proendlich**, wenn der unterliegende topologische Raum (lokal) proendlich ist.
- (ii) ... **eigentlich**, wenn die Verknüpfungsabbildung  $M \times M \xrightarrow{\mu} M$  eigentlich ist.

Es bezeichne  $\mathcal{T}Mon$  die Kategorie der topologischen Monoide mit den stetigen Monoidhomomorphismen als Morphismen. Es sei  $\mathcal{T}Mon_C$  die volle Teilkategorie der proendlichen Monoide und  $\mathcal{T}Mon_L$  die volle Teilkategorie der lokal proendlichen Monoide. Weiterhin sei  $\mathcal{T}Mon_P$  die

Teilkategorie der eigentlichen topologischen Monoide, in der auch alle Morphismen eigentlich sind, sowie  $\mathcal{T}Mon_{L,P} = \mathcal{T}Mon_L \cap \mathcal{T}Mon_P$ . Man erhält folgendes Diagramm von Kategorien:



(vgl. Definition 5.8)

**Bemerkung 5.31**

Nach Beispiel 3.4 ist  $(\mathcal{T}op, \times, \{1\})$  monoidal und per Definition ist  $\mathcal{T}Mon = \mathcal{T}op\text{-}Mon$ .

- (i) Die Einschränkungen des Bifunktors  $\mathcal{T}op \times \mathcal{T}op \xrightarrow{-\times-} \mathcal{T}op$  auf die Kategorien  $\mathcal{T}op_P, \mathcal{T}op_C, \mathcal{T}op_L, \mathcal{T}op_{L,P}$  sind ebenfalls Bifunktoren auf der jeweiligen Kategorie.

Insbesondere bilden die Einschränkungen ebenfalls monoidale Kategorien, da der einpunktige Raum in allen Kategorien enthalten ist.

- (ii) Per Definition gilt  $\mathcal{T}Mon_P = \mathcal{T}op_P\text{-}Mon, \mathcal{T}Mon_C = \mathcal{T}op_C\text{-}Mon$ , usw.

*Beweis.*

- (i) Für zwei proendliche Räume  $X$  und  $Y$  ist wegen Satz 5.27 (i) auch ihr Produkt proendlich. Sind  $X$  und  $Y$  lokal proendlich, dann ist  $X \times Y \subseteq \hat{X} \times \hat{Y}$  als offene Teilmenge eines proendlichen Raums ebenfalls lokal proendlich. Nach (Bou66a, I.10.2 Lemma 2) sind Produkte eigentlicher Abbildungen wieder eigentlich. Die natürlichen Isomorphismen aus Proposition 3.2 lassen sich auf die jeweilige Kategorie einschränken, so dass diese wiederum eine monoidale Kategorie bilden.

□

**Bemerkung 5.32**

Abgeschlossene Teilmonoide eigentlicher Monoide sind wieder eigentlich.

*Beweis.* Es sei  $N \leq M$  ein abgeschlossenes Teilmonoid eines eigentlichen Monoids  $M$ . Nach (Bou66a, I.10.2 Theorem 1) ist eine stetige Abbildung genau dann eigentlich, wenn sie abgeschlossen ist und das Urbild jedes Punktes quasi-kompakt ist. Da die Topologie auf  $N \times N \subseteq M \times M$  die Teilraumtopologie ist, ist  $\mu_N$  abgeschlossen. Die andere Bedingung wird direkt von  $\mu_M$  geerbt.

□

**Bemerkung 5.33**

Es sei  $M$  ein eigentliches Monoid.

Dann ist die Einheitengruppe  $M^\times = \{m \in M; \exists n \in M : mn = nm = 1\}$  ein quasi-kompaktes Teilmonoid von  $M$ .

Insbesondere ist  $M^\times$  proendlich, wenn  $M$  zusätzlich lokal proendlich ist.

*Beweis.* Da  $M$  eigentlich ist, ist  $\mu^{-1}(1) \subseteq M \times M$  quasi-kompakt nach Bemerkung 5.10. Aufgrund der Stetigkeit der Projektionen sind dann auch  $E_r = \pi_1(\mu^{-1}(1))$  und  $E_l = \pi_2(\mu^{-1}(1))$  quasi-kompakt. Es sei  $m \in E = E_l \cap E_r$ . Nach Konstruktion gibt es dann  $l, r \in M$  mit  $mr = lm = 1$ . Folglich gilt  $l = l(mr) = (lm)r = r$ , so dass  $l = r$  ein Inverses zu  $m \in M$  ist und damit  $m \in M^\times$  ist. Umgekehrt ist für jedes  $m \in M^\times$  schon  $m \in E$  wegen  $mn = nm = 1$  mit einem  $n \in M$ , d.h.  $m \in E_r \cap E_l = E$ . Folglich ist  $M^\times = E$  quasi-kompakt.  $\square$

### 5.2.2 Die Einpunktkompaktifizierung lokal proendlicher Monoide

Wie schon für lokal proendliche Räum, gibt es auch für lokal proendliche, eigentliche Monoide die Konstruktion der Einpunktkompaktifizierung, die analog einen Funktor  $\mathcal{T}Mon_{L,P} \longrightarrow \mathcal{T}Mon_C$  definiert. Für spätere Beweise, die die topologischen und vollständigen (Schief-)Monoidringe betreffen, ist dieser Funktor essentiell. Prinzipiell jedes Problem im lokal proendlichen, eigentlichen Fall ist mit diesem Funktor in den proendlichen Fall übertragbar.

#### Satz 5.34

*Es sei  $M \in \mathcal{T}Mon_L$  ein lokal proendliches Monoid. Setzt man die Multiplikation von  $M$  auf die Einpunktkompaktifizierung  $\hat{M} = M \cup \{0\}$  durch  $0 \cdot m = m \cdot 0 = 0$  für  $m \in \hat{M}$  fort, dann ist  $\hat{M}$  ein Monoid und es gilt:*

*$M$  ist genau dann eigentlich, wenn  $\hat{M}$  ein topologisches Monoid ist.*

*Wegen Satz 5.12 ist dann insbesondere  $\hat{M} \in \mathcal{T}Mon_C$ .*

*Beweis.* Falls  $\hat{M} \in \mathcal{T}Mon_C$ , dann gilt für jedes Kompaktum  $K \subseteq M$ , dass  $\mu_M^{-1}(K) \subseteq \hat{M} \times \hat{M}$  kompakt ist, da  $M$  ein Hausdorff-Raum, also  $K \subseteq M$  abgeschlossen ist. Da  $\mu_{\hat{M}}$  stetig ist, ist auch  $\mu_{\hat{M}}^{-1}(K) \subseteq \hat{M} \times \hat{M}$  abgeschlossen und damit kompakt, da  $\hat{M} \times \hat{M}$  nach dem Satz von Tychonoff kompakt ist. Aber da  $\mu_M^{-1}(K) = \mu_{\hat{M}}^{-1}(K) \subseteq M \times M$  ist, impliziert dies die Kompaktheit von  $\mu_M^{-1}(K)$ , so dass insgesamt  $\mu_M$  eigentlich ist.

Sei umgekehrt  $U \subseteq \hat{M}$  eine offene Menge. Für den Fall, dass  $0 \notin U$  ist, ist  $\mu_M^{-1}(U) \subseteq M \times M$  offen, da  $\mu_M$  stetig ist. Folglich ist die Menge  $\mu_M^{-1}(U) = \mu_{\hat{M}}^{-1}(U)$  offen in  $\hat{M} \times \hat{M}$  nach Definition der Topologie auf  $\hat{M}$ . Falls  $0 \in U$  ist, dann ist nach Definition der Topologie auf  $\hat{M}$  die Menge  $\hat{M} \setminus U \subseteq M$  kompakt. Da  $\mu_M$  eigentlich ist, ist auch  $\mu_M^{-1}(\hat{M} \setminus U) \subseteq M \times M$  kompakt und daher abgeschlossen in  $\hat{M} \times \hat{M}$ , da  $\hat{M}$  ein Hausdorff-Raum ist. Wegen der Surjektivität von  $\mu_{\hat{M}}$  ist schließlich  $\mu_{\hat{M}}^{-1}(U) = (\hat{M} \times \hat{M}) \setminus \mu_M^{-1}(\hat{M} \setminus U)$  offen in  $\hat{M} \times \hat{M}$ .  $\square$

#### Korollar 5.35

*Man erhält einen treuen, essentiell injektiven Kompaktifizierungsfunktor (vgl. Korollar 5.14)*

$$C : \mathcal{T}Mon_{L,P} \longrightarrow \mathcal{T}Mon_C, \quad M \longmapsto \hat{M}$$

### 5.2.3 Quotienten und Relationenverbände topologischer Monoide

Wie bereits für  $\mathcal{T}op_P$  gesehen ist auch  $\mathcal{T}Mon_P$  (Epi, Mono)-strukturiert. Ebenso übertragen sich alle Eigenschaften der Äquivalenzrelationen lokal proendlicher Räume auf die Kongruenzen lokal proendlicher, eigentlicher Monoide. Wichtig für die spätere Charakterisierung proendlicher Monoide ist das Analogon Korollar 5.42 zu Korollar 5.24.

**Definition 5.36**

Für ein Monoid  $M$  bezeichne  $\text{Cong}(M)$  die Menge der Kongruenzrelationen auf  $M$ . Aufgefasst als Teilmenge der Potenzmenge von  $M \times M$  trägt  $\text{Cong}(M)$  eine kanonische Halbordnung. Es sei nun  $M$  ein topologisches Monoid.

- (i) Eine Kongruenz  $R \in \text{Cong}(M)$  auf  $M$  heiÙe ...
  - ... **abgeschlossen**, wenn jede Kongruenzklasse von  $R$  abgeschlossen in  $M$  ist.
  - ... **offen**, wenn jede Klasse von  $R$  offen in  $M$  ist.
  - ... **kompakt**, wenn jede Klasse von  $R$  abgeschlossen in  $M$  und quasi-kompakt ist.
- (ii) Weiterhin bezeichne ...
  - ...  $\text{Cong}_A(M)$  die Teilmenge der abgeschlossenen Kongruenzen auf  $M$ .
  - ...  $\text{Cong}_O(M)$  die Teilmenge der offenen Kongruenzen auf  $M$ .
  - ...  $\text{Cong}_C(M)$  die Teilmenge der kompakten Kongruenzen auf  $M$ .

**Bemerkung 5.37**

Es sei  $G$  eine topologische Gruppe.

- (i) Es gibt eine Bijektion

$$\phi : \text{Cong}(G) \xrightarrow{\sim} \{N \triangleleft G\}, \quad R \mapsto [1]_R, \quad \pi_N \times \pi_N^{-1}(\Delta_{G/N}) \longleftarrow N$$

wobei  $G \xrightarrow{\pi_N} G/N$  die kanonische Projektion für einen Normalteiler  $N \triangleleft G$  ist.

Die Abbildung  $\phi$  schränkt sich zu folgenden Bijektionen ein:

- $\phi| : \text{Cong}_A(N) \xrightarrow{\sim} \{N \triangleleft G \text{ abgeschlossen}\}$
  - $\phi| : \text{Cong}_O(N) \xrightarrow{\sim} \{N \triangleleft G \text{ offen}\}$
  - $\phi| : \text{Cong}_C(N) \xrightarrow{\sim} \{N \triangleleft G \text{ quasi-kompakt und abgeschlossen}\}$
- (ii) Für alle  $N \triangleleft G$  ist  $G/N$  versehen mit der Quotienten-Topologie eine topologische Gruppe (wie (War93, I.5.4 Theorem)).

**Bemerkung 5.38**

Es sei  $M$  ein topologisches Monoid und  $R$  eine Kongruenzrelation.

Dann ist  $M/R$  versehen mit der Quotiententopologie im Allgemeinen kein topologisches Monoid.

**Lemma 5.39**

Es sei  $M$  ein topologisches Monoid und  $R \in \text{Cong}_C(M)$ . Für  $M/R$  versehen mit der Quotiententopologie gilt:

- (i) Die kanonische Projektion  $M \xrightarrow{\pi_R} M/R$  ist eigentlich.
- (ii) Falls  $M$  hausdorffsch ist, dann gilt:  
 $M/R$  ist genau dann lokal kompakt, wenn  $M$  lokal kompakt ist.
- (iii)  $M/R$  ist ein topologisches, hausdorffsches Monoid.
- (iv)  $M$  ist genau dann eigentlich, wenn  $M/R$  eigentlich ist.

*Beweis.* (i) und (ii) gelten nach Lemma 5.19 (iii).

(iii) Nach (Bou66a, I.10.2 Lemma 2) ist  $\pi_R \times \pi_R$  eigentlich und wegen Bemerkung 5.10 (i) insbesondere abgeschlossen. Nach Definition der Multiplikation auf  $M/R$  kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{\pi_R \times \pi_R} & M/R \times M/R \\ \mu_M \downarrow & & \downarrow \mu_{M/R} \\ M & \xrightarrow{\pi_R} & M/R \end{array}$$

Für ein abgeschlossenes  $A \subseteq M/R$  ist auch  $\mu_{M/R}^{-1}(A) = (\pi_R \times \pi_R)((\pi_R \circ \mu_M)^{-1}(A)) \subseteq M/R \times M/R$  abgeschlossen, da  $\pi_R \times \pi_R$  abgeschlossen ist. Folglich ist  $\mu_{M/R}$  stetig und  $M/R$  ein topologisches Monoid. Wegen Lemma 5.19 (i) ist  $M/R$  ein Hausdorff-Raum.

(iv) Angenommen  $M$  ist eigentlich. Als Komposition zweier eigentlicher Abbildungen ist dann  $\mu_{M/R} \circ (\pi_R \times \pi_R) = \pi_R \circ \mu_M$  wegen (Bou66a, I.10.1 Proposition 5 a)) eigentlich und nach (Bou66a, I.10.1 Proposition 5 b)) ist auch  $\mu_{M/R}$  eigentlich, da  $(\pi_R \times \pi_R)$  surjektiv ist.

Umgekehrt ist wieder  $\pi_R \circ \mu_S = \mu_{S/R} \circ (\pi_R \times \pi_R)$  als Komposition eigentlicher Abbildungen eigentlich und da  $M/R$  hausdorffsch ist aufgrund von Lemma 5.19 (ii), ist nach (Bou66a, I.10.1 Proposition 5 d)) auch  $\mu_S$  eigentlich.

□

**Satz 5.40** (Homomorphiesatz für topologische Monoide)

Es seien  $M$  und  $N$  topologische Monoide. Für alle eigentlichen  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mon}}(M, N)$  erhält man folgendes Diagramm topologischer Monoide

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \pi_{\ker f} \downarrow & & \uparrow \iota_{f(M)} \\ M/\ker f & \xrightarrow{\bar{f}} & f(M) \end{array}$$

wobei  $\ker f \in \text{Cong}_C(M)$  und  $f(M) \subseteq N$  ein abgeschlossenes Teilmonoid ist.

*Beweis.* Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem Homöomorphiesatz 5.18 und Lemma 5.39.

□

**Bemerkung 5.41**

Da jede Kongruenz als Teilmenge von  $M \times M$  aufgefasst werden kann, trägt  $\text{Cong}(M)$  eine kanonische Halbordnung. Es gilt:

(i)  $\text{Cong}(M)$  ist ein vollständiger, distributiver Verband. Für eine Teilmenge  $S \subseteq \text{Cong}(M)$  gilt

$$\bigwedge S = \bigcap S, \quad \bigvee S = \bigcap_{\substack{R' \in \text{Cong}(M), \\ R \subseteq R' \forall R \in S}} R'.$$

(ii)  $\text{Cong}_A(M)$  ist ein vollständiger, distributiver Verband.



- (iii)  $\text{Cong}_O(M) \leq \text{Cong}_A(M)$  ist ein distributiver Teilverband, der Suprema nicht-leerer Teilmengen besitzt.
- (iv)  $\text{Cong}_C(M) \leq \text{Cong}_A(M)$  ist ein distributiver Teilverband, der Infima nicht-leerer Teilmengen besitzt.

Für jeden Monoidhomomorphismus  $M \xrightarrow{f} N$  definiert  $\text{Cong}(N) \xrightarrow{(f \times f)^{-1}} \text{Cong}(M)$  einen Verbandshomomorphismus, so dass man die (kontravarianten) Funktoren  $\text{Mon} \xrightarrow{\text{Cong}} \mathcal{P}os_{\mathbb{W}, \mathbb{A}, D}$ ,  $\mathcal{T}\text{Mon} \xrightarrow{\text{Cong}_A} \mathcal{P}os_{\mathbb{W}, \mathbb{A}, D}$ ,  $\mathcal{T}\text{Mon} \xrightarrow{\text{Cong}_O} \mathcal{P}os_{\vee, \wedge, D}$ ,  $\mathcal{T}\text{Mon}_P \xrightarrow{\text{Cong}_C} \mathcal{P}os_{\vee, \wedge, D}$  erhält.

*Beweis.* Es sei  $S \subseteq \text{Cong}(M)$  und  $I = \bigcap_{R \in S} R$ . Für  $m, m', n, n' \in M$  gilt

$$mIm', nIn' \Leftrightarrow mRm', nRn' \quad \forall R \in S \quad \Rightarrow \quad (mn)R(m'n') \quad \forall R \in S \quad \Leftrightarrow \quad (mn)I(m'n'),$$

so dass  $I$  selbst wieder eine Kongruenz ist. Folglich besitzt  $\text{Cong}(M)$  Infima. Der Rest folgt aus Korollar 5.22. □

#### Korollar 5.42

Es sei  $M$  ein proendliches Monoid. Für  $R \in \text{Cong}(M)$  sind äquivalent:

- (i)  $R = \bigcap_{S \in \text{Cong}_O(M)} S$
- (ii)  $M/R \cong \varprojlim_{S \in \text{Cong}_O(M)} M/S$

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Proposition 5.23. □

### 5.2.4 Charakterisierung proendlicher Monoide

Ein interessanter Punkt ist, dass sich proendliche Monoide auf die gleiche Weise charakterisieren lassen wie proendliche Räume bzw. Gruppen. Der Schlüssel zum Beweis dieser Charakterisierung aus Lemma 5.46 sind die sogenannten syntaktischen Kongruenzen, die im Bereich der theoretischen Informatik, im Speziellen in der Spracherkennung eine wichtige Rolle spielen. Anhand dieser Kongruenzen sieht man, dass die offenen Kongruenzen eine „dichte“ Teilmenge der offenen Äquivalenzrelationen bilden, da es nach Lemma 5.44 zu jeder offenen Äquivalenzrelation eine offene Kongruenz gibt, die kleiner ist als diese. Die Darstellung eines proendlichen Monoids als projektiver Limes endlicher, diskreter Monoide ist essentiell, wenn es in Kapitel 7 darum geht, nachzuweisen, dass die auf dem Monoidring eingeführte Topologie eine Ringtopologie ist.

#### Lemma 5.43

Es sei  $M$  ein Monoid. Für jedes  $m \in M$  definiert  $\mu_m(k, n) := kmn$  für  $k, n \in M$  eine Abbildung  $M \times M \rightarrow M$ . Eine Teilmenge  $S \subseteq M$  definiert mittels

$$mR_S n \iff \mu_n^{-1}(S) = \mu_m^{-1}(S)$$

für  $m, n \in M$  eine so genannte **syntaktische Kongruenz**  $R_S$  auf  $M$  mit den Eigenschaften:

- (i)  $S = \pi_{R_S}^{-1}(\pi_{R_S}(S))$
- (ii)  $R' \subseteq R_S$  für alle Kongruenzen  $R'$  auf  $M$  mit  $S = \pi_{R'}^{-1}(\pi_{R'}(S))$

Hierbei sind  $M \xrightarrow{\pi_{R_S}} M/R_S$  bzw.  $M \xrightarrow{\pi_{R'}} M/R'$  die kanonischen Projektionen.

*Beweis.* Nach Konstruktion ist die angegebene Relation eine Äquivalenzrelation. Es seien nun  $m, m', n, n' \in M$  mit  $mR_S m'$  und  $nR_S n'$ . Für  $x, y \in M$  gilt

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mu_{mn}^{-1}(S) &\iff x m n y \in S &\iff (x, n y) \in \mu_m^{-1}(S) = \mu_{m'}^{-1}(S) \\ &\iff x m' n y \in S &\iff (x m', y) \in \mu_n^{-1}(S) = \mu_{n'}^{-1}(S) \\ &\iff x m' n' y \in S &\iff (x, y) \in \mu_{m'n'}^{-1}(S), \end{aligned}$$

so dass  $(mn)R_S(m'n')$  und damit  $R_S$  eine Kongruenzrelation auf  $M$  ist.

- (i) Es sei  $mR_S s$  und  $s \in S$ . Wegen  $1 \cdot s \cdot 1 = s \in S$  ist  $(1, 1) \in \mu_s^{-1}(S) = \mu_m^{-1}(S)$ , so dass auch  $m = 1 \cdot m \cdot 1 \in S$  ist. Damit gilt  $S \subseteq \pi_{R_S}^{-1} \pi_{R_S}(S) = \bigcup_{s \in S} [s]_{R_S} \subseteq S$  bzw.  $\pi_{R_S}^{-1} \pi_{R_S}(S) = S$ .
- (ii) Es seien  $m, n \in M$  mit  $mR' n$ . Unter Benutzung der Voraussetzung  $\pi_{R'}^{-1}(\pi_{R'}(S)) = S$  und der Kongruenzeigenschaft von  $R'$  gilt

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mu_m^{-1}(S) &\iff x m y \in S \\ &\implies [x m y]_{R'} = [x m y]_{R'} = \pi_{R'}^{-1}(\pi_{R'}(x m y)) \subseteq \pi_{R'}^{-1}(\pi_{R'}(S)) = S \\ &\implies x n y \in S \implies (x, y) \in \mu_n^{-1}(S) \end{aligned}$$

und wegen Symmetrie ist  $\mu_m^{-1}(S) = \mu_n^{-1}(S)$  bzw.  $mR_S n$ . Also ist  $R' \subseteq R_S$ .

□

#### Lemma 5.44

Es sei  $M$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid. Für die in Lemma 5.43 konstruierten Kongruenzrelationen gilt:

Ist  $K \subseteq M$  ein offenes Kompaktum, dann ist  $M/R_K$  endlich und diskret. Außerdem gibt es maximal eine Kongruenzklasse  $[m] \in M/R_K$ , die nicht kompakt ist.

*Beweis.* Durch  $\nu(k, m, n) := k m n$  für  $k, m, n \in M$  wird eine eigentliche, stetige Abbildung  $M \times M \times M \xrightarrow{\nu} M$  definiert, denn  $\nu = \mu \circ (\mu, \text{id}_M)$  ist die Verkettung zweier eigentlicher, stetiger Abbildungen. Es sei  $K \subseteq M$  ein offenes Kompaktum.  $\nu^{-1}(K)$  ist offen und kompakt, d.h. es gibt per Definition der Produkttopologie eine Überdeckung  $\nu^{-1}(K) = \bigcup_i K_i \times L_i \times N_i$  mit offenen und kompakten Teilmengen  $K_i, L_i, N_i \subseteq M$ . Da  $\nu$  eigentlich ist und  $K$  kompakt, ist auch  $\nu^{-1}(K)$  kompakt, so dass eine endliche Teilüberdeckung ausreicht. Ohne Einschränkung sei daher  $\nu^{-1}(K) = (K_1 \times L_1 \times N_1) \cup \dots \cup (K_r \times L_r \times N_r)$  mit nicht-leeren  $K_i, L_i$  und  $N_i$  für  $1 \leq i \leq r$ . Es sei nun  $m \in M$ .

- Falls  $\mu_m^{-1}(K) = \emptyset$ , dann ist  $[m] = M \setminus (L_1 \cup \dots \cup L_r)$  offen, denn die  $L_i$  sind kompakt und damit abgeschlossen, da  $M$  ein Hausdorff-Raum ist.
- Falls  $\mu_m^{-1}(K) \neq \emptyset$ , gilt für  $x, y \in M$  die Äquivalenz

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mu_m^{-1}(K) &\iff x m y \in K &\iff (x, m, y) \in \nu^{-1}(K) \\ &\iff (x, y) \in \bigcup_{\substack{i=1, \dots, r \\ m \in L_i}} K_i \times N_i, \end{aligned}$$

so dass  $[m] = \left( \bigcap_{\substack{i=1, \dots, r \\ m \in L_i}} L_i \right) \setminus \left( \bigcup_{\substack{i=1, \dots, r \\ m \notin L_i}} L_i \right)$  offen und kompakt ist.

Damit ist  $M/R_K$  mit der Quotiententopologie diskret. Es gibt nur endlich viele Kombinationsmöglichkeiten in welchen  $L_i$  ein  $m \in M$  liegen kann und in welchen nicht. Mit der angegebenen Beschreibung von  $\mu_m^{-1}(K)$  gibt es deshalb nur endlich viele Äquivalenzklassen, so dass  $M/R_K$  endlich ist.  $\square$

**Lemma 5.45**

Es sei  $M$  ein proendliches Monoid und  $R \in \text{Cong}(M)$  eine Kongruenz auf  $M$ .

Dann gibt es für alle  $R \subseteq S \in \text{Equ}_O(M)$  eine offene Kongruenz  $T \in \text{Cong}_O(M)$ , so dass  $R \subseteq T \subseteq S$ .

*Beweis.* Da  $M$  kompakt und  $S$  offen, ist  $X/S$  diskret. Folglich gibt es Repräsentanten  $x_1, \dots, x_r \in X$ , so dass  $X = [x_1]_S \cup \dots \cup [x_r]_S$ . Da  $S$  offen und  $M$  kompakt ist, ist jedes  $K_i = [x_i]_S$  offen und kompakt für alle  $1 \leq i \leq r$ . Es sei  $T = R_{K_1} \cap \dots \cap R_{K_r}$ . Dann ist  $T \in \text{Cong}_O(M)$  wegen Lemma 5.44 und  $T \subseteq S$ , da  $[x]_S = \pi_T^{-1} \pi_T([x]_S)$  wegen Lemma 5.43 (i) für alle  $x \in X$ . Da aber  $R \subseteq S$  und folglich auch  $[x]_S = \pi_R^{-1} \pi_R([x]_S)$  für alle  $x \in X$  gilt, impliziert Lemma 5.43 (ii) schließlich auch  $R \subseteq T$ , womit die Behauptung gezeigt ist.  $\square$

**Lemma 5.46**

Ein topologisches Monoid  $M$  ist genau dann proendlich, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist

- (i)  $M$  ist der inverse Limes endlicher, diskreter Monoide.
- (ii)  $M$  ist hausdorffsch, kompakt und besitzt eine Basis aus offenen Kompakta.
- (iii)  $M$  ist hausdorffsch, kompakt und total unzusammenhängend.

*Beweis.* Für die Implikation „(i)  $\Leftarrow$  (ii)“ beachte, dass  $\Delta_M = \bigcap \text{Equ}_O(M) = \bigcap \text{Cong}_O(M)$  wegen Lemma 5.45 und Korollar 5.24. Mit Korollar 5.42 folgt dann

$$M \cong M/\Delta_M \cong \varprojlim_{R \in \text{Cong}_O(M)} M/R$$

Alle anderen Folgerungen gelten nach Lemma 5.2. <sup>1</sup>  $\square$

**Satz 5.47**

Es sei  $M$  ein proendliches Monoid.

Dann ist  $\text{Cong}_O(M) = \{R_{K_1} \cap \dots \cap R_{K_r}; K_i \subseteq M \text{ kompakt und offen}\}$ .

*Beweis.* Es sei  $R \in \text{Cong}_O(M)$  eine offene Kongruenz auf  $M$ . Der Quotient  $M/R$  ist diskret und daher endlich, da  $M$  proendlich, also insbesondere kompakt ist. Andernfalls bildeten die Kongruenzklassen von  $R$  eine unendliche, disjunkte, offene Überdeckung von  $M$ . Als Komplement der Vereinigung ihrer Nebenklassen ist jede Kongruenzklasse von  $R$  nicht nur offen, sondern auch abgeschlossen und daher kompakt, da  $M$  kompakt ist. Wähle Repräsentanten  $m_1, \dots, m_r \in M$  jeder Kongruenzklasse von  $R$  und setze  $S = R_{[m_1]} \cap \dots \cap R_{[m_r]}$ . Dann ist  $\pi_S^{-1}([m_i]_R) = [m_i]_R$  für alle  $1 \leq i \leq r$  wegen Lemma 5.43 (i), so dass  $R \subseteq S$ . Aussage (ii) ebenda impliziert  $R = S$ .  $\square$

<sup>1</sup>Die Idee diese so genannten „syntaktischen Kongruenzen“  $R_K$  zu verwenden, geht auf (Alm05, Theorem 3.1) zurück.

### 5.2.5 Wichtige Beispiele lokal proendlicher, eigentlicher Monoide

Abschließend sollen noch einige Beispiele für lokal proendliche, eigentliche Monoide angegeben werden. In der Algebra oder Zahlentheorie hat man es häufiger mit Gruppen als mit Monoiden zu tun, so würde der Zahlentheoretiker vermutlich als erstes nach lokal proendlichen, eigentlichen Gruppen suchen um eine Vorstellung von diesen Objekten zu bekommen. Es stellt sich jedoch heraus, dass jedes lokal proendliche, eigentliche Monoid, das eine Gruppe ist, immer proendlich ist. Neben den proendlichen Gruppen stellen die freien Monoide eine weitere wichtige Klasse lokal proendlicher Monoide dar. Dies können beliebige freie, diskrete Monoide sein, oder auch freie Monoide, die von einem lokal proendlichen Raum erzeugt werden.

#### Bemerkung 5.48

*Es sei  $G$  eine topologische, hausdorffsche Gruppe.*

*Dann ist  $G$  genau dann eigentlich, wenn sie kompakt ist.*

*Insbesondere ist jede lokal proendliche, eigentliche Gruppe proendlich.*

*Beweis.* Es sei  $G$  kompakt. Da  $G$  hausdorffsch ist, ist jedes Kompaktum  $K \subseteq G$  abgeschlossen in  $G$  und folglich  $\mu_G^{-1}(K) \subseteq G \times G$  eine abgeschlossene Teilmenge. Nach dem Satz von Tychonoff (Bou66a, I.9.5 Theorem 3) ist  $G \times G$  kompakt und damit auch  $\mu_G^{-1}(K)$ .

Umgekehrt gibt es für jedes  $g \in G$  einen Homöomorphismus

$$\phi_g : G \xrightarrow{\sim} \mu_G^{-1}(g), \quad h \mapsto (h, h^{-1}g),$$

denn  $\phi_g$  ist stetig, da  $\text{id}_G$ , die Inversenbildung und die Multiplikation mit  $g$  von rechts stetige Abbildungen auf  $G$  sind.  $\phi_g$  ist offen, da die Umkehrabbildung die Projektion auf erste Koordinate ist, welche nach Definition der Produkttopologie ebenfalls stetig ist. Da  $\mu_G$  eigentlich und daher  $\mu_G^{-1}(g)$  nach Bemerkung 5.10 (i) kompakt ist, muss auch  $G \cong \mu_G^{-1}(g)$  kompakt sein.  $\square$

#### Bemerkung 5.49

*Ein diskretes Monoid  $M$  ist genau dann eigentlich, wenn es folgende Eigenschaft erfüllt.*

(D) *Für jedes  $m \in M$  gibt es nur endlich viele verschiedene geordnete Paare  $(k, n) \in M \times M$ , so dass  $kn = m$  ist.*

*Diese Eigenschaft (D) wird auch "finite decomposition"-Eigenschaft genannt (vgl. (Bou74, Kapitel III §2.10)).*

*Beweis.* Erfüllt  $M$  die Eigenschaft (D) und ist  $K \subseteq M$  ein Kompaktum, dann ist  $K$  endlich, da  $M$  diskret ist. Folglich ist

$$\mu^{-1}(K) = \bigcup_{k \in K} \mu^{-1}(k)$$

eine endliche Vereinigung endlicher Mengen und damit selbst endlich und kompakt. Umgekehrt ist, falls  $\mu$  eigentlich ist, für jedes  $m \in M$  die Menge  $\mu^{-1}(m)$  kompakt und damit endlich, da  $M$  diskret ist.  $\square$

#### Bemerkung 5.50

*Für jede Menge  $S$  erfüllt das freie Monoid  $F(S)$  die Eigenschaft (D), so dass  $F(S)$  versehen mit der diskreten Topologie ein lokal proendliches, eigentliches Monoid ist.*

*Insbesondere bildet das diskrete, additive Monoid der natürlichen Zahlen (mit 0) als einfach erzeugtes freies Monoid ein eigentliches Monoid.*

**Proposition 5.51**

Eine weitere Klasse von Beispielen liefern die freien Monoide erzeugt von lokal proendlichen Räumen.

(i) Der Vergissfunktork  $\mathcal{T}Mon_L \xrightarrow{U} Top_L$  besitzt einen linksadjungierten freien Funktor

$$F : Top_L \longrightarrow \mathcal{T}Mon_L, \quad X \longmapsto F(X) = \bigcup_{k \geq 0} X^k.$$

(ii) Für alle  $X \in Top_L$  ist  $F(X) \in \mathcal{T}Mon_{L,P}$ .

*Beweis.*

(i) Nach Bemerkung 5.31 ist  $(Top_L, \times, \{1\})$  eine monoidale Kategorie. Nach Satz 5.28 (ii) besitzt  $Top_L$  beliebige Koprodukte, die vom Inklusionsfunktork  $Top_L \hookrightarrow Top$  erzeugt werden. Da für alle  $X \in Top$  die Funktoren  $Top \xrightarrow{(- \times X)} Top$  bzw.  $Top \xrightarrow{(X \times -)} Top$  mit beliebigen disjunkten Vereinigungen vertauschen, gilt das gleiche auch für  $X \in Top_L$  und die Einschränkung dieser Funktoren auf  $Top_L$ . Nach Satz 3.15 erhält man dann den angegebenen Funktor als Linksadjungierten.

(ii) Die Multiplikation auf  $F(X)$  für  $X \in Top_L$  ist per Konstruktion gegeben durch

$$\mu_{F(X)} : F(X) \times F(X) \longrightarrow F(X), \quad ((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n)) \longmapsto (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n).$$

Es sei nun  $K \subseteq F(X)$  ein offenes Kompaktum. Dann lässt sich  $K$  offen und disjunkt überdecken durch  $K = \bigcup_{k \geq 0} K \cap X^k$  nach Definition der Topologie der disjunkten Vereinigung. Da  $K$  kompakt ist, besitzt diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung, so dass es ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt mit  $K = \bigcup_{k=1}^n (K \cap X^k)$ . Für  $1 \leq k \leq n$  und  $K_k = K \cap X^k$  gilt

$$\mu_{F(X)}^{-1}(K_k) \subseteq (\{1\} \times K_k) \cup (K_k \times \{1\}) \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} ((L_1 \times \dots \times L_i) \times (L_{i+1} \times \dots \times L_n)) =: L$$

mit kompakten  $L_i = \pi_i(K_k)$ , wobei  $X^k \xrightarrow{\pi_i} X$  die kanonische Projektion auf die Koordinate  $i$  ist.  $X$  ist hausdorffsch und damit  $K_k \subseteq X^k \subseteq F(X)$  abgeschlossen. Die Stetigkeit von  $\mu_{F(X)}$  impliziert, dass dann  $\mu_{F(X)}^{-1}(K_k) \subseteq L$  als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums ebenfalls kompakt ist. Als endliche Vereinigung von Kompakta ist auch  $\mu_{F(X)}^{-1}(K) = \bigcup_{k=1}^n \mu_{F(X)}^{-1}(K_k)$  kompakt, so dass  $\mu_{F(X)}$  schließlich nach Lemma 5.11 eigentlich ist. □

## 5.3 Topologische $M$ -Mengen

### 5.3.1 (Lokal) Proendliche und eigentliche $M$ -Mengen

An dieser Stelle soll kurz auf die Kategorie der lokal proendlichen, eigentlichen  $M$ -Mengen eingegangen werden. Eigentlich wird diese Kategorie erst interessant, wenn man Tensorprodukte und darüber Tensormonoide erzeugt von  $M$ -Mengen definiert. Diese Konstruktionen öffnen jedoch ein weiteres großes unerforschtes Feld und haben keinen direkten Bezug zum Thema der topologischen und vollständigen Monoidringe, so dass sie aus diesen Gründen nicht mit in die

Arbeit aufgenommen wurden. Wie auch für Monoide kann man übrigens auch für proendliche, eigentliche  $M$ -Mengen eine Charakterisierung wie in Lemma 5.46 angeben.

Wichtig für die Theorie der topologischen und vollständigen Schiefmonoidringe werden die lokal proendlichen  $M$ -Mengen, da sie auch den Spezialfall der eigentlichen Operation eines lokal proendlichen, eigentlichen Monoids auf einem weiteren umfassen. Diese spielen für topologische semidirekte Produkte lokal proendlicher, eigentlicher Monoide eine Rolle. Nützlich hierfür ist vor allem wieder die Einpunktkompaktifizierung.

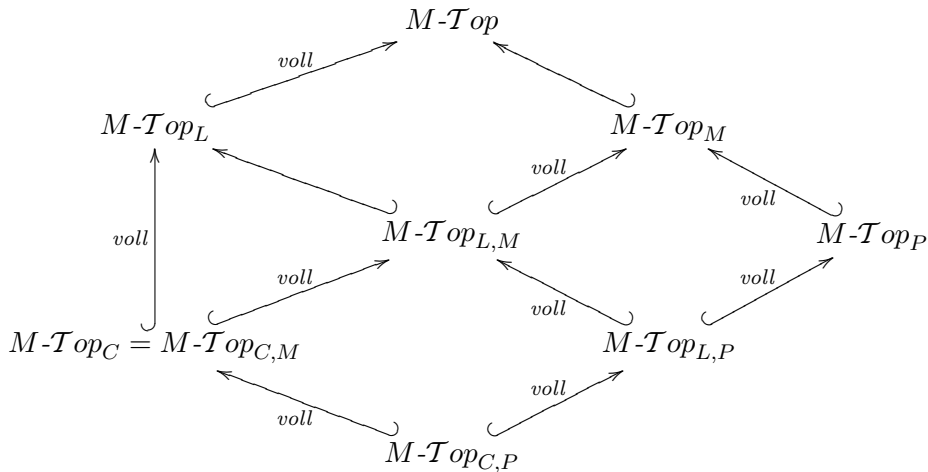
**Definition 5.52**

Es sei  $M$  ein topologisches Monoid. Eine topologische  $M$ -Linksmenge  $S \in M\text{-Top}$  heiÙe ...

- (i) ... **(lokal) proendlich**, wenn der unterliegende topologische Raum (lokal) proendlich ist.
- (ii) ... **eigentlich**, wenn die Verknüpfungsabbildung  $M \times S \xrightarrow{\mu_S} S$  eigentlich ist.
- (iii) ... **lokal  $M$ -eigentlich**, wenn es für alle quasi-kompakten  $K \subseteq S$  und alle  $m \in M$  eine offene Umgebung  $U_m \subseteq M$  und eine quasi-kompakte Teilmenge  $K_m \subseteq S$  gibt, so dass

$$\mu_S^{-1}(K) \cap (U_m \times S) \subseteq M \times K_m.$$

Wie bei den topologischen Monoiden kennzeichne der Index  $C$  bzw.  $L$  die volle Teilkategorie der proendlichen bzw. lokal proendlichen  $M$ -Linksmengen.  $M\text{-Top}_P$  bzw.  $M\text{-Top}_M$  bezeichne die Teilkategorie von  $M\text{-Top}$  der eigentlichen bzw. lokal  $M$ -eigentlichen  $M$ -Linksmengen mit jeweils den eigentlichen  $M$ -linkslinearen Abbildungen als Morphismen und  $M\text{-Top}_{L,M} \subseteq M\text{-Top}_M$  die volle Teilkategorie der  $M$ -eigentlichen  $M$ -Linksmengen. Indexkombinationen kennzeichnen die vollen Schnittkategorien. Man erhält folgendes Diagramm von Kategorien:



Es gilt  $M\text{-Top}_C = M\text{-Top}_{C,M}$ , da man für jedes Kompaktum  $K \subseteq S \in M\text{-Top}_C$  und jedes  $m \in M$  die Umgebung  $U_m = M$  und  $K_m = S$  wählen kann, so dass  $\mu_S^{-1}(K) \cap (U_m \times S) = \mu_S^{-1}(K) \subseteq M \times S = M \times K_m$  ist.

**Bemerkung 5.53**

Per Konstruktion stimmen die Definitionen von  $M\text{-Top}_C$  für  $M \in \mathcal{T}Mon_C$ ,  $M\text{-Top}_L$  für  $M \in \mathcal{T}op_L$  usw. mit den allgemeinen aus Definition 3.5 überein, so dass dies keine Widersprüche aufwirft.

**Bemerkung 5.54**

Es sei  $M$  ein topologisches Monoid.

Abgeschlossene  $M$ -Teilmengen (lokal  $M$ -)eigentlicher  $M$ -Linksmengen sind wieder (lokal  $M$ -)eigentlich.

*Beweis.* Es sei  $A \subseteq S$  eine abgeschlossene  $M$ -Teilmenge einer eigentlichen  $M$ -Teilmenge  $S$ . Da  $S$  eigentlich ist, ist  $\mu_A^{-1}(a) = (M \times A) \cap \mu_S^{-1}(a)$  quasi-kompakt für alle  $a \in A$  nach Bemerkung 5.10 (i) und da abgeschlossene Teilmengen quasi-kompakter Mengen selbst quasi-kompakt sind. Außerdem ist  $\mu_A$  abgeschlossen, da  $\mu_S$  dies ist und alle abgeschlossenen Teilmengen von  $A$  auch abgeschlossen in  $S$  sind. Folglich ist auch  $\mu_A$  nach Bemerkung 5.10 (i) eigentlich.

Ist  $A \subseteq S$  eine abgeschlossene  $M$ -Teilmenge einer lokal  $M$ -eigentlichen  $M$ -Menge  $S$ , dann gibt es für jedes Kompaktum  $K \subseteq S$  und jedes  $m \in M$  eine offene Umgebung  $m \in U_m \subseteq M$  und ein Kompaktum  $K_m \subseteq S$ , so dass  $\mu_S^{-1}(K) \cap (U_m \times S) \subseteq M \times K_m$ . Dies impliziert

$$\begin{aligned} \mu_A^{-1}(K) \cap (U_m \times A) &= \mu_S^{-1}(K) \cap (M \times A) \cap (U_m \times A) = (M \times A) \cap (\mu_S^{-1}(K) \cap (U_m \times S)) \\ &\subseteq (M \times A) \cap M \times K_m = M \times (A \cap K_m). \end{aligned}$$

Als abgeschlossene Teilmenge ist mit  $K_m$  auch  $A \cap K_m$  kompakt. □

**Lemma 5.55**

Es sei  $M$  ein topologisches Monoid und  $S$  eine lokal  $M$ -eigentliche  $M$ -Linksmenge.

Für jedes quasi-kompakte  $K_M \subseteq M$  und jedes Kompaktum  $K_S \subseteq S$  gibt es dann ein Kompaktum  $K'_S \subseteq S$ , so dass

$$\mu_S^{-1}(K_S) \cap (K_M \times S) \subseteq M \times K'_S.$$

*Beweis.* Für  $K_S$  gibt es nach Definition für jedes  $m \in M$  gewisse offene Umgebungen  $m \in U_m \subseteq M$  und Kompakta  $K_m \subseteq M$ , so dass  $\mu_\varphi^{-1}(K_S) \cap (U_m \times S) \subseteq M \times K_m$  für alle  $m \in M$ . Folglich ist  $K_M \subseteq \bigcup_{m \in M} U_m$ . Da  $K_M$  quasi-kompakt ist, genügen endlich viele  $U_m$ , so dass es  $m_1, \dots, m_r \in M$  gibt mit  $K_M \subseteq U_{m_1} \cup \dots \cup U_{m_r}$ . Dies impliziert

$$\mu_\varphi^{-1}(K_S) \cap (K_M \times S) \subseteq \bigcup_{i=1}^r \mu_\varphi^{-1}(K_S) \cap (U_{m_i} \times S) \subseteq M \times \bigcup_{i=1}^r K_{m_i}.$$

Als endliche Vereinigung von Kompakta ist dann  $K'_S = K_{m_1} \cup \dots \cup K_{m_r}$  ebenfalls kompakt und erfüllt die gewünschte Eigenschaft. □

**Korollar 5.56**

Es sei  $M$  ein topologisches Monoid. Für eine topologische  $M$ -Linksmenge gilt

- (i)  $S$  eigentlich  $\implies S$  lokal  $M$ -eigentlich
- (ii) Wenn  $M$  hausdorffsch, kompakt und  $S$  hausdorffsch ist, sind beide Eigenschaften äquivalent.

*Beweis.*

- (i) Für jedes quasi-kompakte  $K \subseteq S$  ist auch  $\mu_S^{-1}(K)$  quasi-kompakt nach Bemerkung 5.10 (ii). Für  $m \in M$  wähle  $U_m = M$  und  $K_m$  als das quasi-kompakte Bild von  $\mu_S^{-1}(K)$  unter der kanonischen, stetigen Projektion auf die  $S$ -Koordinate. Dann gilt

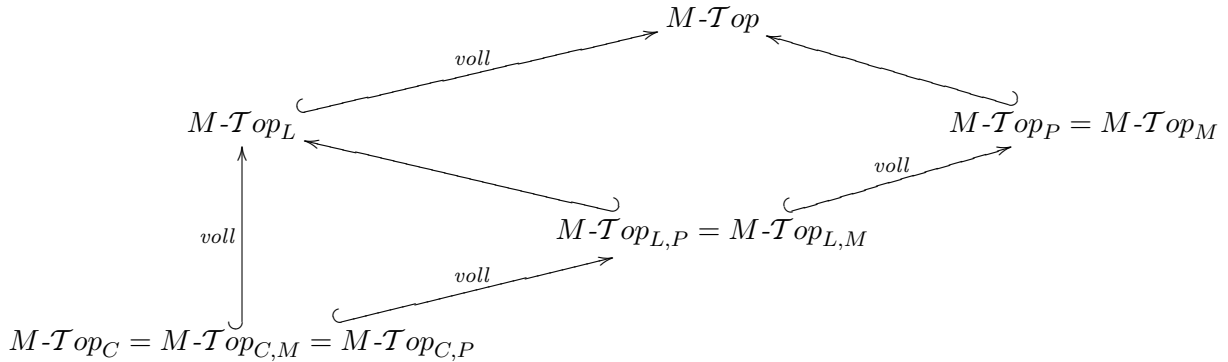
$$\mu_S^{-1}(K) \cap (M \times S) = \mu_S^{-1}(K) \subseteq M \times K_m.$$

- (ii) Es sei  $K_S \subseteq S$  kompakt. Wendet man Lemma 5.55 für  $K_M = M$  an, dann erhält man  $\mu_S^{-1}(K_S) = \mu_S^{-1}(K_S) \cap (M \times S) \subseteq M \times K'_S$  mit einem Kompaktum  $K'_S \subseteq S$ . Da  $S$  hausdorffsch ist, ist  $K_S \subseteq S$  abgeschlossen, und aufgrund der Stetigkeit von  $\mu_S$  ist auch  $\mu_S^{-1}(K_S) \subseteq M \times S$  abgeschlossen. Folglich ist  $\mu_S^{-1}(K_S)$  als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raums  $M \times K'_S$  selbst kompakt und damit  $S$  eigentlich nach Bemerkung 5.10 (ii).

□

**Korollar 5.57**

Für Hausdorffsche, kompakte Monoide  $M$  schränkt sich das Kategoriendiagramm aus Definition 5.52 ein zu dem Diagramm:



**5.3.2 Zusammenhang zwischen den  $M$ -Kategorien**

**Satz 5.58**

Es sei  $M$  ein topologisches Monoid und  $S \in M\text{-Top}_L$  eine lokal proendliche  $M$ -Linksmenge.

- Durch  $m \cdot 0 = 0$  für  $m \in M$  wird die Einpunktkompaktifizierung  $\hat{S} = S \cup \{0\}$  zu einer  $M$ -Linksmenge.
- Falls  $M \in \mathcal{T}Mon_{L,P}$ , dann wird  $\hat{S}$  durch  $0 \cdot s = 0$  für  $s \in \hat{S}$  zu einer  $\hat{M}$ -Linksmenge.

Es gilt (vgl. Satz 5.12):

- (i)  $S$  ist genau dann lokal  $M$ -eigentlich, wenn  $\hat{S} \in M\text{-Top}$ .  
 Insbesondere ist dann  $\hat{S} \in M\text{-Top}_C$  und  $\hat{S}$  ist genau dann eigentlich, wenn  $M$  quasi-kompakt ist.
- (ii) Für  $M \in \mathcal{T}Mon_{L,P}$  ist  $S$  genau dann eigentlich, wenn  $\hat{S} \in \hat{M}\text{-Top}$ .  
 Insbesondere ist dann  $\hat{S} \in \hat{M}\text{-Top}_C$ .

*Beweis.*

- (i) Angenommen  $\hat{S} \in M\text{-Top}$ . Es sei  $K \subseteq S$  kompakt. Dann ist  $U = \hat{S} \setminus K$  nach Definition der Einpunktkompaktifizierung offen in  $\hat{S}$ . Folglich ist  $\mu_{\hat{S}}^{-1}(U) \subseteq M \times \hat{S}$  offen und enthält  $M \times \{0\}$ . Folglich gibt es für alle  $m \in M$  ein offenes  $U_m \subseteq M$  und ein kompaktes  $K_m \subseteq S$ , so dass  $(m, 0) \in U_m \times (\hat{S} \setminus K_m) \subseteq \mu_{\hat{S}}^{-1}(U)$ . Dies impliziert

$$\mu_{\hat{S}}^{-1}(K) = (M \times \hat{S}) \setminus \mu_{\hat{S}}^{-1}(U) \subseteq (M \times \hat{S}) \setminus (U_m \times (\hat{S} \setminus K_m)) = (M \times K_m) \cup ((M \setminus U_m) \times \hat{S})$$



und damit  $\mu_S^{-1}(K) \cap (U_m \times S) \subseteq M \times K_m$ , so dass insgesamt  $S$  lokal  $M$ -eigentlich ist.

Umgekehrt sei  $S$  ein lokal  $M$ -eigentliches  $M$ -Monoid. Die Einschränkung  $\mu_{\hat{S}}|_{M \times S} = \mu_S$  ist stetig, denn  $S \in M\text{-Top}$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $\hat{\mu}_S$  auch stetig ist bei allen  $(m, 0) \in M \times \{0\}$ . Dazu sei  $m \in M$  beliebig und  $m \cdot 0 = 0 \in U \subseteq \hat{S}$  eine offene Umgebung. Dann ist  $K = \hat{S} \setminus U \subseteq S$  kompakt nach Definition der Einpunktkompaktifizierung. Nach Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung  $m \in U_m \subseteq M$  und ein Kompaktum  $K_m \subseteq S$ , so dass  $\mu_S^{-1}(K) \cap (U_m \times S) \subseteq M \times K_m$  ist. Dies impliziert

$$M \times (\hat{S} \setminus K_m) = (M \times \hat{S}) \setminus (M \times K_m) \subseteq \mu_{\hat{S}}^{-1}(U) \cup ((M \setminus U_m) \times \hat{S}) \cup (M \times \{0\})$$

und damit  $U_m \times (\hat{S} \setminus K_m) \subseteq \mu_{\hat{S}}^{-1}(U)$ , d.h.  $\mu_{\hat{S}}$  ist stetig bei  $(m, 0)$ . Da  $m \in M$  beliebig war, ist damit  $\mu_{\hat{S}}$  insgesamt stetig.

Ist  $\hat{S}$  eigentlich, dann ist  $M \cong M \times \{0\} = \mu_{\hat{S}}^{-1}(0)$  quasi-kompakt nach Bemerkung 5.10 (i). Sei Umgekehrt  $M$  quasi-kompakt. Jedes quasi-kompakte  $K \subseteq S$  ist abgeschlossen in  $S$ , da  $S$  ein Hausdorff-Raum ist. Folglich ist  $\mu_{\hat{S}}^{-1}(K) \subseteq M \times \hat{S}$  abgeschlossen und damit quasi-kompakt, da  $M \times \hat{S}$  quasi-kompakt ist. Außerdem ist jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subseteq M \times \hat{S}$  quasi-kompakt und folglich  $\mu_{\hat{S}}(A) \subseteq S$  quasi-kompakt als Bild unter einer stetigen Abbildung. Da  $S$  ein Hausdorff-Raum ist, muss also  $\mu_{\hat{S}}(A) \subseteq S$  abgeschlossen sein, so dass insgesamt  $\mu_{\hat{S}}$  eigentlich ist nach Bemerkung 5.10 (i).

(ii) Wie in Satz 5.34. □

### Korollar 5.59

Für ein topologisches Monoid  $M$  erhält man mit Lemma 5.13 (i) den Kompaktifizierungsfunktor

$$M\text{-Top}_{L,M} \longrightarrow M\text{-Top}_C, \quad S \longmapsto \hat{S}.$$

Falls  $M \in \mathcal{T}Mon_{L,P}$ , hat man zusätzlich den Funktor

$$M\text{-Top}_{L,P} \longrightarrow \hat{M}\text{-Top}_C, \quad S \longmapsto \hat{S}.$$

## 5.4 Endomorphismenmonoide lokal proendlicher, eigentlicher Monoide

Für die Theorie topologischer, semidirekter Produkte von lokal proendlichen Monoiden spielt auch das Endomorphismenmonoid versehen mit der Kompakt-Offen-Topologie eine Rolle, so dass auch auf dieses kurz eingegangen werden sollte. Interessant ist hier die Beobachtung von Steinberg, dass das auf diese Weise topologisierte Endomorphismenmonoid wieder proendlich ist, wenn das Monoid eine endliche, topologische Erzeugermenge besitzt.

### Definition 5.60

Es seien  $X$  und  $Y$  zwei topologische Räume. Für ein Kompaktum  $K \subseteq X$  und eine offene Menge  $U \subseteq Y$  sei

$$T(K, U) = \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y); f(K) \subseteq U\}$$

Die von den Mengen  $T(K, U)$  auf  $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y)$  erzeugte Topologie heißt **Kompakt-Offen-Topologie**. (vgl. (Bou66b, X.3.4 Definition 1)).

**Definition 5.61**

Für ein lokal proendliches, eigentliches Monoid  $M$  heißt  $E(M) = \text{End}_{\mathcal{T}\text{Mon}_{L,P}}(M)$  versehen mit der Kompakt-Offen-Topologie **topologisches Endomorphismenmonoid** von  $M$ .

**Bemerkung 5.62**

$E(M)$  ist ein topologisches Monoid.

*Beweis.* Als lokal proendlicher Raum ist  $M$  insbesondere hausdorffsch und lokal kompakt. (Bou66a, X.3.4 Proposition 9) impliziert dann, dass  $\text{End}_{\mathcal{T}op}(M)$  und damit auch  $E(M) \subseteq \text{End}_{\mathcal{T}op}(M)$  ein topologisches Monoid ist. □

**5.4.1 Topologisch endlich erzeugte Monoide**

In diesem Zusammenhang soll eine Beschreibung des Endomorphismenmonoids nicht ausgelassen werden. Der Kompaktifizierungsfunktor liefert einen Monoidhomomorphismus vom Endomorphismenmonoid eines lokal proendlichen, eigentlichen Monoids in das Endomorphismenmonoid seiner Einpunktkompaktifizierung. Man würde erwarten, dass dieser stetig ist. Ein Gegenbeispiel zeigt jedoch, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist.

**Definition 5.63**

Es sei  $M$  ein topologisches Monoid. Eine Teilmenge  $X \subseteq M$ , für die  $\langle X \rangle \subseteq M$  eine dichte Teilmenge ist, heißt **topologisches Erzeugendensystem** von  $M$ . Ein topologisches Monoid  $M$  heißt **endlich erzeugt**, wenn es ein endliches, topologisches Erzeugendensystem  $X \subseteq M$  gibt.

**Proposition 5.64**

Es sei  $M$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid.

Dann induziert der Kompaktifizierungsfunktor  $C$  aus Korollar 5.35 eine Injektion

$$C : E(M) \hookrightarrow E(\hat{M}), \quad f \mapsto C(f) = \hat{f},$$

deren Einschränkung  $E(M) \xrightarrow{C|} C(E(M))$  offen ist.

Die folgende Proposition zeigt, dass  $C$  im Allgemeinen nicht stetig ist.

*Beweis.* Für alle  $f \in E(M)$  ist  $\hat{f}|_M = f$  und folglich  $C$  injektiv. Es sei  $K \subseteq M$  kompakt und  $U \subseteq M$  offen. Da  $M \subseteq \hat{M}$  offen ist, ist damit  $U \subseteq \hat{M}$  offen, so dass jede offene Subbasismenge  $M(K, U)$  von  $E(M)$  schon eine offene Subbasismenge von  $E(\hat{M})$  ist. Folglich ist  $C$  offen. □

**Proposition 5.65**

Es sei  $M$  das diskrete, freie Monoid in unendlich vielen Erzeugern.

Dann ist die Injektion  $E(M) \xrightarrow{C} E(\hat{M})$  aus Proposition 5.64 nicht stetig.

*Beweis.* Es sei  $X$  die unendliche Menge der freien Erzeuger von  $M$ . Wähle einen Erzeuger  $x_1 \in X$ . Dann ist die Teilmenge  $K = \hat{M} \setminus \{x_1\} \subseteq \hat{M}$  offen nach Definition der Topologie auf  $\hat{M}$ , da  $\{x_1\}$  kompakt ist. Nun ist  $M$  diskret und damit  $\{x_1\} \subseteq M \subseteq \hat{M}$  offen. Folglich ist  $K$  auch abgeschlossen in  $\hat{M}$  und damit kompakt, da  $\hat{M}$  kompakt ist. Nach Definition der Kompakt-Offen-Topologie ist also  $U := T(K, K) \subseteq E(\hat{M})$  eine offene Teilmenge. Es gilt  $C(\text{id}_M) = \text{id}_{\hat{M}} \in U$ , so

dass  $C^{-1}(U)$  nicht leer ist.

Unter der Annahme, dass  $C$  stetig ist, gibt es eine offene Überdeckung

$$C^{-1}(U) = \bigcup_i V_i \quad \text{mit } V_i = T(K_{i,1}, U_{i,1}) \cap \dots \cap T(K_{i,n_i}, U_{i,n_i}),$$

wobei  $U_{i,j} \subseteq M$  offen und  $K_{i,j} \subseteq M$  kompakt sind für alle  $i$  und  $1 \leq j \leq n_i$ . Da  $C^{-1}(U)$  nicht leer ist, gibt es ein  $i$ , so dass  $V_i$  nicht leer ist. Wegen der Kompaktheit der  $K_{i,j}$  ist auch  $K = K_{i,1} \cup \dots \cup K_{i,n_i}$  kompakt. Die Abbildung  $M \times M \times M \xrightarrow{\nu} M$  gegeben durch  $\nu(k, m, n) = kmn$  für  $k, m, n \in M$  ist stetig und eigentlich (Beweis von Lemma 5.44). Da  $K$  kompakt ist und  $M$  eigentlich, ist daher

$$T := \{m \in M; \exists k \in K, a, b \in M : k = amb\} = \pi_2(\nu^{-1}(K))$$

eine kompakte Teilmenge von  $M$ , also endlich, denn  $M$  ist diskret. Da  $X$  unendlich ist, gibt es ein  $x_2 \in X \setminus T$ . Es sei nun  $f \in V_i$ . Für  $x \in X$  setze

$$g(x) := \begin{cases} x_1 & x = x_2 \\ f(x) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nach der universellen Abbildungseigenschaft des freien Monoids lässt sich  $g$  als Monoidendomorphismus auf ganz  $M$  fortsetzen. Da  $M$  diskret ist, ist  $g$  stetig. Da  $f$  eigentlich ist und  $g|_{\langle x_2 \rangle}$  injektiv, ist auch  $g$  eigentlich. Wegen  $x_2 \in X \setminus T$  gilt  $Mx_2M \subseteq M \setminus K \subseteq M \setminus K_{i,j}$  für alle  $1 \leq j \leq n_i$  nach Definition der Menge  $T$ . Folglich ist  $g(K_{i,j}) = f(K_{i,j}) \subseteq U_{i,j}$  für alle  $1 \leq j \leq n_i$  und damit  $g \in V_i$ . Da aber  $x_2 \in K = \hat{M} \setminus \{x_1\}$  und damit  $g(x_2) = x_1 \notin K$  ist, folgt  $g \notin C^{-1}(U)$  im Widerspruch dazu, dass  $V_i \subseteq C^{-1}(U)$ . □

### Satz 5.66

*Es sei  $M \in \mathcal{T}Mon_C$  ein proendliches, topologisch endlich erzeugtes Monoid.*

*Dann ist  $E(M)$  proendlich.*

*Beweis.* Laut (Ste10) heißt eine Kongruenzrelation auf  $M$  offen, wenn sie eine offene Teilmenge von  $M \times M$  ist, d.h. also, wenn jede Kongruenzklasse offen ist und daher als Komplement der Vereinigung ihrer offenen Nebenklassen außerdem abgeschlossen ist. Die Aussage von (Ste10, Proposition 2) über endlich erzeugte proendliche Halbgruppen lässt sich dann auch auf topologisch endlich erzeugte, proendliche Halbgruppen erweitern. Denn jede offene Kongruenzrelation  $R$  auf  $M$  ist durch ihre Einschränkung auf  $\langle X \rangle \times \langle X \rangle$  bereits vollständig festgelegt, da jede Kongruenzklasse von  $R$  abgeschlossen ist und eine Kongruenzklasse der eingeschränkten Relation dicht enthält. Die eingeschränkte Relation ist wiederum vollständig festgelegt durch ihre Einschränkung auf die endliche Teilmenge  $X \times X$ . Damit ist die Voraussetzung von (Ste10, Theorem 4) erfüllt, welches die Behauptung impliziert. □

## 5.5 Topologische $M$ -Monoide und das semidirekte Produkt topologischer Monoide

Hier werden die Grundlagen für topologische semidirekte Produkte lokal proendlicher, eigentlicher Monoide erarbeitet. Entscheidend ist dafür, unter welchen Bedingungen an die Monoid-Operation das semidirekte Produkt zweier lokal proendlicher, eigentlicher Monoide wieder eigentlich ist.

### 5.5.1 $M$ -topologische $M$ -Monoide

#### Definition 5.67

Es seien  $M$  und  $N$  topologische Monoide und  $N$  via  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, \text{End}_{\text{Mon}}(N))$  ein  $M$ -Monoid.  $N$  heie  **$M$ -topologisch**, wenn  $N$  als topologischer Raum zusammen mit  $\mu_\varphi$  eine topologische  $M$ -Linksmenge bildet, d.h. wenn die induzierte  $M$ -Linksoperation  $M \times N \xrightarrow{\mu_\varphi} N$  stetig ist.

#### Bemerkung 5.68

Es seien  $M \in \mathcal{T}\text{Mon}$  ein topologisches, hausdorffsches Monoid und  $N \in \mathcal{T}\text{Mon}_L$  via  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, \text{End}_{\text{Mon}}(N))$  ein  $M$ -Monoid. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $N$  ist  $M$ -topologisch.
- (ii)  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mon}}(M, \text{End}_{\mathcal{T}\text{Mon}_L}(N))$ , wobei  $\text{End}_{\mathcal{T}\text{Mon}_L}(N)$  die Kompakt-Offen-Topologie trägt.
- (iii)  $N \rtimes_\varphi M$  versehen mit der Produkttopologie ist topologisch.

*Beweis.* Die Äquivalenz „(i)  $\iff$  (ii)“ folgt aus der Eigenschaft der Kompakt-Offen-Topologie (siehe (Bou66a, X.3.4 Theorem 3)). Angenommen  $N$  wäre  $M$ -topologisch. Nach Definition der Multiplikation auf  $N \rtimes_\varphi M$  ist für  $m, m' \in M$  und  $n, n' \in N$

$$(n, m)(n', m') = (n^m n', mm') = (\mu_N(n, \mu_\varphi(m, n')), \mu_M(m, m')),$$

so dass jede Koordinate eine Verkettung der stetigen Abbildungen  $\mu_N$ ,  $\mu_\varphi$  und  $\mu_M$  ist. Da  $N \rtimes_\varphi M$  die Produkttopologie trägt, ist damit die Multiplikation auf  $N \rtimes_\varphi M$  stetig.

Umgekehrt ist  $\mu_\varphi(n, m) = \pi_{N_1} \circ \mu_{N \rtimes_\varphi M}((1, m), (n, 1))$  für  $m \in M$  und  $n \in N$ , wobei  $\pi_{N_1}$  die Projektion auf die erste  $N$ -Koordinate ist. Da die Monoidverknüpfung auf  $N \rtimes_\varphi M$  stetig ist, impliziert dies die Stetigkeit von  $\mu_\varphi$ .

Damit ist auch die Äquivalenz „(i)  $\iff$  (iii)“ gezeigt. □

#### Definition 5.69

Es seien  $M$  ein topologisches Monoid und  $N$  ein  $M$ -topologisches  $M$ -Monoid.

Dann heißt das semidirekte Produkt  $N \rtimes M$  versehen mit der Produkttopologie **topologisches semidirektes Produkt** von  $N$  und  $M$ .

### 5.5.2 Die universelle Eigenschaft

Wie erwartet besitzt auch das topologische semidirekte Produkt zweier topologischer Monoide eine universelle Abbildungseigenschaft.

#### Bemerkung 5.70

Es seien  $M \in \mathcal{T}\text{Mon}$  ein topologisches Monoid und  $N$  ein  $M$ -topologisches  $M$ -Monoid via  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, \text{End}_{\mathcal{T}\text{Mon}}(N))$ . Dann können  $M$  und  $N$  via  $\iota_M(m) = (1, m)$  für  $m \in M$  und  $\iota_N(n) = (n, 1)$  für  $n \in N$  als topologische Teilmonoide von  $N \rtimes_\varphi M$  aufgefasst werden.

Sind  $M$  und  $N$  Hausdorff-Räume, dann auch  $N \rtimes_\varphi M$ , so dass  $M$  und  $N$  abgeschlossene Teilmonoide bilden und insbesondere  $\iota_M$  und  $\iota_N$  eigentliche Abbildungen ist.

*Beweis.* Nach Definition der Produkttopologie ist  $M \xrightarrow{\iota_M} \iota_M(M)$  ein topologischer Isomorphismus. Ist  $N$  hausdorffsch, so ist  $\iota_M(M) = \{1\} \times M \subseteq N \rtimes_{\varphi} M$  abgeschlossen in  $N \rtimes_{\varphi} M$ . Analog zeigt man die Eigenschaften auch für  $\iota_N$ . □

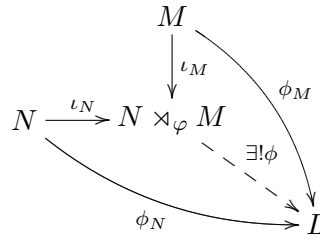
**Bemerkung 5.71**

Es seien  $M \in \mathcal{TMon}$  ein topologisches Monoid und  $N$  ein  $M$ -topologisches  $M$ -Monoid via  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{Mon}}(M, \text{End}_{\mathcal{TMon}}(N))$ . Dann erfüllt das topologische semidirekte Produkt folgende universelle Eigenschaft:

Für jedes topologische Monoid  $L \in \mathcal{TMon}$ ,  $\phi_M \in \text{Hom}_{\mathcal{TMon}}(M, L)$  und  $\phi_N \in \text{Hom}_{\mathcal{TMon}}(N, L)$  mit

$$\phi_M(m) \cdot \phi_N(n) = \phi_N({}^m n) \cdot \phi_M(m)$$

für alle  $m \in M$  und  $n \in N$  existiert genau ein  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{TMon}}(N \rtimes_{\varphi} M, L)$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert:



*Beweis.* Wegen Proposition 4.27 bleibt nur die Stetigkeit von  $\phi$  zu zeigen. Nach Definition ist aber  $\phi = \mu_L \circ (\phi_N \times \phi_M)$  als Verkettung stetiger Abbildungen selbst stetig. □

**5.5.3 (Lokal)  $M$ -eigentliche  $M$ -Monoide**

In diesem Abschnitt wird schließlich die Charakterisierung eigentlicher semidirekter Produkte lokal proendlicher Monoide durch die damit verbundene Monoidoperation bewiesen. Diese Aussage ist der zentrale Punkt im Beweis für die Verträglichkeit topologischer Schiefmonoidringe mit dem semidirekten Produkt.

**Definition 5.72**

Es sei  $M$  ein topologisches Monoid und  $N$  ein eigentliches, topologisches Monoid. Via  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{Mon}}(M, \text{End}_{\mathcal{Mon}}(N))$  sei  $N$  ein  $M$ -topologisches  $M$ -Monoid.

- (i)  $N$  heißt  **$M$ -eigentlich**, wenn  $N$  aufgefasst als topologische  $M$ -Linksmenge eigentlich ist.
- (ii)  $N$  heißt **lokal  $M$ -eigentlich**, wenn  $N$  aufgefasst als topologische  $M$ -Linksmenge lokal  $M$ -eigentlich ist.

**Satz 5.73**

Es seien  $M \in \mathcal{TMon}_{L,P}$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid, und  $N \in \mathcal{TMon}_{L,P}$  via  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{Mon}}(M, \text{End}_{\mathcal{Mon}}(N))$  ein  $M$ -topologisches  $M$ -Monoid. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $N$  ist lokal  $M$ -eigentlich.
- (ii)  $\varphi(M) \subseteq E(N) = \text{End}_{\mathcal{TMon}_{L,P}}(N)$  und  $M \xrightarrow{\varphi} E(N) \xrightarrow{C} E(\hat{N})$  ist stetig.

(iii)  $N \rtimes_{\varphi} M$  ist eigentlich.

Insbesondere ist dann wegen (ii)  $\hat{N}$  ein  $M$ -topologisches  $M$ -Monoid. Beachte, dass der Äquivalenzbeweis „(i)  $\iff$  (ii)“ auch unter der schwächeren Voraussetzung durchgeht, dass  $M \in \mathcal{T}Mon$  hausdorffsch und  $N \in \mathcal{T}Mon_L$  ist.

*Beweis.* Die Äquivalenz „(i)  $\iff$  (ii)“ gilt nach Satz 5.58 und Bemerkung 5.68. Zeige nun die Äquivalenz „(i)  $\iff$  (iii)“. Angenommen  $N \rtimes_{\varphi} M$  ist eigentlich. Es sei  $m \in M$ . Da  $M$  lokal proendlich ist, gibt es ein offenes Kompaktum  $m \in K_m \subseteq M$ . Für jedes Kompaktum  $K \subseteq N$  und alle  $(m', n) \in \mu_{\varphi}^{-1}(K) \cap (K_m \times N)$  gilt  $(1, m')(n, m') = ({}^m n, m'm') \in K \times (K_m \cdot K_m)$ , so dass

$$\mu_{\varphi}^{-1}(K) \cap (K_m \times N) \subseteq \pi_{M_1 \times N_2} \left( \mu_{N \rtimes_{\varphi} M}^{-1}(K \times (K_m \cdot K_m)) \right) =: K',$$

wobei  $\pi_{M_1 \times N_2} = (\pi_{M_1}, \pi_{N_2})$  und  $\pi_{M_1}$  die kanonische Projektion auf die erste  $M$ -Koordinate und  $\pi_{N_2}$  dementsprechend die Projektion auf zweite  $N$ -Koordinate von  $(N \rtimes_{\varphi} M) \times (N \rtimes_{\varphi} M)$  ist. Da  $M$  topologisch ist, ist auch  $K_m \cdot K_m \subseteq M$  kompakt. Folglich ist auch  $K'$  kompakt, da  $\mu_{N \rtimes_{\varphi} M}$  eigentlich und  $\pi_{M_1 \times N_2}$  stetig ist. Dann ist aber auch  $\pi_N(K')$  kompakt, da  $\pi_N$  stetig ist. Insgesamt folgt

$$\mu_{\varphi}^{-1}(K) \cap (K_m \times N) \subseteq M \times \pi_N(K'),$$

so dass man  $U_m = K_m$  und  $K_m = \pi_N(K')$  wählen kann und damit  $N$  lokal  $M$ -eigentlich ist.

Umgekehrt sei  $N$  lokal  $M$ -eigentlich und  $K \subseteq N \rtimes_{\varphi} M$  kompakt. Dann sind  $K_N = \pi_N(K)$  und  $K_M = \pi_M(K)$  kompakt, da  $\pi_N$  und  $\pi_M$  stetig sind, und es gilt  $K \subseteq K_N \times K_M$ . Nun ist  $\mu_N$  eigentlich, so dass  $\mu_N^{-1}(K_N)$  kompakt ist und es wieder Kompakta  $K_{N_1}, K_{N_2} \subseteq N$  gibt mit  $\mu_N^{-1}(K_N) \subseteq K_{N_1} \times K_{N_2}$ . Weiterhin gibt es Kompakta  $K_{M_1}, K_{M_2} \subseteq M$  mit  $\mu_M^{-1}(K_M) \subseteq K_{M_1} \times K_{M_2}$ , da  $\mu_M$  eigentlich ist. Nach Lemma 5.55 gibt es ein Kompaktum  $K'_{N_2} \subseteq N$ , so dass  $\mu_{\varphi}^{-1}(K_{N_2}) \cap (K_{M_1} \times N) \subseteq M \times K'_{N_2}$ . Insgesamt folgt, dass

$$\mu_{N \rtimes_{\varphi} M}^{-1}(K) \subseteq \mu_{N \rtimes_{\varphi} M}^{-1}(K_N \times K_M) \subseteq (K_{N_1} \times K_{M_1}) \times (K'_{N_2} \times K_{M_2}),$$

denn für  $((n, m), (n', m')) \in \mu_{N \rtimes_{\varphi} M}^{-1}(K_N \times K_M)$  gilt:

- $(m, m') \in K_{M_1} \times K_{M_2}$  wegen  $mm' \in K_M$ .
- $(m, n') \in \mu_{\varphi}^{-1}(K_{N_2}) \cap (K_{M_1} \times N) \subseteq M \times K'_{N_2}$  wegen  $n^m n' \in K_N$  bzw.  $(n, {}^m n') \in \mu_N^{-1}(K_N) \subseteq K_{N_1} \times K_{N_2}$ .

Nach dem Satz von Tychonoff (Bou66a, I.9.4 Theorem 3) ist  $(K_{N_1} \times K_{M_1}) \times (K'_{N_2} \times K_{M_2})$  kompakt. Da  $M$  und  $N$  hausdorffsch sind, ist auch  $N \rtimes_{\varphi} M$  hausdorffsch und damit  $K$  abgeschlossen. Als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums ist damit auch  $\mu_{N \rtimes_{\varphi} M}^{-1}(K)$  kompakt. Da  $K$  ein beliebiges Kompaktum war, ist damit  $N \rtimes_{\varphi} M$  eigentlich. □

## Kapitel 6

# Topologische Ringe und Moduln

In diesem Kapitel werden die Grundlagen topologischer und vollständiger Ringe und Moduln behandelt. Besonders wichtig ist die Adjunktion zwischen der Kategorie der hausdorffschen, topologischen Ringe und der Kategorie der vollständigen topologischen Ringe. Des Weiteren werden alle betrachteten Ring- und Modulkategorien eingeführt. Für den Beweis des Existenzkriteriums für topologische Schiefmonoidringe ist der in Abschnitt 6.3 definierte topologische Hom-Funktor topologischer Moduln von Bedeutung. Zuletzt wird der freie  $R$ -Modul erzeugt von einem lokal proendlichen Raum eingeführt. Dies wird der unterliegende topologische  $R$ -Modul des topologischen Monoid- und Schiefmonoidrings sein, wie er in Kapitel 7 schließlich definiert wird.

### 6.1 Vollständige topologische, abelsche Gruppen

Zunächst einige nützliche Lemmata, die projektive Limiten topologischer und vollständiger abelscher Gruppen betreffen.

**Satz 6.1** (Vervollständigung hausdorffscher, topologischer, abelscher Gruppen)

*Für jede hausdorffsche, topologische, abelsche Gruppe  $G$ , gibt es eine vollständige, topologische, abelsche Gruppe  $\hat{G}$ , die  $G$  via  $G \xrightarrow{\iota_G} \hat{G}$  (topologisch isomorph) dicht enthält und folgende universelle Eigenschaft erfüllt:<sup>1</sup>*

*Für alle vollständigen, topologischen, abelschen Gruppen  $H$  und alle stetigen Gruppenhomomorphismen  $G \xrightarrow{f} H$  gibt es einen stetigen Gruppenhomomorphismus  $\hat{G} \xrightarrow{\hat{f}} H$  mit  $\hat{f} \circ \iota_G = f$ .*

*Insbesondere ist diese topologische Gruppe  $\hat{G}$  eindeutig bis auf eindeutige, topologische Isomorphie.*

*Beweis.* (War93, II.Theorem 7.9) und (War93, II.Theorem 7.19). □

#### Lemma 6.2

*Projektive Limiten topologischer abelscher Gruppen, die hausdorffsch und vollständig sind, sind wieder hausdorffsch und vollständig.*

*Beweis.* Nach (War93, I Theorem 7.8) sind beliebige Produkte vollständiger abelscher, topologischer Gruppen ebenfalls vollständig. Wegen (War93, I Theorem 5.20) ist der projektive Limes eine abgeschlossene Teilmenge davon und nach (War93, I Theorem 7.5 (1)) deshalb selbst vollständig.

---

<sup>1</sup>Hier bezeichnet  $\hat{G}$ , wie im gesamten Abschnitt, die Vervollständigung von  $G$

□

**Lemma 6.3**

Es sei  $G$  eine abelsche Gruppe und  $H = \varprojlim_i H_i$ , wobei jedes  $H_i$  eine abelsche, topologische Gruppe sei, die hausdorffsch und vollständig ist. Es seien  $G \xrightarrow{f_i} H_i$  Gruppenepimorphismen, die mit den Übergangsabbildungen des projektiven Systems verträglich sind und  $G$  trage die Initialtopologie bezüglich der  $f_i$ .

Ist  $G$  hausdorffsch, dann gelten für die Limesabbildung  $G \xrightarrow{f} H$  folgende Eigenschaften:

- (i)  $G \xrightarrow{f} f(G)$  ist ein topologischer Isomorphismus.
- (ii) Es gibt einen eindeutigen topologischen Isomorphismus  $\hat{G} \cong H$ , der  $f$  fortsetzt.

*Beweis.*

- (i) Die Aussage folgt direkt aus Lemma 5.5 (iv).
- (ii) Da  $H$  nach Lemma 6.2 vollständig ist, gibt es nach (War93, II Theorem 7.17) einen eindeutigen Homomorphismus  $\hat{G} \xrightarrow{\hat{f}} H$ , der  $f$  fortsetzt. Wegen  $1 \in G$  ist  $G$  nicht leer, so dass nach Lemma 5.5 (ii)  $f(G)$  eine dichte Teilmenge von  $H$  ist. Wegen Punkt (i) ist nach der zweiten Aussage von (War93, II Theorem 7.17)  $\hat{f}$  ein topologischer Isomorphismus.

□

**Lemma 6.4**

Es sei  $G$  eine abelsche, topologische Gruppe und  $\mathcal{U}_G$  eine Umgebungsbasis der 0, bestehend aus offenen Untergruppen von  $G$ .

$G$  ist hausdorffsch und vollständig genau dann, wenn  $G \cong \varprojlim_{N \in \mathcal{U}_G} G/N$  topologisch isomorph sind.

*Beweis.* Angenommen  $G \cong \varprojlim_{N \in \mathcal{U}_G} G/N$ . Dann ist für jedes  $N \in \mathcal{U}_G$  die Gruppe  $G/N$  diskret und damit hausdorffsch und vollständig. Nach Lemma 6.2 ist dann auch  $G$  vollständig. Andererseits trägt  $G$  die Initialtopologie bezüglich der Surjektionen  $G \twoheadrightarrow G/N$ , so dass man nach Lemma 6.3 (ii) einen topologischen Isomorphismus  $G = \hat{G} \cong \varprojlim_{N \in \mathcal{U}_G} G/N$  erhält.

□

## 6.2 Topologische Ring- und Modul-Kategorien

Nun werden die für spätere Betrachtungen erforderlichen topologischen Ring- und Modulkategorien eingeführt. Ebenfalls festgehalten wird die wichtige Adjunktion zwischen der Kategorie der topologischen, hausdorffschen und der Kategorie der topologischen, vollständigen Ringe.

**Definition 6.5**

Es sei  $R$  ein topologischer Ring. Für einen topologischen Links-/Rechts-Modul  $M$  über  $R$  seien folgende Axiome definiert.

- (U)  $M$  besitzt eine Umgebungsbasis der 0, die aus  $R$ -Links-/Rechts-Untermoduln besteht.
- (F)  $M$  eine Umgebungsbasis der 0, die aus  $R$ -Links-/Rechts-Untermoduln  $N$  besteht, für die  $M/N$  ein  $R$ -Links-/Rechts-Modul endlicher Länge ist.



(H)  $M$  ist hausdorffsch.

(C)  $M$  ist hausdorffsch und vollständig.

$M$  heißt **links-/rechts-pseudokompakt**, wenn er (F) und (C) erfüllt.

### Definition 6.6

Es sei  $R$  ein topologischer Ring.

(i) Es bezeichne  $R\text{-TMod}$  die Kategorie der topologischen  $R$ -Linksmoduln. Die Morphismen in  $R\text{-TMod}$  sind die stetigen  $R$ -Linksmodulhomomorphismen.

Indizes kennzeichnen die Teilkategorie der topologischen  $R$ -Linksmoduln, die die jeweiligen Axiome aus Definition 6.5 erfüllen.

(ii) Für  $M \in R\text{-Mod}$  bezeichne  $\mathcal{L}_M$  die Menge aller Untermoduln  $N \leq M$ , so dass  $M/N$  endliche Länge besitzt.

(iii) Für  $M \in R\text{-TMod}$  bezeichne  $\mathcal{U}_M$  die Menge aller offenen Linksuntermoduln (Diese bilden nach Definition eine Umgebungsbasis der 0, falls  $M \in R\text{-TMod}_U$ ).

Es bezeichne  $\text{TMod-}R$  die Kategorie der topologischen  $R$ -Rechtsmoduln. Die Punkte (i)-(iii) seien analog für den Fall der Rechtsmoduln definiert.

### Definition 6.7

In gleicher Weise seien auch die entsprechenden Teilkategorien von  $\mathcal{TRing}$  definiert:

(i) Es bezeichne  $\mathcal{TRing}$  die Kategorie der topologischen Ringe, dessen Homomorphismen die stetigen Ringhomomorphismen sind.

(ii) Wie in Definition 6.6 kennzeichnen Indizes an  $\mathcal{TRing}$  diejenige Teilkategorie der topologischen Ringe, die sowohl als Links- als auch als Rechtsmodul über sich selbst das jeweilige Axiom aus Definition 6.5 erfüllen.

(iii) Für einen Ring  $R$  bezeichne  $\mathcal{L}_R$  die Menge aller Ideale  $I \triangleleft R$ , so dass  $R/I$  als Links- und Rechtsmodul endliche Länge besitzt.

(iv) Für einen topologischen Ring  $R$  bezeichne  $\mathcal{U}_R$  die Menge aller offenen Ideale.

(v) Ein topologischer Ring  $R$  heißt **links-/rechts-pseudokompakter Ring**, wenn er als Modul über sich selbst links-/rechts-pseudokompakt ist.  $R$  heißt **pseudokompakt**, wenn er sowohl links- als auch rechts-pseudokompakt ist.

### Bemerkung 6.8

Umgebungsbasen aus Links- und Rechtsidealen induzieren Umgebungsbasen aus Idealen:

(i) Jeder topologische Ring  $R \in \mathcal{TRing}_U$  besitzt eine Umgebungsbasis der 0 aus offenen Idealen.

(ii) Jeder topologische Ring  $R \in \mathcal{TRing}_F$  besitzt eine Umgebungsbasis der 0 aus offenen Idealen  $I \triangleleft R$  der Art, dass  $R/I$  als  $R$ -Links- und als  $R$ -Rechtsmodul von endlicher Länge ist.

*Beweis.* Es bezeichne  $\mathcal{U}_l$  die Menge aller offenen Linksideale und  $\mathcal{U}_r$  die Menge aller offenen Rechtsideale. Analog seien  $\mathcal{L}_l$  und  $\mathcal{L}_r$  definiert.

- (i) Es ist  $IR = (I) \triangleleft R$  das von  $I \in \mathcal{U}_l$  beidseitig erzeugte Ideal.  $IR$  ist offen, da  $IR$  ein Linksideal und  $I \subseteq IR$  ist. Da  $\mathcal{U}_l$  eine Umgebungsbasis der 0 ist, gibt es für jedes  $H \in \mathcal{U}_r$  ein  $I \in \mathcal{U}_r$ , so dass  $I \subseteq H$ . Es folgt  $IR \subseteq H$ , da  $H$  ein Rechtsideal ist. Damit ist  $\{IR; I \in \mathcal{U}_l\}$  eine Umgebungsbasis der 0 aus beidseitigen Idealen.
- (ii) Wegen (i) ist  $\{IR; I \in \mathcal{U}_l \cap \mathcal{L}_l\}$  eine Umgebungsbasis, da  $\mathcal{U}_l \cap \mathcal{L}_l$  und  $\mathcal{U}_r \cap \mathcal{L}_r$  Umgebungsbasen sind. Wegen  $I \subseteq IR$  hat  $R/IR$  als Linksmodul endliche Länge. Da  $IR$  offen ist und  $\mathcal{U}_r \cap \mathcal{L}_r$  eine Umgebungsbasis ist, gibt es ein  $H \in \mathcal{U}_r \cap \mathcal{L}_r$ , so dass  $R \subseteq IR$  ist. Folglich hat  $R/IR$  auch als Rechtsmodul endliche Länge.

□

**Satz 6.9**

Es gibt eine funktorielle Vervollständigung topologischer, hausdorffscher Ringe (vgl. Satz 6.1):

- (i) Für jeden topologischen Ring  $R \in \mathcal{TRing}_H$  gibt es einen topologischen Ring  $\hat{R} \in \mathcal{TRing}_C$  zusammen mit einem injektiven, stetigen Ringhomomorphismus  $R \xrightarrow{\iota_R} \hat{R}$ , der  $R$  topologisch isomorph in  $\hat{R}$  einbettet und folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Für alle vollständigen Ringe  $S \in \mathcal{TRing}_C$  und alle stetigen Ringhomomorphismen  $R \xrightarrow{f} S$  gibt es einen stetigen Ringhomomorphismus  $\hat{R} \xrightarrow{\hat{f}} S$  mit  $\hat{f} \circ \iota_R = f$ .

- (ii) Es gibt einen Kompletierungsfunktor  $\mathcal{TRing}_H \xrightarrow{C} \mathcal{TRing}_C$ , der jedem Ring  $R \in \mathcal{TRing}_H$  seine Vervollständigung  $\hat{R}$  zuordnet, und zusammen mit dem kanonischen Inklusionsfunktoren  $\mathcal{TRing}_C \xrightarrow{I} \mathcal{TRing}_H$  folgende Adjunktion induziert

$$\text{Hom}_{\mathcal{TRing}_C}(\hat{R}, S) \cong \text{Hom}_{\mathcal{TRing}_H}(R, I(S))$$

Insbesondere ist  $\mathcal{TRing}_C \subseteq \mathcal{TRing}_H$  eine volle reflektive Teilkategorie.

- (iii) Ist  $R \in \mathcal{TRing}_{U,H}$ , dann ist  $\hat{R} \cong \varprojlim_{U \in \mathcal{U}_R} R/U$ .

*Beweis.*

- (i) (War93, II.Theorem 8.1) und (War93, II.Theorem 8.3)
- (ii) Nach (i) ist  $\iota_R$  ein universeller Pfeil von  $R$  nach  $I$ . (Mac72, IV.1 Satz 2 (ii)) impliziert dann die Behauptung.
- (iii) Dies zeigt man genau wie im Fall topologischer, abelscher Gruppen wie in Abschnitt 6.1, da ein topologischer Ring per Definition genau dann vollständig ist, wenn die unterliegende additive topologische, abelsche Gruppe vollständig ist.

□

## 6.3 Hom-Funktoren für topologische Moduln

Wie in Kapitel 4 Abschnitt 4.2.1 und 4.2.3 gesehen, wird jeder Schiefmonoidring über einem Monoid  $M$  durch einen Monoidhomomorphismus von  $M$  in den Monoidring über seinem äußeren Koeffizientenring  $\text{End}_{\text{Mod-}R_0}(R)$  charakterisiert. Während der innere Koeffizientenring  $R_0$  als Teilring von  $R$  in kanonischer Weise mit einer Topologie ausgestattet ist, hat man für den äußeren Koeffizientenring zunächst keine Topologie. Im Kapitel über topologische (Schief-)Monoidringe 7 wird gezeigt, dass man sich im topologischen Fall auf den Ring  $\text{End}_{\text{TMod-}R_0}(R)$  der stetigen  $R_0$ -Modulhomomorphismen beschränken kann. Der zentrale Punkt des Existenzkriteriums für topologische Schiefmonoidringe ist die Wahl der Topologie auf dem äußeren Koeffizientenring.

Zumindest für den Fall, in dem  $R$  eine Umgebungsbasis der 0 besitzt, bestehend aus offenen  $R_0$ -Untermoduln, ist es gelungen eine geeignete Topologie auf dem äußeren Koeffizientenring zu finden. In diesem Abschnitt wird diese Topologie eingeführt und ihre grundlegenden Eigenschaften nachgewiesen. Dazu wird hier ein topologisierte Hom-Funktor definiert, indem nicht nur Endomorphismenmengen im Speziellen, sondern auch Hom-Mengen im Allgemeinen mit einer Topologie versehen werden. Intuitiv würde man die Kompakt-Offen-Topologie erwarten, jedoch findet man eine einfachere, feine Topologie, die im Hinblick auf das Ziel bessere Eigenschaften besitzt. Aufgrund dieser Einschränkung verliert man dadurch beim Existenzkriterium möglicherweise einige Objekte, aber verschiedene Beispiele zeigen, dass alle bisher betrachteten und interessanten vollständigen Schiefmonoidringe auch das angegebene Existenzkriterium erfüllen.

### 6.3.1 Diskrete Hom-Funktoren

Gestartet wird mit der algebraischen bzw. diskreten Variante des Hom-Funktors, dessen wichtigste algebraische Eigenschaften sich auch auf die topologische Variante übertragen werden.

#### Proposition 6.10

*Es sei  $R$  ein Ring und  $M \in \text{Mod-}R$ . Dann erhält man einen Funktor*

$$\text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, -) : \text{Mod-}R \longrightarrow \text{Mod-}\text{End}_{\text{Mod-}R}(M).$$

*Beweis.* Für  $N \in \text{Mod-}R$  definiert  $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$  für  $m \in M$  auf kanonische Weise eine abelsche Gruppenstruktur auf  $\text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, N)$ . Zusammen mit der Verkettungsverknüpfung ist dann  $\text{End}_{\text{Mod-}R}(M)$  ein Ring, denn wegen der Additivität der  $f \in \text{End}_{\text{Mod-}R}(M)$  gilt das Distributivgesetz. Analog definiert die Verkettung eine Monoidverknüpfung

$$\text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, N) \times \text{End}_{\text{Mod-}R}(M) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, N), \quad (f, g) \longmapsto f \circ g,$$

wobei die Distributivität wieder aus der Additivität der  $f \in \text{End}_{\text{Mod-}R}(M)$  folgt.

Für  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, N)$  ist  $\text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, \varphi)$  die Verkettung mit  $\varphi$  von links. Für  $f_1, f_2 \in \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, N)$  und  $g \in \text{End}_{\text{Mod-}R}(M)$  gilt dann:

- $\varphi \circ (f_1 + f_2) = \varphi \circ f_1 + \varphi \circ f_2$ , da  $\varphi$  additiv ist.
- $\varphi \circ (f_1 \circ g) = (\varphi \circ f_1) \circ g$ ,

womit die  $\text{End}_{\text{Mod-}R}(M)$ -Rechtslinearität von  $\text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, \varphi)$  gezeigt ist. □

**Proposition 6.11**

Es sei  $R \in \mathcal{R}ing$  ein Ring und  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, M')$ . Weiterhin bezeichnen

$$\text{Mod-End}_{\text{Mod-}R}(M) \xrightarrow{U} \mathbb{Z}\text{-Mod}, \quad \text{Mod-End}_{\text{Mod-}R}(M') \xrightarrow{V} \mathbb{Z}\text{-Mod}$$

die Vergissfunktoren.

Dann erhält man für jedes  $N \in \text{Mod-}R$  einen Homomorphismus abelscher Gruppen

$$\varphi_N : U(\text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M', N)) \longrightarrow V(\text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, N)), \quad f \longmapsto f \circ \varphi$$

und insgesamt eine natürliche Transformation

$$(\varphi_N) : U \circ \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M', -) \longrightarrow V \circ \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, -),$$

wobei  $U$  bzw.  $V$  die jeweiligen Vergissfunktoren nach  $\text{Mod-}\mathbb{Z}$  sind.

*Beweis.* Für  $f_1, f_2 \in \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M', N)$  gilt nach Definition der Addition auf  $\text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M', N)$

$$\varphi_N(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2) \circ \varphi = f_1 \circ \varphi + f_2 \circ \varphi = \varphi_N(f_1) + \varphi_N(f_2),$$

so dass  $\varphi_N$  ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist. Die Natürlichkeit in  $N$  folgt direkt aus der Assoziativität der Verkettungsoperation „ $\circ$ “ wie man sich leicht an folgendem Diagramm klarmacht. Dazu sei  $f \in \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(N, N')$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M', N) & \xrightarrow{\varphi_N = - \circ \varphi} & \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, N) \\ \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M', f) = f \circ - \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, f) = f \circ - \\ \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M', N') & \xrightarrow{\varphi_{N'} = - \circ \varphi} & \text{Hom}_{\text{Mod-}R}(M, N') \end{array}$$

□

**6.3.2 Topologische Fortsetzung des Hom-Funktors**

Nun wird die topologisierte Variante betrachtet. Eine der nützlichen Eigenschaften des topologischen Hom-Funktors ist, dass er nach Proposition 6.15 die Initialtopologie respektiert und in Folge dessen mit Limiten vertauscht. Angewendet auf den späteren Fall des äußeren Koeffizientenrings bedeutet dies, dass dieser vollständig ist, wenn  $R$  dies ist. Ebenfalls wichtig ist die Stetigkeit der Evaluationsabbildung (siehe Lemma 6.18). Nach (Bou66b, X.3.4 Corollary 1) gilt dies ebenfalls für die Kompakt-Offen-Topologie, falls man einen lokal kompakten Raum als „Einsetzungsraum“ verwendet. Da im Anwendungsbereich der Zahlentheorie aber in erster Linie pseudokompakte Ringe auftreten, die nicht zwingend auch lokal kompakt sind, wäre dies ein weiterer Grund dafür, warum die Kompakt-Offen-Topologie für die Topologisierung des äußeren Koeffizientenrings nicht in Frage kommt.

**Definition 6.12**

Es seien  $R \in \mathcal{TRing}$  ein topologischer Ring und  $M \in \text{TMod}_U\text{-}R$  ein topologischer  $R$ -Rechtsmodul. Für  $N \in \text{TMod}_U\text{-}R$  versehe  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, N) \dots$

- ... mit der diskreten Topologie, falls  $N$  diskret ist.

- ... andernfalls mit der Initialtopologie bezüglich aller Projektionen

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, \pi_U) : \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N/U), \quad f \longmapsto \pi_U \circ f,$$

wobei  $U \in \mathcal{U}_N$  und  $N \xrightarrow{\pi_U} N/U$  die kanonische Projektion in den diskreten Modul  $M/U$  ist.

**Bemerkung 6.13**

Es seien  $M, N \in \mathrm{TMod}_U\text{-}R$ . Dann bilden die  $\mathrm{End}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M)$ -Rechtsuntermoduln

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, U) \leq \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N)$$

mit  $U \in \mathcal{U}_M$  in  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N)$  eine Umgebungsbasis der 0.

*Beweis.* Nach Konstruktion ist für jedes  $U \in \mathcal{U}_N$  die folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N/U)$$

□

**Satz 6.14**

Es seien  $R \in \mathcal{TRing}$  ein topologischer und  $M \in \mathrm{TMod}_U\text{-}R$  ein topologischer  $R$ -Rechtsmodul. Man erhält einen Funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, -) : \mathrm{TMod}_U\text{-}R \longrightarrow \mathrm{TMod}_U\text{-}\mathrm{End}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M).$$

*Beweis.* Nach Konstruktion ist für alle  $N \in \mathrm{TMod}_U\text{-}R$  die unterliegende additive Gruppe des  $\mathrm{End}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M)$ -Rechtsmoduls  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N)$  eine topologische Gruppe. Wegen Bemerkung 6.13 besitzt  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N)$  eine Umgebungsbasis aus  $\mathrm{End}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M)$ -Rechtsmoduln. Es bezeichne

$$\mu : \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N) \times \mathrm{End}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N), \quad (f, g) \longmapsto f \circ g$$

die Modulverknüpfung auf  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N)$ . Es sei  $U \in \mathcal{U}_N$ . Dann gilt für jedes  $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, U)$  und  $g \in \mathrm{End}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M)$ , dass  $f \circ g(M) \subseteq f(M) \subseteq U$  ist, so dass  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, U) \times \mathrm{End}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M) \subseteq \mu^{-1}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, U))$ . Damit ist  $\mu$  stetig bei  $(0, 0)$  und für jedes  $g \in \mathrm{End}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M)$  die Rechtsmultiplikation mit  $g$  stetig bei 0. Es sei  $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N)$ . Dann ist für jedes  $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, f^{-1}(U))$  wegen  $f \circ g(M) \subseteq f(f^{-1}(U)) \subseteq U$  auch  $f \circ g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, U)$  und damit auch die Linksmultiplikation mit  $f$  stetig bei 0. Insgesamt ist wegen (War93, I Theorem 2.15)  $\mathrm{End}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M)$  ein topologischer Ring und wegen (War93, I Theorem 2.16)  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N)$  ein topologischer  $\mathrm{End}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M)$ -Rechtsmodul.

Es sei nun  $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(N, N')$  und  $U \in \mathcal{U}_{N'}$ . Dann ist  $f \circ g(M) \subseteq ff^{-1}(U) \subseteq U$  für alle  $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, f^{-1}(U))$  und folglich  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, f)$  stetig bei 0, also überall stetig.

□

**Proposition 6.15**

Es sei  $N \in \mathrm{TMod}_U\text{-}R$  ein  $R$ -Rechtsmodul und  $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(N, N_i)$  eine Familie stetiger  $R$ -Rechtsmodulhomomorphismen der Art, dass  $N$  die Initialtopologie bezüglich  $(f_i)_i$  trägt.

Dann trägt  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, N)$  die Initialtopologie bezüglich der Familie  $(\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMod}_U\text{-}R}(M, f_i))_i$ .

*Beweis.* Da  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, -)$  wegen Satz 6.14 ein Funktor ist, sind alle  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, f_i)$  stetig. Folglich ist die Topologie auf  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, N)$  feiner als die Initialtopologie.

(i) Es sei  $U \in \mathcal{U}_{N_i}$ . Dann ist  $f_i^{-1}(U) \subseteq N$  offen und es gilt

$$\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, f_i^{-1}(U)) = \text{Hom}_{\text{TMod}\text{-}R}(M, f_i)^{-1} \text{Hom}_{\text{TMod}\text{-}R}(M, U).$$

Nach Bemerkung 6.13 ist  $\text{Hom}_{\text{TMod}\text{-}R}(M, U) \subseteq \text{Hom}_{\text{TMod}\text{-}R}(M, M_i)$  offen, so dass auch  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, f_i^{-1}(U))$  offen ist in der Initialtopologie bzgl.  $(\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, f_i))_i$ .

(ii) Für ein weiteres  $V \in \mathcal{U}_{M_j}$  gilt

$$\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, f_i^{-1}(U)) \cap \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, f_j^{-1}(V)) = \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, f_i^{-1}(U) \cap f_j^{-1}(V))$$

Nach Definition der Initialtopologie bilden die Mengen  $U = f_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f_{i_r}^{-1}(U_r)$  mit  $U_j \in \mathcal{U}_{i_j}$  in  $M$  eine Umgebungsbasis der 0. Wegen (i) und (ii) ist daher  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, U)$  offen in der Initialtopologie bezüglich  $(\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, f_i))_i$ . Nach Bemerkung 6.13 ist also die Initialtopologie feiner als die kanonische. □

### Proposition 6.16

Es seien  $R$  ein topologischer Ring und  $M \in \text{TMod}_U\text{-}R$  ein topologischer  $R$ -Rechtsmodul.

Dann vertauscht der Funktor  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, -)$  mit Limiten.

*Beweis.* Es sei  $I \xrightarrow{F} \text{TMod}_U\text{-}R$  ein Diagramm in  $\text{TMod}_U\text{-}R$ . Betrachte folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, \lim F) & \xrightarrow{\exists! \phi} & \lim_{i \in I} \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, F(i)) \\ & \searrow & \downarrow p_i \\ & \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, \pi_i) & \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, F(i)), \end{array}$$

wobei  $\lim F \xrightarrow{\pi_i} F(i)$  und  $p_i$  für alle  $i \in I$  die kanonischen Limes-Projektionen sind. Nach der universellen Eigenschaft des Limes in  $\text{TMod}_U\text{-} \text{End}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M)$  existiert dann ein stetiger Modulisomorphismus  $\phi$  wie eingezeichnet. Der Vergissfunktor  $\text{TMod}_U\text{-} \text{End}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M) \xrightarrow{U} \text{Mod}\text{-} \text{End}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M)$  vertauscht mit Limiten wegen (AHS06, Proposition 3.17), da  $U$  nach Bemerkung 2.6 topologisch ist. Darüber hinaus vertauscht auch  $\text{Mod}\text{-} \text{End}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M) \xrightarrow{V} \text{Set}$  mit Limiten und damit insgesamt auch  $V \circ U$ . Durch Anwenden von  $V \circ U$  auf obiges Diagramm erhält man ein analoges Diagramm in  $\text{Set}$ . Nach (AHS06, Proposition 3.17) vertauschen Hom-Funktoren als Funktoren nach  $\text{Set}$  mit Limiten, so dass aufgrund der Eindeigkeitsaussage der universellen Eigenschaft des Limes  $U(\phi)$  bijektiv sein muss. Nach Proposition 6.15 und Definition 6.12 tragen sowohl  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, \lim F)$  als auch  $\lim_{i \in I} \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-} \text{End}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M)}(M, F(i))$  die Initialtopologie bezüglich der Projektionen  $\pi_i$  und  $p_i$ , so dass  $\phi$  nach Lemma 6.3 schließlich ein Isomorphismus topologischer  $\text{End}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M)$ -Rechtsmoduln ist. □

### Korollar 6.17

Es seien  $R$  ein topologischer Ring und  $M, N \in \text{TMod}_U\text{-}R$  topologische  $R$ -Rechtsmoduln.

(i) Falls  $N$  hausdorffsch ist, dann ist auch  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, N)$  hausdorffsch.

(ii) Falls  $N$  vollständig ist, dann ist auch  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, N)$  vollständig.

*Beweis.*

(i) Wegen (War93, I Theorem 3.4) ist eine topologische Gruppe genau dann hausdorffsch, wenn die Menge, die nur das neutrale Element enthält, abgeschlossen ist. Unter Benutzung von (War93, I Theorem 3.3 (3)) gilt für  $0 \in \text{Hom}_{\text{TMod}_U}(M, N)$  daher:

$$\begin{aligned} \overline{\{0\}} &= \bigcap_{U \in \mathcal{U}_N} \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, U) \subseteq \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, \bigcap_{U \in \mathcal{U}_N} U) \\ &= \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, \{0\}) = \{0\}, \end{aligned}$$

womit folgt, dass auch  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, N)$  hausdorffsch ist.

(ii) Da  $N$  vollständig ist, gilt wegen Lemma 6.4, dass  $N \cong \varprojlim_{U \in \mathcal{U}_N} N/U$  und damit gilt nach Proposition 6.16

$$\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, N) \cong \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, \varprojlim_{U \in \mathcal{U}_N} N/U) \cong \varprojlim_{U \in \mathcal{U}_N} \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, N/U).$$

Nach Definition ist  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, N/U)$  diskret, da  $N/U$  diskret ist, und damit auch vollständig. Nach Lemma 6.2 ist dann auch  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, N)$  vollständig. □

### Lemma 6.18

Es seien  $R$  ein topologischer Ring und  $M, N \in \text{TMod}_U\text{-}R$  topologische  $R$ -Rechtsmoduln. Die Auswertungsabbildung

$$ev : \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, N) \times M \longrightarrow N, \quad (f, m) \longmapsto f(m)$$

ist stetig, wenn man ihren Definitionsbereich mit der Produkttopologie versieht.

*Beweis.* Es seien  $n \in N$  und  $U \in \mathcal{U}_N$ . Wähle  $(f, m) \in ev^{-1}(n + U)$ . Da  $f$  stetig ist, ist  $0 \in f^{-1}(U) \subseteq M$  offen. Für alle  $g \in \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, U)$  und  $k \in f^{-1}(U)$  gilt

$$ev(f + g, m + k) = f(m) + f(k) + g(m + k) \in n + U.$$

Folglich ist  $ev(f + \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, U), k + f^{-1}(U)) \subseteq n + U$  mit der offenen Umgebung  $(f, m) \in (f + \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, U)) \times (k + f^{-1}(U)) \subseteq \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, N) \times M$ . Da die Mengen der Form  $n + U$  eine Basis der Topologie auf  $N$  bilden, ist damit  $ev$  stetig bei  $(f, m)$ . Da  $(f, m)$  beliebig gewählt war, ist  $ev$  insgesamt stetig. □

### Proposition 6.19

Es sei  $R \in \mathcal{TRing}$  ein Ring und  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, M')$ .

Dann erhält man für jedes  $N \in \text{TMod}_U\text{-}R$  einen stetigen Homomorphismus abelscher, topologischer Gruppen

$$\varphi_N : \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M', N) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, N), \quad f \longmapsto f \circ \varphi$$

und insgesamt eine natürliche Transformation

$$(\varphi_N) : U \circ \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M', -) \longrightarrow V \circ \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(M, -),$$

wobei  $U$  bzw.  $V$  die jeweiligen Vergissfunktoren von  $\text{Mod-End}_{\text{Mod-}R}(M)$  bzw.  $\text{Mod-End}_{\text{Mod-}R}(M')$  in die Kategorie der abelschen, topologischen Gruppen sind.

*Beweis.* Wegen Proposition 6.11 genügt es die Stetigkeit der  $\varphi_N$  zu zeigen. Aber für jedes  $U \in \mathcal{U}_N$  ist

$$\varphi_N(\text{Hom}_{\text{TMod}_{U-R}}(M', U)) \subseteq \text{Hom}_{\text{TMod}_{U-R}}(M, U),$$

was wegen Bemerkung 6.13 die Stetigkeit von  $\varphi_N$  impliziert. □

### 6.3.3 Wechsel des operierenden Rings

Der Vollständigkeit wegen wird nun auch der Wechsel des operierenden Rings behandelt. Angewendet wird dieser im ersten Beweis der Verträglichkeit des vollständigen Schiefmonoidrings mit semidirekten Produkten.

#### Proposition 6.20

Es sei  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{TRing}}(R, S)$  ein stetiger Ringhomomorphismus.

Jeder topologische  $S$ -Rechtsmodul  $M \in \text{TMod}_{U-S}$  trägt dann auf kanonische Weise auch eine topologische  $R$ -Rechtsmodulstruktur und man erhält einen treuen Funktor

$$F_\varphi : \text{TMod}_{U-S} \longrightarrow \text{TMod}_{U-R},$$

für den gilt:

- (i) Für alle  $M, N \in \text{TMod}_{U-S}$  induziert  $F_\varphi$  einen Monomorphismus topologischer Gruppen

$$F_\varphi : \text{Hom}_{\text{TMod}_{U-S}}(M, N) \hookrightarrow \text{Hom}_{\text{TMod}_{U-R}}(F_\varphi(M), F_\varphi(N)), \quad f \longmapsto F_\varphi(f),$$

der  $\text{Hom}_{\text{TMod}_{U-S}}(M, N)$  topologisch isomorph in  $\text{Hom}_{\text{TMod}_{U-R}}(F_\varphi(M), F_\varphi(N))$  einbettet.

- (ii) Ist  $\varphi$  surjektiv, dann ist  $F_\varphi$  volltreu.

Insbesondere sind dann die Einbettungen aus (i) topologische Isomorphismen.

*Beweis.* Es sei  $M \in \text{TMod}_{U-S}$  und  $M \times S \xrightarrow{\mu_M} M$  die stetige Modulverknüpfung. Dann ist auch  $\mu_{F_\varphi(M)} = \mu_M \circ (\text{id}_M \times \varphi)$  stetig, da  $\varphi$  stetig ist. Da  $\varphi$  ein Ringhomomorphismus ist, ist  $F_\varphi(M) = M$  als additive, topologische Gruppe zusammen mit der Verknüpfung  $\mu_{F_\varphi(M)}$  ein topologischer  $R$ -Rechtsmodul.

Es sei  $f \in \text{Hom}_{\text{TMod}_{U-S}}(M, N)$ . Dann ist  $F_\varphi(f) = f$  als Abbildung wieder stetig und  $R$ -rechtslinear wegen  $F_\varphi(f)(m \cdot r) = f(m\varphi(r)) = f(m)\varphi(r) = F_\varphi(f)(m) \cdot r$  für alle  $m \in F_\varphi(M)$  und  $r \in R$ . Damit ist  $F_\varphi$  ein Funktor. Nach Konstruktion ist  $F_\varphi$  treu.

- (i) Es seien  $M, N \in \text{TMod}_{U-S}$  zwei topologische  $S$ -Rechtsmoduln und  $U \in \mathcal{U}_N$  beliebig. Dann induziert  $F_\varphi$  ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{TMod}_{U-S}}(M, N) & \xrightarrow{\text{kan.}} & \text{Hom}_{\mathcal{TMon}_{U-S}}(M, N/U) \\ F_\varphi \downarrow & & \downarrow F_\varphi \\ \text{Hom}_{\text{TMod}_{U-R}}(F_\varphi(M), F_\varphi(N)) & \xrightarrow{\text{kan.}} & \text{Hom}_{\mathcal{TMon}_{U-R}}(F_\varphi(M), F_\varphi(N/U)) \end{array}$$

Da die unterliegende topologische additive Gruppe von  $M$  und  $F_\varphi(M)$  dieselbe ist, gilt  $\mathcal{U}_{F_\varphi(N)} = F_\varphi(\mathcal{U}_N)$ . Nach Definition 6.12 tragen also die Homomorphismenmengen auf der rechten Seite des Diagramms die diskrete Topologie, während die Homomorphismenmengen auf der linken Seite die Initialtopologie bezüglich der kanonischen Projektionen hinüber



auf die rechte Seite tragen für alle  $U \in \mathcal{U}_N$ . Das rechte  $F_\varphi$  ist damit stetig und offen, da Quelle und Ziel diskret sind. Insbesondere trägt  $\text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}}(M, N/U)$  die Initialtopologie bezüglich des rechten  $F_\varphi$ , da dieses injektiv ist. Folglich trägt  $\text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}}(M, N)$  auch die Initialtopologie bezüglich der Verkettungen

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}}(M, N) \xrightarrow{\text{kan.}} \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}}(M, N/U) \xrightarrow{F_\varphi} \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(F_\varphi(M), F_\varphi(N/U))$$

für alle  $U \in \mathcal{U}_N$ . Nach der Kommutativität des Diagramms und nach Definition der Topologie auf  $\text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(F_\varphi(M), F_\varphi(N))$  trägt also  $\text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}}(M, N)$  die Initialtopologie bezüglich des linken  $F_\varphi$ . Insbesondere ist dieses dann stetig und offen.

- (ii) Es seien  $M, N \in \mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}$  und  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(F_\varphi(M), F_\varphi(N))$ . Da  $\varphi$  surjektiv ist, gibt es für jedes  $s \in S$  ein  $r \in R$ , so dass  $s = \varphi(r)$ . Es folgt dann  $f(ms) = f(m\varphi(r)) = f(m \cdot r) = f(m) \cdot r = f(m)\varphi(r) = f(m)s$  für jedes  $m \in M$ . Folglich ist  $f$  schon  $S$ -rechtslinear und kommt daher von einem  $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(M, N)$ . Folglich ist  $\text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(M, N) \xrightarrow{F_\varphi} \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(F_\varphi(M), F_\varphi(N))$  surjektiv. Da  $M$  und  $N$  beliebig waren, ist  $F_\varphi$  damit voll. □

### Korollar 6.21

Es sei  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Ring}}(R, S)$  ein stetiger Ringhomomorphismus und  $M \in \mathcal{T}\text{Mod}-S$  ein topologischer  $S$ -Rechtsmodul.

Dann ist  $\text{End}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}}(M) \xrightarrow{F_\varphi} \text{End}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(F_\varphi(M))$  ein stetiger Ringmonomorphismus, der seine Quelle topologisch isomorph in sein Bild abbildet und wiederum einen treuen Funktor

$$F_{F_\varphi} : \mathcal{T}\text{Mod}_U\text{-End}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(F_\varphi(M)) \longrightarrow \mathcal{T}\text{Mod}_U\text{-End}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}}(M)$$

induziert. Insgesamt erhält man ein Diagramm von Funktoren (i.A. nicht kommutativ!)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}\text{Mod}_{U-S} & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}}(M, -)} & \mathcal{T}\text{Mod}_U\text{-End}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}}(M) \\ F_\varphi \downarrow & & \uparrow F_{F_\varphi} \\ \mathcal{T}\text{Mod}_{U-R} & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}}(F_\varphi(M), -)} & \mathcal{T}\text{Mod}_U\text{-End}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(F_\varphi(M)) \end{array}$$

und eine natürliche Transformation  $\text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}}(M, -) \longrightarrow F_{F_\varphi} \circ \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(F_\varphi(M), -) \circ F_\varphi$ , die ein natürlicher Isomorphismus ist, falls  $\varphi$  surjektiv ist.

*Beweis.* Für jedes  $N \in \mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}$  ist

$$F_{F_\varphi} \circ \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(F_\varphi(M), -) \circ F_\varphi(N) = F_{F_\varphi} \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(F_\varphi(M), F_\varphi(N))$$

und für jedes  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}}(M, N)$  ist

$$F_\varphi(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(F_\varphi(M), F_\varphi(N)) = F_{F_\varphi} \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-R}}(F_\varphi(M), F_\varphi(N)),$$

wobei die Gleichheit als die der unterliegenden topologischen, additiven Gruppen gemeint ist. Damit definiert  $F_\varphi$  eine Abbildung zwischen den unterliegenden Mengen der beiden Funktoren ausgewertet bei  $N$ . Wegen Proposition 6.20 (i) ist diese Abbildung ein Homomorphismus der unterliegenden topologischen, additiven Gruppen. Falls  $\varphi$  surjektiv ist, dann ist sie wegen (i) und (ii) ein topologischer Isomorphismus. Für alle  $g \in \text{End}_{\mathcal{T}\text{Mod}_{U-S}}(M)$  ist  $F_\varphi(f \cdot g) = F_\varphi(f \circ g) =$

$F_\varphi(f) \circ F_\varphi(g) = F_\varphi(f) \cdot g$  nach Definition der Operationen auf den jeweiligen Moduln. Dies impliziert die  $\text{End}_{\text{TMod}_{U-S}}(M)$ -Rechtslinearität von  $F_\varphi$ .

Für  $N, N' \in \text{TMod}_{U-S}$  und  $h \in \text{Hom}_{\text{TMod}_{U-S}}(N, N')$  erhält man aufgrund der Funktoreigenschaft von  $F_\varphi$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{TMod}_{U-S}}(M, N) & \xrightarrow{F_\varphi} & F_{F_\varphi} \text{Hom}_{\text{TMod}_{U-R}}(F_\varphi(M), F_\varphi(N)) \\ \text{Hom}_{\text{TMod}_{U-S}}(M, h) \downarrow & & \downarrow F_{F_\varphi} \text{Hom}_{\text{TMod}_{U-S}}(F_\varphi(M), F_\varphi(h)) \\ \text{Hom}_{\text{TMod}_{U-S}}(M, N') & \xrightarrow{F_\varphi} & F_{F_\varphi} \text{Hom}_{\text{TMod}_{U-R}}(F_\varphi(M), F_\varphi(N')). \end{array}$$

□

## 6.4 Topologische, freie Moduln erzeugt von einem lokal proendlichen Raum

Jedem (Schief-)Monoidring liegt ein freier  $R$ -Modul zu Grunde. Da die Topologie des topologischen Schiefmonoidrings nicht von der Monoidstruktur, sondern allein von der Topologie abhängt, kann an dieser Stelle der freie  $R$ -Modul über einem topologischen Ring  $R$  erzeugt von einem lokal proendlichen, eigentlichen Raum angegeben werden. Dieser trägt dann noch keine Multiplikation und ist deshalb auch nichts weiter als ein topologischer  $R$ -Modul. Dennoch induziert diese Konstruktion einen Funktor  $\text{Top}_{L,P} \rightarrow R\text{-TMod}$ .

### Definition 6.22

Es seien  $R$  ein topologischer Ring und  $X$  ein lokal proendlicher Raum. Nach Satz 5.12 gibt es eine Inklusion von  $X$  in seine proendliche Einpunktkompaktifizierung  $\hat{X} = X \cup \{0\}$ . Nach Lemma 5.2 gibt es dann eine Darstellung  $\hat{X} \cong \varprojlim_i X_i$  mit endlichen, diskreten Räumen  $X_i$ . Versehe  $R^{(X_i)} \cong R^{X_i}$  mit der Produkttopologie und  $R^{(X)}$  mit der Initialtopologie bezüglich aller Abbildungen

$$R^{(X)} \hookrightarrow R^{(\hat{X})} \xrightarrow{R^{(\pi_i)}} R^{(X_i)} \twoheadrightarrow R^{(X_i)} / R\pi_i(0),$$

wobei  $R^{(\pi_i)}$  die  $R$ -linkslinere Fortsetzung der Limesprojektion  $\hat{X} \xrightarrow{\pi_i} X_i$  ist. Ausgestattet mit dieser Topologie ist  $R^{(X)}$  wegen Bemerkung 2.6 ein topologischer  $R$ -Linksmodul und heie **freier topologischer Linksmodul** erzeugt von  $X$  über  $R$ .

Fixiere zunächst für jeden lokal proendlichen Raum eine Darstellung von  $\hat{X}$  als projektiver Limes endlicher, diskreter Räume  $X_i$ . Im Folgenden wird gezeigt, dass die Topologie auf  $R^{(X)}$  jedoch nicht von der Wahl der Darstellung abhängt.

### Lemma 6.23

Es sei  $R$  ein topologischer Ring und  $X$  ein lokal proendlicher Raum mit  $\hat{X} \cong \varprojlim_i X_i$  und endlichen, diskreten Räumen  $X_i$ .

Dann ist eine Basis der Topologie auf  $R^{(X)}$  gegeben durch Mengen der Form  $R^{(X)} \cap (R^{(\pi_i)})^{-1}(U)$ , wobei  $U = \prod_{x \in X_i} U_x \subseteq R^{X_i} = R^{(X_i)}$  ist mit offenen  $U_x \subseteq R$  für  $x \in X_i$  und  $U_{\pi_i(0)} = R$ .

*Beweis.* Für jedes  $i$  bezeichne  $R^{(X_i)} \xrightarrow{p_i} R^{(X_i)}/(\pi_i(0))$  die kanonische Projektion. Ist  $U \subseteq R^{(X_i)}$  eine Menge der beschriebenen Form, dann ist  $U \subseteq R^{(X_i)}$  offen und  $U + R\pi_i(0) = U$  wegen  $U_{\pi_i(0)} = R$ . Insbesondere ist  $U = p_i^{-1}p_i(U)$ , so dass nach Definition der Quotiententopologie  $p(U) \subseteq R^{(X_i)}/(\pi_i(0))$  offen und damit auch  $R^{(X)} \cap (R^{(\pi_i)})^{-1}(U) = R^{(X)} \cap (R^{(\pi_i)})^{-1}p_i^{-1}p_i(U)$  offen ist nach Definition der Topologie auf  $R^{(X)}$ .

Umgekehrt sei  $W \subseteq R^{(X_i)}/(\pi_i(0))$  eine offene Teilmenge. Nach Definition der Quotiententopologie ist dann  $p_i^{-1}(W) \subseteq R^{(X_i)}$  offen und es gibt eine offene Basismenge  $U = \prod_{x \in X_i} U_x x \subseteq R^{X_i} = R^{(X_i)}$  mit offenen  $U_x \subseteq R$  für  $x \in X_i$  und  $U \subseteq p_i^{-1}(W)$ . Wegen  $R\pi_i(0) \subseteq p_i^{-1}(W)$  kann ohne Einschränkung  $U_{\pi_i(0)} = R$  angenommen werden, d.h.  $U$  ist eine Teilmenge wie in der Voraussetzung. Da  $R^{(X)} \cap (R^{(\pi_i)})^{-1}p_i^{-1}(W)$  eine offene Subbasismenge von  $R^{(X)}$  ist, bilden die Mengen  $R^{(X)} \cap (R^{(\pi_i)})^{-1}(U)$  eine Subbasis auf  $R^{(X)}$ . Wie im Beweis von Lemma 5.6 sieht man, dass die Menge aller  $R^{(X)} \cap (R^{(\pi_i)})^{-1}(U)$  abgeschlossen ist unter endlichen Durchschnitten und somit auch eine Basis der Topologie bildet. □

Für das Beispiel eines diskreten topologischen Raums erhält man die Teilraumtopologie der Produkttopologie. Diese Beobachtung spielt bei der späteren Betrachtung von (Schief-)Potenzreihenringen eine Rolle.

### Korollar 6.24

*Es seien  $R$  ein topologischer Ring und  $X$  ein diskreter topologischer Raum. Dann trägt  $R^{(X)} \subseteq R^X$  die Teilraumtopologie der Produkttopologie.*

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{U}$  die Menge aller offenen Umgebungen von  $0 \in \hat{X}$ . Für jedes  $U \in \mathcal{U}$  sei  $X_U = \hat{X}/U$  der topologische Raum, der entsteht, wenn alle Punkte in  $U$  zu einem Punkt zusammengefasst werden. Da  $X$  diskret ist, ist  $X_U$  versehen mit der Quotiententopologie ebenfalls diskret und außerdem endlich, da  $\hat{X} \setminus U \subseteq X$  kompakt und damit endlich ist. Für zwei  $U, V \in \mathcal{U}$  mit  $U \subseteq V$  gibt es eine kanonische Projektion  $X_U \xrightarrow{f_{U,V}} X_V$ . Außerdem ist  $\mathcal{U}$  abgeschlossen unter Durchschnitten, so dass  $(X_U, f_{U,V})$  ein projektives System endlicher, diskreter Räume ist. Nach Konstruktion stimmt die Topologie auf  $\hat{X}$  mit der Initialtopologie bezüglich der kanonischen Projektionen  $\hat{X} \xrightarrow{\pi_i} X_U$  überein. Nach Lemma 5.5 (iv) induziert die Limesabbildung  $\hat{X} \xrightarrow{f} \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} X_U$  einen topologischen Isomorphismus  $\hat{X} \cong f(\hat{X})$ . Da  $\hat{X}$  kompakt ist, ist auch  $f(\hat{X})$  kompakt und nach (iv) gilt damit  $\hat{X} \cong \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} X_U$ .

Wählt man diese projektive Darstellung von  $\hat{X}$ , dann erhält man nach Lemma 6.23 eine Basis der Topologie auf  $R^{(X)}$ , bestehend aus Mengen

$$R^{(X)} \cap \left( \prod_{x \in X} U_x x \right)$$

mit offenen  $U_x \subseteq R$  und  $U_x = R$  für alle  $x \in V$  mit einem  $V \in \mathcal{U}$ . Dies sind aber gerade die Basismengen der Teilraumtopologie der Produkttopologie auf  $R^{(X)} \subseteq R^X$ . □

### Bemerkung 6.25

*Für jeden nicht indiskreten, topologischen Ring  $R$  und jeden lokal proendlichen Raum  $X \in \text{Top}_L$  gibt es kanonische Inklusionen, die den betreffenden topologischen Raum homöomorph in den Bildbereich einbetten:*

- (i)  $\iota_X : X \hookrightarrow R^{(X)}, \quad x \mapsto 1 \cdot x.$
- (ii)  $\iota_{R,x} : R \hookrightarrow R^{(X)}, \quad r \mapsto r \cdot x$  für jedes  $x \in X.$

*Beweis.* Da  $R$  nicht indiskret ist, gibt es eine offene Teilmenge  $V \subseteq R$  und zwei Punkte  $x, y \in R$  mit  $x \in V$  und  $y \notin V$ . Dann ist  $U = \lambda_{y-x}^{-1}(-x + V) \subseteq R$  eine offene Teilmenge, die 0 aber nicht 1 enthält.  $U' = 1 - U$  ist dann offen und enthält 1 aber nicht 0. Jedes  $X \in \mathcal{Top}_L$  mit der projektiven Darstellung  $\hat{X} \cong \varprojlim_i X_i$  trägt als Teilraum  $X \subseteq \hat{X}$  die Initialtopologie bezüglich der Abbildungen  $X \xrightarrow{\iota} \hat{X} \xrightarrow{\pi_i} X_i$ , wobei  $\hat{X} \xrightarrow{\pi_i} X_i$  die kanonischen Limesprojektionen sind.

- (i) Die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\iota_X} & R^{(X)} \\
 \downarrow \iota & & \downarrow R^{(\iota_X)} \\
 \hat{X} & \xrightarrow{\iota_{\hat{X}}} & R^{(\hat{X})} \\
 \downarrow \pi_i & & \downarrow \pi_i \\
 X_i & \xrightarrow{\iota_{X_i}} & R^{(X_i)}
 \end{array}$$

impliziert dann mit Lemma 6.23 die Behauptung. Denn für alle  $W \subseteq X_i$  ist

$$V = \prod_{x \in X_i} V_x x \quad \text{mit } V_x = \begin{cases} U & x \in W \\ R & x \notin W \text{ oder } x = \pi_i(0) \end{cases}$$

offen in  $R^{(X_i)}$  und es gilt

$$(\pi_{X_i} \circ \iota_X)^{-1}(W) = (R^{(\pi_i)} \circ R^{(\iota_X)} \circ \iota_X)^{-1}(V).$$

Damit ist  $\iota_X$  einerseits stetig und andererseits ist  $X \xrightarrow{\iota_X} R^{(X)}$  offen.

- (ii) Da  $X$  ein Hausdorff-Raum ist, gibt es für jedes  $x \in X$  ein  $i$ , so dass  $\pi_i \circ \iota_X(x) \neq \pi_i(0)$  ist. Mit dieser Beobachtung folgt die Behauptung mit gleicher Argumentation wie in (i) und Lemma 6.23 aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_R & & \\
 & & \text{=====} & & \\
 & R & & & R \\
 \downarrow \iota_{R,x} & & & & \uparrow \pi_{\pi_i(x)} \\
 R^{(X)} & \xrightarrow{R^{(\iota_X)}} & R^{(\hat{X})} & \xrightarrow{R^{(\pi_i)}} & R^{(X_i)}
 \end{array}$$

□

**Lemma 6.26**

Es sei  $X$  ein lokal proendlicher Raum und  $R$  ein nicht-indiskreter, topologischer Ring. Dann gilt:

- (i) Für jedes offene Kompaktum  $K \subseteq X$  gibt es eine offene Umgebung  $0 \in U \subseteq R^{(X)}$ , so dass  $X \setminus U = K$  ist.
- (ii) Für jede offene Teilmenge  $0 \in V \subseteq R^{(X)}$  ist  $X \setminus V$  kompakt.

*Beweis.* Es sei  $\hat{X} \cong \varprojlim_i X_i$  mit endlichen, diskreten  $X_i$ .

- (i) Da  $R$  nicht indiskret ist, gibt es eine offene Teilmenge  $V \subseteq R$  und zwei Punkte  $x, y \in R$  mit  $x \in V$  und  $y \notin V$ . Dann ist  $U = \lambda_{y-x}^{-1}(-x + V) \subseteq R$  eine offene Teilmenge, die 0 aber nicht 1 enthält. Nach Lemma 5.15 gibt es für jedes offene Kompaktum  $K \subseteq X \subseteq \hat{X}$  ein  $i$ , so dass  $K = \pi_i^{-1}\pi_i(K)$  ist. Definiere:

$$V = \prod_{x \in X_i} V_x x \quad \text{mit } V_x = \begin{cases} U & x \in \pi_i(K) \\ R & x \notin \pi_i(K) \end{cases}$$

Wegen  $\pi_i(0) \notin \pi_i(K)$  ist nach Lemma 6.23  $V' = R^{(X)} \cap (R^{(\pi_i)})^{-1}(V)$  offen in  $R^{(X)}$  und es gilt nach Konstruktion  $X \setminus V' = K$ .

- (ii) Es sei  $0 \in V \subseteq R^{(X)}$  eine offene Teilmenge. Lemma 6.23 sichert die Existenz einer offenen Menge  $U = \prod_{x \in X_i} U_x x \subseteq R^{X_i} = R^{(X_i)}$  mit offenen  $0 \in U_x \subseteq R$  für  $x \in X_i$  und  $U_{\pi_i(0)} = R$ , so dass  $R^{(X)} \cap (R^{(\pi_i)})^{-1}(U) \subseteq V$  ist. Es folgt  $\pi_i^{-1}(X_i \setminus U) \subseteq X$ , da  $\pi_i(0) \in U$ . Außerdem ist  $\pi_i^{-1}(X_i \setminus U)$  abgeschlossen in  $\hat{X}$  und damit kompakt, da  $\hat{X}$  kompakt ist. Folglich ist  $X \setminus V \subseteq X \setminus (R^{(\pi_i)})^{-1}(U) = \pi_i^{-1}(X_i \setminus U)$  als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums selbst kompakt.

□

### Lemma 6.27

Es sei  $R$  ein topologischer Ring,  $M \in R\text{-TMod}$  ein topologischer  $R$ -Linksmodul und  $D$  eine endliche Menge. Weiterhin seien  $\phi_R \in \text{Hom}_{R\text{-TMod}}(R, M)$  ein stetiger  $R$ -Linksmodulhomomorphismus und  $\phi_D \in \text{Hom}_{\text{Set}}(D, M)$  eine Abbildung. Versieht man  $R^{(D)} \cong R^D$  mit der Produkttopologie, dann erhält man eine stetige Abbildung

$$\phi : R^{(D)} \longrightarrow M, \quad \sum_{d \in D} r_d d \longmapsto \sum_{d \in D} \phi_R(r_d) \cdot \phi_D(d).$$

*Beweis.* Da  $M$  ein topologischer  $R$ -Modul ist, definiert  $r \mapsto r \cdot \phi_D(d)$  eine stetige Abbildung  $R \mapsto M$ . Da  $D$  endlich ist, ist die auftretende Summe endlich und bildet damit eine Verkettungen der Addition auf  $S$ . Mit der Voraussetzung, dass  $\phi_R$  stetig ist, folgt dann die Stetigkeit von  $\phi$ .

□

### Lemma 6.28

Für jede Abbildung  $X \xrightarrow{f} Y$  zwischen zwei lokal proendlichen Räumen  $X$  und  $Y$  gilt:

$f$  ist genau dann stetig und eigentlich, wenn die  $R$ -lineare Fortsetzung  $R^{(X)} \xrightarrow{R^{(f)}} R^{(Y)}$  stetig ist.

*Beweis.* Zunächst induziert ein eigentliches  $f$  wegen Lemma 5.13 (i) eine stetige Abbildung  $\hat{X} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{Y}$ . Es sei nun  $j$  beliebig und  $\hat{Y} \xrightarrow{pr_j} Y_j$  die kanonische Projektion. Wegen  $pr_j \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\varprojlim_i X_i, Y_j)$  und Lemma 5.4 gibt es ein  $i$  mit kanonischer Projektion  $\hat{X} \xrightarrow{\pi_i} X_i$  und eine

Abbildung  $X_i \xrightarrow{g} Y_j$ , so dass folgendes Diagramm im Sinne von Mengen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \hat{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{Y} \\
 \pi_i \downarrow & & \downarrow pr_j \\
 X_i & \xrightarrow{g} & Y_j
 \end{array}$$

Durch  $R$ -lineare Fortsetzung erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 R^{(X)} & \xrightarrow{R^{(f)}} & R^{(Y)} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R^{(\hat{X})} & \xrightarrow{R^{(\hat{f})}} & R^{(\hat{Y})} \\
 R^{(\pi_i)} \downarrow & & \downarrow R^{(pr_j)} \\
 R^{(X_i)} & \xrightarrow{R^{(g)}} & R^{(Y_j)} \\
 \text{kan.} \downarrow & & \downarrow \text{kan.} \\
 R^{(X_i)} / R\pi_i(0) & \xrightarrow[\exists h]{- - -} & R^{(Y_j)} / Rpr_j(0),
 \end{array}$$

wobei die Existenz von  $h$  wegen der Identität  $g \circ \pi_i(0) = pr_j \circ \hat{f}(0) = pr_j(0)$  gesichert ist. Wegen Lemma 6.27 ist  $R^{(g)}$  stetig. Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie ist dann auch  $h$  stetig, was wegen der Kommutativität des äußeren Vierecks nach Definition der Topologien auf  $R^{(X)}$  und  $R^{(Y)}$  dazu äquivalent ist, dass  $R^{(f)}$  stetig ist.

Sei umgekehrt  $K \subseteq Y$  ein offenes Kompaktum. Nach Lemma 6.26 (i) gibt es eine offene Menge  $0 \in U \subseteq R^{(Y)}$ , so dass  $Y \setminus U = K$  ist. Da  $R^{(f)}$  stetig ist, ist auch  $0 \in (R^{(f)})^{-1}(U) \subseteq R^{(X)}$  offen und damit  $f^{-1}(K) = f^{-1}(Y \setminus U) = M \setminus f^{-1}(Y \cap U) = X \setminus (R^{(f)})^{-1}(U)$  wegen Lemma 6.26 (ii) kompakt. Mit Lemma 5.11 folgt dann die Behauptung.  $\square$

**Korollar 6.29**

Es seien  $R$  ein topologischer Ring.

- (i) Für einen lokal proendlichen Raum  $X$  hängt die Topologie auf  $R^{(X)}$  nicht von der Wahl der Darstellung  $\hat{X} \cong \varprojlim_i X_i$  ab.
- (ii) Für einen proendlichen Raum  $X = \varprojlim_i X_i$  mit endlichen, diskreten  $X_i$  trägt  $R^{(X)}$  die Initialtopologie bezüglich der  $R$ -linearen Abbildungen  $R^{(X)} \xrightarrow{R^{(\pi_i)}} R^{(X_i)}$ , wobei  $R^{(X_i)} \cong R^{X_i}$  die Produkttopologie trägt und  $X \xrightarrow{\pi_i} X_i$  die Limesprojektionen sind.
- (iii) Man erhält einen Funktor  $\mathcal{T}op_{L,P} \xrightarrow{R^{(-)}} R\text{-TMod}$ .

Beweis.

- (i) Es sei  $M_1 = R^{(X)}$  versehen mit der Topologie induziert von der Darstellung  $\hat{X} \cong \varprojlim_i X_i$  und  $M_2 = R^{(X)}$  versehen mit der Topologie induziert von der Darstellung  $\hat{X} \cong \varprojlim_j Y_j$ .

Da die Identität auf  $X$  stetig und eigentlich ist, folgt mit Lemma 6.28, dass  $M_1 \xrightarrow{R(\text{id}_X)} M_2$  stetig ist. Folglich ist die Topologie auf  $M_1$  feiner als die von  $M_2$ . Aus Symmetriegründen ist die Topologie auf  $M_2$  feiner als die von  $M_1$  und stimmt damit überein.

- (ii) Wegen Satz 5.29 (i) ist  $\hat{X} \cong \varprojlim_i \hat{X}_i$  und man erhält für alle  $i$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} R^{(X)} & \xrightarrow{R(\pi_i)} & R^{(X_i)} & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow \phi_i & \\ R^{(\hat{X})} & \xrightarrow{R(\hat{\pi}_i)} & R^{(\hat{X}_i)} & \xrightarrow{\text{kan.}} & R^{(\hat{X}_i)} / (\hat{\pi}_i(0)), \end{array}$$

wobei  $\phi_i$  zunächst ein stetiger  $R$ -Modulisomorphismus ist. Ist  $0 \in U \subseteq R^{(X_i)}$  offen, dann ist auch  $0 \in U' = U \times R \cdot 0_{\hat{X}_i} \subseteq R^{(\hat{X}_i)}$  offen nach Definition der Produkttopologie. Aber  $U'$  ist das Urbild von  $\phi_i(U)$ . Nach Definition der Quotiententopologie ist dann auch  $\phi(U)$  offen, so dass  $\phi_i^{-1}$  stetig bei 0 und damit nach (War93, I Theorem 5.18) insgesamt stetig. Insbesondere ist  $\phi_i$  ein topologischer  $R$ -Modulisomorphismus. Die Behauptung folgt dann direkt aus der Kommutativität des Diagramms.

- (iii) Die Funktoreigenschaften folgen direkt aus den Funktoreigenschaften des freien Funktors  $\text{Set} \xrightarrow{R^{(-)}} R\text{-Mod.}$

□

**Lemma 6.30**

Es sei  $X$  ein lokal proendlicher Raum und  $F \subseteq X$  eine endliche Teilmenge.

Dann gibt es für jedes  $x \in X$  eine stetige,  $R$ -linkslineare Abbildung  $R^{(X)} \xrightarrow{p_x} R$  mit  $p_x(f) = pr_x(f)$ , für alle  $f \in R^{(F)}$ , wobei  $R^{(X)} \subseteq R^X \xrightarrow{pr_x} R$  die kanonische Projektion ist.

*Beweis.* Falls  $X$  endlich ist, dann ist  $X$  auch diskret, da  $X$  hausdorffsch ist. Folglich trägt  $R^{(X)}$  nach Korollar 6.24 die Produkttopologie und die kanonischen Projektionen  $R^{(X)} = R^X \rightarrow R$  erfüllen die gewünschte Eigenschaft.

Falls  $X$  unendlich ist, dann ist  $X \setminus F$  nicht leer. Es sei  $F' = F \cup \{z\}$  mit einem beliebigen  $z \in X \setminus F$ . Es sei  $\hat{X} \cong \varprojlim_i X_i$  mit endlichen, diskreten  $X_i$ . Weiterhin seien  $\hat{X} \xrightarrow{\pi_i} X_i$  die Limesprojektionen und  $X_i \xrightarrow{f_{i,j}} X_j$  die Übergangsabbildungen. Wähle ein  $x \in F'$ . Da  $X$  hausdorffsch ist und die Initialtopologie bezüglich der Projektionen  $\pi_i|_X$  trägt, gibt es für jedes  $x \neq y \in F'$  ein  $i_y$ , so dass  $\pi_{i_y}(x) \neq \pi_{i_y}(y)$  ist. Da die Indexmenge des projektiven Systems gerichtet und  $F$  endlich ist, gibt es ein  $i$  mit  $i \leq i_y$  für alle  $y \in F$ . Für alle  $x \neq y \in F'$  gilt dann

$$f_{i,i_y} \circ \pi_i(x) = \pi_{i_y}(x) \neq \pi_{i_y}(y) = f_{i,i_y} \circ \pi_i(y)$$

und insbesondere  $\pi_i(x) \neq \pi_i(y)$ . Es sei  $p_x$  die Verkettung von  $\pi_i$  mit der stetigen Projektion  $R^{(X_i)} = R^{X_i} \xrightarrow{pr_{\pi_i(x)}} R$  auf die Koordinate  $\pi_i(x)$ .

Für alle  $f = \sum_{x \in F} a_x x \in R^{(F)}$  und  $y \in F'$  gilt nun

$$p_y(f) = pr_{\pi_i(y)} \circ R^{(\pi_i)}(f) = pr_{\pi_i(y)} \left( \sum_{x \in F} a_x \pi_i(x) \right) = \sum_{\substack{x \in F \\ \pi_i(x) = \pi_i(y)}} a_x = a_y,$$

denn für  $x \in F$  impliziert  $\pi_i(x) = \pi_i(y)$  schon  $x = y$  nach Konstruktion von  $i$ . Damit erfüllt  $p_y$  für alle  $y \in F'$  die gewünschte Eigenschaft. Da  $f \in R^{(F)}$  war, gilt  $p_z(f) = 0$ . Für alle  $x \in X \setminus F$  kann also  $p_x = p_z$  gewählt werden. □

**Proposition 6.31**

Es sei  $R$  ein topologischer Ring und  $X$  ein lokal proendlicher Raum.

- (i) Ist  $R$  hausdorffsch, dann ist auch  $R^{(X)}$  hausdorffsch.
- (ii) Ist  $R \in R\text{-TMod}_U$ , dann ist auch  $R^{(X)} \in R\text{-TMod}_U$ .  
Ist  $R \in \text{TMod}_U\text{-}R$ , dann ist analog auch  $R^{(X)} \in \text{TMod}_U\text{-}R$ .

*Beweis.*

- (i) Für alle  $x \in X$  sei  $R^{(X)} \xrightarrow{pr_x} R$  die kanonische Projektion auf die Koordinate  $x$ . Für ein  $f \in R^{(X)}$  sei  $\text{supp}(f) = \{x \in X; pr_x(f) \neq 0\}$  der Träger von  $f$ . Nach Definition der direkten Summe ist  $\text{supp}(f)$  endlich für alle  $f \in R^{(X)}$ . Es seien nun  $a, b \in R^{(X)}$  zwei verschiedene Punkte. Folglich gibt es ein  $x \in X$ , so dass  $pr_x(a) \neq pr_x(b)$  ist. Für die endliche Teilmenge  $F = \text{supp}(a) \cup \text{supp}(b) \subseteq X$  gibt es nach Lemma 6.30 stetige Projektionen  $R^{(X)} \xrightarrow{p_x} R$  für alle  $x \in X$ , so dass  $p_x(f) = pr_x(f)$  für alle  $f \in R^{(F)}$ . Wegen  $a, b \in R^{(F)}$  ist also  $p_x(a) = pr_x(a) \neq pr_x(b) = p_x(b)$ . Da  $R$  ein Hausdorff-Raum ist, gibt es disjunkte, offene Teilmengen  $U_a, U_b \subseteq R$  mit  $pr_x(a) \in U_a$  und  $pr_x(b) \in U_b$ . Da  $p_x$  stetig ist, sind  $p_x^{-1}(U_a), p_x^{-1}(U_b) \subseteq R^{(X)}$  zwei disjunkte, offene Teilmengen, die  $a$  und  $b$  trennen. Da  $a, b \in R^{(X)}$  beliebig waren, ist damit  $R^{(X)}$  ein Hausdorff-Raum.
- (ii) Nach Definition der Topologie auf  $R^{(X)}$  bleibt zu zeigen, dass  $R\text{-TMod}_U$  unter Bildung des Produkts, der Quotienten und der Initialtopologie abgeschlossen ist.
  - Es seien  $M_i \in R\text{-TMod}_U$ , dann bilden die offenen Untermoduln  $\prod_i U_i$  mit  $U_i \in \mathcal{U}_{M_i}$  und  $U_i = R$  für fast alle  $i$  eine Umgebungsbasis der 0 von  $\prod_i M_i$ .
  - Ist  $M \in R\text{-TMod}_U$  und  $U \leq M$  ein Untermodul, dann bilden die offenen Untermoduln  $(N+U)/U$  für alle  $N \in \mathcal{U}_R$  eine Umgebungsbasis der 0 von  $M/U$ . Beachte dazu, dass  $N+U = \bigcup_{x \in U} (x+N) \subseteq M$  offen ist, da  $N \leq M$  offen und die Addition mit  $x \in U$  ein Homöomorphismus ist.
  - Sind  $M \in R\text{-Mod}$  und  $M_i \in R\text{-TMod}_U$  mit  $R$ -Modulhomomorphismen  $M \xrightarrow{f_i} M_i$  und  $M$  trage die Initialtopologie bezüglich der  $f_i$ . Dann bilden die offenen Untermoduln  $f_i^{-1}(N) \leq M$  für  $N \in \mathcal{U}_{M_i}$  für alle  $i$  eine Umgebungsbasis der 0.

□



# Kapitel 7

## Topologische Monoidring-Konstruktionen

Nachdem endlich alle Vorbereitungen getroffen sind, können nun die topologischen Schiefmonoidringe konstruiert werden. Während Monoidringe, topologisiert wie die freien  $R$ -Moduln erzeugt von einem lokal proendliche, eigentlichen Monoid über einem topologischen Ring  $R$ , in kanonischer Weise topologische Ringe sind, trifft dies für die allgemeineren Schiefmonoidringe nicht mehr zu. Einer der Hauptziele dieser Arbeit ist es, ein starkes Kriterium zu finden, wann ein topologisierter Schiefmonoidring auch ein topologischer Ring ist. Dieses findet sich in Satz 7.15. Auch wenn keine Notwendigkeit für das Kriterium nachgewiesen wird, so zeigen verschiedene Beispiele, dass es doch so scharf ist, dass alle bisher bekannten Spezialfälle der Konstruktion topologischer und vollständiger Schiefmonoidringe dadurch abgedeckt werden.

Ein weiteres Resultat dieses Kapitels ist die Verträglichkeit topologischer Schiefmonoidringkonstruktionen mit dem topologischen, semidirekten Produkt lokal proendlicher, eigentlicher Monoide. Die vollständigen Schiefmonoidringe und alle ihre Eigenschaften fallen schließlich als Korollare von der Konstruktion topologischer Schiefmonoidringe ab.

### 7.1 Topologische Monoidringe lokal proendlicher, eigentlicher Monoide

In diesem Abschnitt werden die topologischen Monoidringe konstruiert und die Funktorialität dieser Konstruktion nachgewiesen. Ebenso wird gezeigt, dass die Eigentlichkeit lokal proendlicher Monoide notwendig dafür ist, dass der topologische Monoidring ein topologischer Ring ist.

#### Lemma 7.1

*Es sei  $M \in \mathcal{T}Mon_{L,P}$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid.*

*Dann ist  $R[M] \cong R^{(M)}$  versehen mit der Topologie des freien topologischen  $R$ -Linksmoduls aus Definition 6.22 ein topologischer Ring.*

*Beweis.* Falls  $M$  endlich und diskret ist, dann ist  $R[M]$  mit der Produkttopologie zunächst ein topologischer  $R$ -Linksmodul. Es bleibt also zu zeigen, dass die Multiplikation auf  $R[M]$  stetig ist. Diese lässt sich aber darstellen als endliche Verkettung von Addition und Multiplikation auf  $R$ . Somit ist  $R[M]$  topologisch, da  $R$  nach Voraussetzung topologisch ist.

Es sei nun  $M$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid. Da die Topologie auf  $R[M]$  unabhängig ist von der projektiven Darstellung von  $\hat{M}$ , betrachte man den topologischen Isomorphismus

$\hat{M} \cong \varprojlim_{S \in \text{Cong}_O(\hat{M})} \hat{M}/S$  aus Korollar 5.42. Dann trägt  $R[M]$  nach Definition die Initialtopologie bezüglich der Projektionen

$$R[M] \hookrightarrow R[\hat{M}] \xrightarrow{R[\pi_S]} R[\hat{M}/S] \xrightarrow{\text{kan.}} R[\hat{M}/S]/(\pi_S(0)).$$

Wie gerade gesehen ist jedes  $R[\hat{M}/S]$  ein topologischer Ring. Nach (War93, I Theorem 5.4) ist damit auch  $R[\hat{M}/S]/(\pi_S(0))$  ein topologischer Ring und wegen Proposition 2.5 ist auch  $R[M]$  ein topologischer Ring. □

**Definition 7.2**

Es seien  $R$  ein topologischer Ring und  $M \in \mathcal{T}Mon_{L,P}$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid. Im Folgenden sei  $R[M] \cong R^{(M)}$  mit der Topologie aus Definition 6.22 ausgestattet und heiÙe **topologischer Monoidring** von  $M$  über  $R$ .

**Lemma 7.3**

Jedes  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}Mon_{L,P}}(M, N)$  induziert einen stetigen Ringhomomorphismus  $R[M] \xrightarrow{R[f]} R[N]$ .

*Beweis.* Da  $R[f]$  nach dem Beweis der universellen Eigenschaft von  $R[M]$  (siehe Bemerkung 4.4) die  $R$ -lineare Fortsetzung von  $f$  ist, gilt die Behauptung nach Lemma 6.28. □

**Korollar 7.4**

Man erhält einen Funktor

$$\mathcal{T}Ring \times \mathcal{T}Mon_{L,P} \longrightarrow \mathcal{T}Ring, \quad (R, M) \longmapsto R[M].$$

*Beweis.* Die Funktorialität in  $M$  folgt direkt aus Korollar 6.29 (ii) und Lemma 7.1. Für die Funktorialität in  $R$  lässt sich wie im Beweis von Lemma 6.28 ein kommutatives Diagramm konstruieren. Dazu sei  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}Ring}(R, S)$  ein topologischer Ringhomomorphismus und  $M \subseteq \hat{M} \cong \varprojlim_{T \in \text{Cong}_O(\hat{M})} \hat{M}/T$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid.

$$\begin{array}{ccc} R^{(M)} & \xrightarrow{f^{(M)}} & S^{(M)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^{(\hat{M})} & \xrightarrow{f^{(\hat{M})}} & S^{(\hat{M})} \\ \downarrow R(\pi_T) & & \downarrow S(\pi_T) \\ R^{(\hat{M}/T)} & \xrightarrow{f^{(\hat{M}/T)}} & S^{(\hat{M}/T)} \\ \downarrow \text{kan.} & & \downarrow \text{kan.} \\ R^{(\hat{M}/T)}/R\pi_T(0) & \xrightarrow[\exists h]{\text{---}} & S^{(\hat{M}/T)}/S\pi_T(0) \end{array}$$

Die Kommutativität der Abbildungen und die Existenz von  $h$  sieht man wie im Beweis von Lemma 6.28. □

**Lemma 7.5**

Es sei  $R$  ein topologischer Ring und  $M$  ein lokal proendliches, nicht notwendigerweise eigentliches, Monoid. Der Monoidring  $R[M] \cong R^{(M)}$  trage die Topologie des freien topologischen Monoids erzeugt von  $M$ .

Dann besitzt  $R[M]$  eine Umgebungsbasis der 0, bestehend aus offenen  $(M, M)$ -Biteilmengen von  $R[M]$ .

Insbesondere besitzt  $R[M]$  eine Umgebungsbasis der 0, bestehend aus offenen Links-/Rechts-Idealen, falls  $R$  eine solche besitzt.

*Beweis.*

- (i) Es sei  $S \in \text{Cong}_O(\hat{M})$  und  $U = \prod_{n \in \hat{M}/S} U_n \cdot n \subseteq R[\hat{M}/S]$  mit offenen  $0 \in U_n \subseteq R$  und  $U_{\pi_S(0)} = R$ . Dann ist  $U' = \bigcap_{n \in \hat{M}/S} U_n \subseteq R$  ebenfalls offen, da  $\hat{M}/S$  endlich ist. Folglich ist

$$V = (R \cdot \pi_S(0)) \times \prod_{\pi_S(0) \neq n \in \hat{M}/S} U' \cdot n \subseteq U$$

eine offene Umgebung der 0 und es gilt nach Konstruktion  $\hat{M}/S \cdot V = V = V \cdot \hat{M}/S$ , da  $(\hat{M}/S) \cdot \pi_S(0) = \{\pi_S(0)\}$ . Folglich ist  $V$  eine offene  $(\hat{M}/S, \hat{M}/S)$ -Biteilmenge von  $R[\hat{M}/S]$ . Nach der Beschreibung der Topologie auf  $R[M]$  nach Lemma 6.23 ist dann auch  $W = R[\pi_S]^{-1}(V) \subseteq R[M]$  offen. Für alle  $m \in M$  gilt außerdem

$$R[\pi_S](R[\pi_S]^{-1}(V) \cdot m) \subseteq V \cdot [m]_S \subseteq V,$$

da  $R[\pi_S]$  ein Ringhomomorphismus ist. Insbesondere ist dann  $M \cdot W = W = W \cdot M$  eine offene  $(M, M)$ -Bimenge in  $R[M]$  mit  $W = R[\pi_S]^{-1}(V) \subseteq R[\pi_S]^{-1}(U)$ .

- (ii) Es sei nun  $0 \in V \subseteq R[M]$  offen. Dann gibt es nach Definition der Topologie auf  $R[M]$  Kongruenzen  $S_1, \dots, S_n \in \text{Cong}_O(\hat{M})$  und offene Mengen  $V_i \subseteq R[\hat{M}/S_i]$  von der Form wie  $U$  in (i), so dass  $R[\pi_{S_1}]^{-1}(V_1) \cap \dots \cap R[\pi_{S_n}]^{-1}(V_n) \subseteq V$  ist. In (i) wurde gezeigt, dass es dann offene  $(M, M)$ -Biteilmengen  $W_i \subseteq R[\pi_{S_i}]^{-1}(V_i)$  gibt, so dass insgesamt  $W = W_1 \cap \dots \cap W_n \subseteq R[M]$  eine offene  $(M, M)$ -Biteilmenge von  $R[M]$  ist mit  $W \subseteq V$ . Folglich besitzt  $R[M]$  eine Umgebungsbasis der 0, bestehend aus offenen  $(M, M)$ -Biteilmengen.

Falls  $R$  eine Umgebungsbasis der 0, bestehend aus Links-/Rechts-Idealen, besitzt, können alle betreffenden, offenen Umgebungen der 0 durch Verkleinerung durch offene Links-/Rechts-Ideale von  $R$  ersetzt werden. Per Konstruktion ist dann die so erhaltene offene  $(M, M)$ -Biteilmenge von  $R[M]$  auch ein  $R$ -Links-/Rechts-Untermodul von  $R[M]$  und damit per Definition der Multiplikation auf  $R[M]$  ein Links-/Rechts-Ideal. □

**Satz 7.6**

Es sei  $R$  ein nicht-indiskreter topologischer Ring und  $M \in \mathcal{T}Mon_L$  ein lokal proendliches Monoid. Topologisiere  $R[M]$  wie in Definition 7.2.

Dann ist  $R[M]$  genau dann ein topologischer Ring, wenn  $M$  eigentlich ist.

*Beweis.* Die eine Folgerung gilt nach Lemma 7.1. Es sei nun  $K \subseteq M$  ein beliebiges offenes Kompaktum. Nach Lemma 6.26 (i) gibt es eine offene Umgebung  $0 \in U \subseteq R[M]$ , so dass  $M \setminus U = K$  ist. Nach Lemma 7.5 gibt es eine offene  $(M, M)$ -Biteilmenge  $0 \in V \subseteq U$ . Wegen

$M \cdot V = V = V \cdot M$  gilt  $(V \times M) \cup (M \times V) \subseteq \mu_{R[M]}^{-1}(V)$  und außerdem ist  $M \setminus V$  nach Lemma 6.26 (ii) kompakt. Dies impliziert, dass

$$\mu_M^{-1}(K) = \mu_M^{-1}(M \setminus U) \subseteq \mu_M^{-1}(M \setminus V) = (M \times M) \setminus (\mu_{R[M]}^{-1}(V)) \subseteq (M \setminus V) \times (M \setminus V)$$

eine Teilmenge des ebenfalls kompakten Produkts  $(M \setminus V) \times (M \setminus V)$  ist. Da  $M$  hausdorffsch ist, ist  $K \subseteq M$  abgeschlossen und folglich ebenso  $\mu^{-1}(K) \subseteq M \times M$  aufgrund der Stetigkeit von  $\mu_M$ . Folglich ist  $\mu^{-1}(K)$  als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums selbst kompakt. Nach Lemma 5.11 ist dann  $M$  eigentlich. □

### 7.1.1 Die universelle Eigenschaft

Eine weitere kategorielle Eigenschaft des topologischen Monoidrings ist seine universelle Abbildungseigenschaft. Diese bildet im Allgemeinen jedoch keinen universellen Pfeil, so dass im Allgemeinen man auch keine Adjunktion von Kategorien erhält.

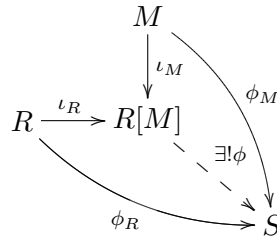
#### Proposition 7.7

Es seien  $M$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid und  $R$  ein topologischer Ring. Der topologische Monoidring  $R[M]$  erfüllt folgende universelle Eigenschaft:

Für jeden endlichen, diskreten Ring  $S \in \mathcal{TRing}$ , jedes  $\phi_R \in \text{Hom}_{\mathcal{TRing}}(R, S)$  und  $\phi_M \in \text{Hom}_{\mathcal{TMon}}(M, (S, \cdot))$  mit

- (i)  $\phi_M(m) \cdot \phi_R(r) = \phi_R(r) \cdot \phi_M(m)$  für alle  $r \in R$  und  $m \in M$ ,
- (ii)  $M \setminus \phi_M^{-1}(U)$  ist kompakt für alle offenen Umgebungen  $0 \in U \subseteq S$ ,

existiert genau ein  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{TRing}}(R[M], S)$ , so dass



kommutiert. Beachte, dass Bedingung (ii) für proendliche Monoide immer erfüllt ist.

*Beweis.* Nach Bemerkung 4.22 existiert ein eindeutiges  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{R}ing}(R[M], S)$ , das die Kommutativitätsbedingungen erfüllt. Definiere  $\hat{M} \xrightarrow{\phi_{\hat{M}}} (S, \cdot)$  durch  $\phi_{\hat{M}}|_M = \phi_M$  und  $\phi_{\hat{M}}(0) = 0$ . Dann ist  $\phi_{\hat{M}}$  nach Konstruktion ein Monoidhomomorphismus. Für jede offene Umgebung  $0 \in U \subseteq S$  ist  $M \setminus \phi_{\hat{M}}^{-1}(U) = M \setminus \phi_M^{-1}(U)$  kompakt. Nach Definition der Topologie auf  $\hat{M}$ , ist  $\phi_{\hat{M}}^{-1}(U) \subseteq \hat{M}$  also eine offene Umgebung der 0, d.h.  $\phi_{\hat{M}}$  ist stetig bei 0 und daher insgesamt stetig, da  $\phi_{\hat{M}}|_M = \phi_M$  stetig ist.

Nach Korollar 5.42 gilt  $\hat{M} \cong \varprojlim_{T \in \text{Cong}_O(\hat{M})} \hat{M}/T$  und wegen Lemma 5.4 existiert daher eine Relation  $T \in \text{Cong}_O(\hat{M})$  und eine Abbildung  $\hat{M}/T \xrightarrow{g} (S, \cdot)$ , so dass  $g \circ \pi_T = \phi_{\hat{M}}$ .  $R$ -lineare

Fortsetzung induziert dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 R[M] & & \\
 \downarrow R[\pi_T] & \searrow \phi & \\
 R[\hat{M}/T] & \xrightarrow{\bar{g}} & S \\
 \downarrow & \nearrow \exists h & \\
 R[\hat{M}/T]/(\pi_T(0)) & & 
 \end{array}$$

wobei die Existenz von  $h$  durch die Identität  $g(\pi_T(0)) = 0$  gesichert ist. Da  $\hat{M}/T$  endlich ist, folgt mit Lemma 6.27 die Stetigkeit von  $g$ . Nach Definition der Quotiententopologie ist damit auch  $h$  stetig. Dies wiederum impliziert mit der Kommutativität des Diagramms die Stetigkeit von  $\phi$ . □

**Korollar 7.8**

Die gleiche Aussage wie in Proposition 7.7 gilt auch für proendliche Ringe  $S = \varprojlim_i S_i$  mit endlichen diskreten Ringen  $S_i$ .

*Beweis.*  $\phi$  ist genau dann stetig, wenn jede Verkettung  $R[M] \xrightarrow{\phi} S \xrightarrow{\pi_i} S_i$  stetig ist, aber dies ist genau die Aussage von Proposition 7.7. □

**Korollar 7.9**

Die gleiche Aussage wie in Proposition 7.7 gilt auch für beliebige topologische Ringe  $S \in \mathcal{TRing}$ , falls zusätzlich gilt:

- (iii)  $S \in R\text{-TMod}_U$  oder  $S \in \text{TMod}_U\text{-}R$  via  $\phi_R$  oder  $M$  ist endlich.

*Beweis.* Falls  $M$  endlich ist, folgt die Behauptung aus Lemma 6.27. Für den allgemeinen Fall sei  $0 \in U \leq S$  ein offener  $R$ -Linksuntermodul von  $S$ . Dann ist  $S/U$  ein diskreter, topologischer  $R$ -Linksmodul und  $S \xrightarrow{\pi_U} S/U$  die kanonische Projektion.  $\pi_U \circ \phi_M$  ist stetig, also  $(\pi_U \circ \phi_M)(M \setminus \phi_M^{-1}(U)) \subseteq S/U$  kompakt und daher endlich, da  $S/U$  diskret ist. Insgesamt ist also

$$(\pi_U \circ \phi_M)(M) = (\pi_U \circ \phi_M)(M \setminus \phi_M^{-1}(U)) \cup \underbrace{(\pi_U \circ \phi_M)(\phi_M^{-1}(U))}_{=\{0\}}$$

endlich. Damit kann wieder Lemma 5.4 angewendet werden. Verfährt man genau wie im Beweis von Proposition 7.7 mit  $S/U$  anstelle von  $S$ , sieht man, dass  $R[M] \xrightarrow{\pi_U \circ \phi} S/U$  stetig ist. Insbesondere ist  $\phi^{-1}(U) = (\pi_U \circ \phi)^{-1}(0)$  offen in  $R[M]$ . Da  $U$  beliebig war, folgt mit (iii), dass  $\phi$  stetig bei 0 und wegen (War93, I Theorem 5.18) insgesamt stetig ist.

Wegen Bemerkung 4.3 ist  $R[N]$  auch freier  $R$ -Rechtsmodul mit  $M$  als Basis. Die weitere Argumentation verläuft dann wie im Linksmodulbeweis. □

## 7.2 Topologische Schiefmonoidringe

In diesem Abschnitt wird schließlich die „schiefe Variante“ der Monoidringe eingeführt. Für topologische Koeffizientenringe, die eine Umgebungsbasis der 0 aus offenen Rechtsidealen besitzen,

gibt es nach Kapitel 6 Abschnitt 6.3 eine kanonische Topologie für den äußeren Koeffizientenring. Man sieht, dass sich die Hausdorff- und Vollständigkeits-Eigenschaft vom Koeffizientenring auf den inneren und äußeren Koeffizientenring übertragen.

**Definition 7.10**

Es sei  $R$  ein topologischer Ring,  $M$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid und  $R[M; \theta]$  ein Schiefmonoidring.  $R[M; \theta]$  heißt **topologischer Schiefmonoidring** von  $M$  über  $R$ , falls die Topologie des freien topologischen  $R$ -Linksmoduls aus Definition 6.22 eine Ringtopologie auf  $R[M; \theta] \cong R^{(M)}$  bildet. Demnach ist  $R[M; \theta]$  genau dann ein topologischer Schiefmonoidring, wenn die Multiplikation  $*_{\theta} : R[M; \theta] \times R[M; \theta] \rightarrow R[M; \theta]$  stetig ist.

**Proposition 7.11**

Es sei  $R_{\theta} \subseteq R$  der Teilring aus Proposition 4.20.

- (i) Falls  $R[M; \theta]$  ein topologischer Ring ist, dann ist jede Koordinate von  $\theta(m)$  für alle  $m \in M$  stetig, d.h.  $\theta(M) \subseteq \text{End}_{\text{Mod-}R_{\theta}}(R)[M]$ .
- (ii) Wenn  $R$  hausdorffsch ist, dann ist  $R_{\theta}$  abgeschlossen.
- (iii) Wenn  $R$  vollständig ist, dann ist  $R_{\theta}$  vollständig.

*Beweis.*

- (i) Wähle ein  $n \in M$ . Dann ist  $\theta(n) = \sum_{m \in M} \alpha_m m \in \text{End}_{\text{Mod-}R_{\theta}}(R)[M]$ . Es sei  $N \subseteq M$  die endliche Teilmenge aller  $n \in M$ , so dass  $\alpha_n \neq 0$  ist. Für jedes  $r \in R$  ist dann

$$\theta(n)(r) = \sum_{m \in M} \alpha_m(r)m = \sum_{m \in N} \alpha_m(r)m,$$

so dass nach Lemma 6.30 stetige  $R$ -lineare Projektionen  $\pi_m$  existieren mit  $\pi_m(\theta(n)(r)) = \alpha_m(r)$ , für alle  $m \in M$  und alle  $r \in R$ . Da  $R[M; \theta]$  ein topologischer Ring ist, ist

$$\phi_n : R \rightarrow R[M; \theta], \quad r \mapsto \theta(n)(r) = n *_{\theta} r$$

als Verkettung der Inklusion  $R \xrightarrow{\iota_R} R[M; \theta]$  mit der Linksmultiplikation auf  $R[M; \theta]$  mit  $n$  stetig. Folglich ist auch  $\alpha_m = \pi_m \circ \phi_n$  stetig.

- (ii) Benutze die zweite Beschreibung von  $R_{\theta}$  aus Proposition 4.20. Für alle  $m, n \in M$  ist wegen (i) der Endomorphismus  $\theta(m)_n \in \text{End}_{\text{Mod-}R_{\theta}}(R)$  stetig. Ebenso ist  $\theta(m)_m - \text{id}_R$  stetig. Der Kern eines stetigen Endomorphismus ist gerade das Urbild der Menge  $\{0\}$ , die in hausdorffschen Ringen abgeschlossen ist. Daher ist  $R_{\theta}$  als Schnitt dieser abgeschlossenen Kerne wiederum abgeschlossen.
- (iii) Abgeschlossene Teilringe vollständiger Ringe sind wegen (War93, II Theorem 7.5) wieder vollständig.

□

**Definition 7.12**

Für einen topologischen Schiefmonoidring  $R[M; \theta]$  sei  $E_{\theta} = \text{End}_{\text{Mod-}R_{\theta}}(R)$  der **äußere Endomorphismenring**. Dies unterscheidet sich insofern von der ursprünglichen Definition 4.21 für diskrete Schiefmonoidringe, als dass man hier nur die stetigen Homomorphismen zulässt.

Falls  $R \in \text{TMod}_U\text{-}R_\theta$  ist, dann sei  $E_\theta$  mit der in Abschnitt 6.3 definierten Topologie ausgestattet, d.h. er trägt die Initialtopologie bezüglich der Projektionen

$$E_\theta = \text{End}_{\text{TMod}\text{-}R_\theta}(R) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{TMod}\text{-}R_\theta}(R, R/U), \quad f \longmapsto \pi_U \circ f$$

wobei  $R \xrightarrow{\pi_U} R/U$  die kanonische Projektion ist und  $\text{Hom}_{\text{TMod}\text{-}R_\theta}(R, R/U)$  die diskrete Topologie trägt.

**Bemerkung 7.13**

Für den äußeren Koeffizientenring  $E_\theta$  eines topologischen Schiefmonoidrings  $R[M; \theta]$  über einem topologischen Ring  $R \in \text{TMod}_U\text{-}R$  gilt:

(i) Die kanonische Inklusion

$$\iota_R : R \longrightarrow E_\theta, \quad r \longmapsto \lambda_r$$

induziert einen topologischen Ringisomorphismus  $R \xrightarrow{\iota_R} \iota_R(R)$ .

(ii) Wenn  $R$  hausdorffsch ist, dann ist auch  $E_\theta$  hausdorffsch.

(iii) Wenn  $R$  vollständig ist, dann ist auch  $E_\theta$  vollständig.

*Beweis.*

(i) Nach Bemerkung 6.13 bilden die Mengen

$$E_U = \{f \in E_\theta; f(R) \subseteq U\} \quad \text{für } U \in \mathcal{U}_R$$

eine Umgebungsbasis der 0 von  $E_\theta$ . Für alle  $U \in \mathcal{U}_R$  ist

$$\iota_R^{-1}(U) = \{r \in R; r \cdot R \subseteq U\} = U$$

da  $U \leq R$  ein  $R$ -Rechtsuntermodul ist. Damit ist  $\iota_R$  stetig und  $R$  trägt die Initialtopologie bezüglich  $\iota_R$ , was die Behauptung impliziert.

(ii) Siehe Korollar 6.17

□

**7.2.1 Die universelle Eigenschaft**

Hier wird die universelle Eigenschaft für topologische Schiefmonoidringe formuliert. Wie zu erwarten war, setzen sich die Abbildungskriterien für topologische Schiefmonoidringe aus denen für Schiefmonoidringe und für topologische Monoidringe zusammen.

**Proposition 7.14**

Es seien  $M$  ein eigentliches, lokal proendliches Monoid und  $R$  ein topologischer Ring. Jeder topologische Schiefmonoidring  $R[M; \theta]$  erfüllt folgende universelle Eigenschaft:

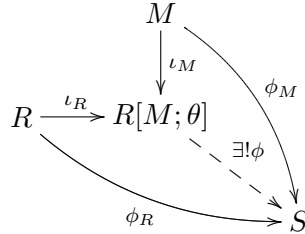
Es sei  $S \in \mathcal{TRing}$  ein topologischer Ring,  $\phi_R \in \text{Hom}_{\mathcal{TRing}}(R, S)$  und  $\phi_M \in \text{Hom}_{\mathcal{TMon}}(M, (S, \cdot))$  mit den folgenden drei Eigenschaften:

(i)  $\phi_M(n) \cdot \phi_R(r) = \sum_{m \in M} \phi_R \circ \pi_m(n *_\theta r) \cdot \phi_M(m)$  für alle  $r \in R$  und  $n \in M$ .

(ii)  $M \setminus \phi_M^{-1}(U)$  ist kompakt für alle offenen Umgebungen  $0 \in U \subseteq S$ .

(iii)  $S \in R\text{-TMod}_U$  via  $\phi_R$  oder  $M$  ist endlich oder  $S$  ist proendlich.

Dann existiert genau ein  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{TRing}}(R[M; \theta], S)$ , so dass das Diagramm



kommutiert.

*Beweis.* Bemerkung 4.22 liefert die eindeutige Existenz. Da  $R[M; \theta] \cong R^{(M)} \cong R[M]$  als topologische  $R$ -Linksmoduln “identisch” sind, kann der Beweis von Proposition 7.7 bzw. deren Korollaren auf diesen Fall übertragen werden.  $\square$

### 7.2.2 Existenzkriterium für topologische Schiefmonoidringe

In diesem Abschnitt wird nun das Existenzkriterium für topologische Schiefmonoidringe erarbeitet. Der folgende Satz liefert ein Kriterium dafür, wann ein Schiefmonoidring ein topologischer Schiefmonoidring ist. Für Schiefpolynomringe und Schiefgruppenringe über proendlichen Gruppen wird später ein anschaulicheres, äquivalentes Kriterium angegeben.

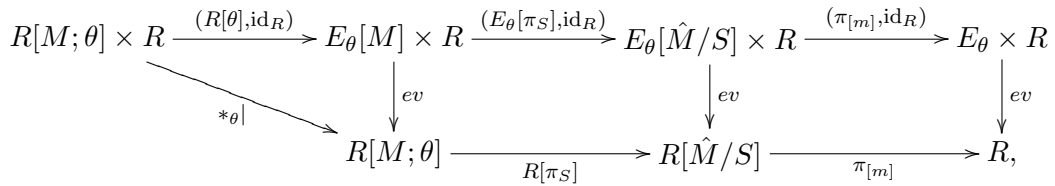
Im gesamten Abschnitt sei  $R \in \text{TMod}_U\text{-}R$  ein topologischer Ring, so dass der äußere Koeffizientenring wie in Definition 7.12 beschrieben eine kanonische Topologie trägt.

#### Satz 7.15

Es sei  $M$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid und  $R[M; \theta]$  ein Schiefmonoidring. Wenn  $R[\theta] : R[M; \theta] \rightarrow E_\theta[M]$  stetig ist, dann ist  $R[M; \theta]$  ein topologischer Schiefmonoidring.

*Beweis.* Im Folgenden sei  $S \in \text{Cong}_O(\hat{M})$  und  $\hat{M} \xrightarrow{\pi_S} \hat{M}/S$  die kanonische Projektion.

- Betrachte für  $m \in M$  mit  $[m] \neq [0]$  in  $\hat{M}/S$  folgendes kommutatives Diagramm



wobei die rechten beiden Quadrate kommutieren nach Definition der Evaluationsabbildung  $ev$  über die Inklusion  $E_\theta[M] = \text{End}_{\text{TMod}_U\text{-}R_\theta}(R)[M] \hookrightarrow \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R_\theta}(R, R[M; \theta])$ . Die linke Seite kommutiert, da nach Definition  $a *_\theta r = R[\theta](a)(r)$  für  $a \in R[M; \theta]$  und  $r \in R$ . Nach Voraussetzung ist  $R[\theta]$  stetig. Wegen  $[m] \neq 0$  ist auch  $\pi_{[m]} \circ E_\theta[\pi_S]$  stetig nach Definition der Topologie auf  $E_\theta[M]$  bzw. Lemma 6.23. Damit ist auch  $(\pi_{[m]}, \text{id}_R) \circ (E_\theta[\pi_S], \text{id}_R) = (\pi_{[m]} \circ E_\theta[\pi_S], \text{id}_R)$  stetig. Wegen Lemma 6.18 ist die Evaluationsabbildung ebenfalls stetig. Die Kommutativität des Diagramms impliziert dann die Stetigkeit von  $\pi_{[m]} \circ R[\pi_S] \circ *_\theta$ . Da  $m$  mit  $[m] \neq 0$  und  $S \in \text{Cong}_O(\hat{M})$  beliebig waren, folgt nochmals mit Lemma 6.23 die Stetigkeit von  $*_\theta$ .



- In Lemma 4.24 wurde eine  $R[M; \theta]$ -Linksmodulverknüpfung „ $*$ “ auf  $R[\hat{M}/S]$  konstruiert, bezüglich welcher  $R[\pi_S]$  ein  $R[M; \theta]$ -Linksmodulhomomorphismus ist. Wegen  $a*(r \cdot \pi_S(0)) = R[\pi_S](a * r) \cdot \pi_S(0) \in R \cdot \pi_S(0)$  für alle  $r \in R$  und  $a \in R[M; \theta]$  erhält man das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 R[M; \theta] \times R[M; \theta] & \xrightarrow{\text{id}_{R[M; \theta]} \times R[\pi_S]} & R[M; \theta] \times R[\hat{M}/S] & \xrightarrow{\text{id}_{R[M; \theta]} \times p_0} & R[M; \theta] \times (R[\hat{M}/S]/(\pi_S(0))) \\
 \downarrow *_{\theta} & & \downarrow * & & \downarrow *' \\
 R[M; \theta] & \xrightarrow{R[\pi_S]} & R[\hat{M}/S] & \xrightarrow{p_0} & R[\hat{M}/S]/(\pi_S(0))
 \end{array}$$

Nach Definition der Verknüpfung „ $*$ “ bzw. „ $*'$ “ gilt für  $a \in R[M; \theta]$  und  $x \in R[\hat{M}/S]$ , dass

$$p_0(a * x) = \sum_{n \in \hat{M}/S} R[\pi_S](a * \pi_n(x)) \cdot p_0(n).$$

Nach Definition der Topologie auf  $R[M; \theta]$  ist  $p_0 \circ R[\pi_S]$  stetig. Außerdem wurde im ersten Beweisteil die Stetigkeit von  $*|_{R[M; \theta] \times R}$  gezeigt. Da  $R[\hat{M}/S]/(R\pi_S(0)) \cong R^{(\hat{M}/S) \setminus \{\pi_S(0)\}}$  ein topologischer  $R$ -Linksmodul ist, sind auch Addition und Multiplikation mit Elementen aus  $R$  stetig. Da  $\hat{M}/S$  endlich ist, ist auch die Summe endlich und definiert eine stetige Abbildung. Insgesamt folgt, dass  $p_0 \circ *'$  als Verkettung all dieser Abbildungen selbst stetig ist. Wegen  $R[\hat{M}/S] \cong R[\hat{M}/S]/(\pi_S(0)) \times (R\pi_S(0))$  als topologische  $R$ -Moduln gilt

$$a *' p_0(x) = p_0(a * x) = \sum_{\pi_S(0) \neq n \in \hat{M}/S} R[\pi_S](a * \pi_{p_0(n)}(p_0(x))) \cdot p_0(n)$$

und es kann mit den gleichen Argumenten gezeigt werden, dass auch  $*'$  stetig ist. Nach Definition der Topologie auf  $R[M; \theta]$  ist  $p_0 \circ R[\pi_S]$  stetig, so dass insgesamt  $p_0 \circ R[\pi_S] \circ *_{\theta} = *' \circ (\text{id}_R, p_0 \circ R[\pi_S])$  stetig ist. Da  $S \in \text{Cong}_O(\hat{M})$  beliebig war, folgt schließlich die Stetigkeit von  $*_{\theta}$ .

□

### Korollar 7.16

Es sei  $R \in \text{TMod}_U\text{-}R$  ein topologischer Ring,  $M \in \text{TMon}_{L,P}$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid und  $R[M; \theta]$  ein Schiefmonoidring mit einem stetigen, assoziierten Monoidhomomorphismus

$$\theta : M \longrightarrow E_{\theta}[M] = \text{End}_{\text{TMod-}R_{\theta}}(R)[M].$$

Falls  $M \setminus \theta^{-1}(U)$  kompakt ist für alle offenen Umgebungen  $0 \in U \subseteq E_{\theta}[M]$ , dann ist  $R[M; \theta]$  ein topologischer Schiefmonoidring. Man beachte, dass diese Bedingung für proendliche, d.h. kompakte, Monoide immer erfüllt ist.

*Beweis.* Wegen  $R \in \text{TMod}_U\text{-}R$  und Satz 6.14 ist  $E_{\theta} \in \text{TMod}_U\text{-}E_{\theta}$ , d.h. wegen  $R \subseteq E_{\theta}$  ist insbesondere  $E_{\theta} \in \text{TMod}_U\text{-}R$ . Nach Definition ist  $E_{\theta}[M] \cong E_{\theta}^{(M)} \in \text{TMod}_U\text{-}R$ . Die Aussage folgt dann mit Korollar 7.9 aus Satz 7.15.

□

### 7.3 Vollständige (Schief-)Monoidringe

Dieser Abschnitt stellt die vollständigen Schiefmonoidringe vor. Aufgrund der Topologisierung des Monoidrings durch die Initialtopologie bezüglich einer Familie von Monoidringen über endlichen, diskreten Monoiden, leiten sich aus den allgemeinen Sätzen für vollständige Gruppen aus Kapitel 6 Abschnitt 6.1 die entsprechenden Darstellungen von vollständigen Monoidringen als projektive Limiten ab.

**Proposition 7.17**

Es seien  $R$  ein topologischer Ring, der hausdorffsch und vollständig ist, und  $M$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid. Dann gilt:

- (i) Jeder topologische Schiefmonoidring  $R[M; \theta]$  ist hausdorffsch.
- (ii) Es gibt einen kanonischen topologischen Ringisomorphismus

$$\widehat{R[M]} \cong \varprojlim_{S \in \text{Cong}_O(\hat{M})} R[\hat{M}/S]/(\pi_S(0)).$$

- (iii) Ist  $M$  proendlich, dann gibt es auch einen kanonischen topologischen Ringisomorphismus

$$\widehat{R[M]} \cong \varprojlim_{S \in \text{Cong}_O(M)} R[M/S].$$

Insbesondere ist  $\widehat{R[G]} \cong \varprojlim_{N \triangleleft G \text{ offen}} R[G/N]$  für proendliche Gruppen  $G$  wegen Bemerkung 5.37.

*Beweis.*

- (i) Dies gilt nach Proposition 6.31.
- (ii) Nach Konstruktion trägt  $R[M]$  die Initialtopologie bezüglich der von  $S \in \text{Cong}_O(\hat{M})$  induzierten Projektionen

$$p_S : R[M] \xrightarrow{R[\pi_S]} R[\hat{M}/S] \twoheadrightarrow R[\hat{M}/S]/(\pi_S(0)).$$

Da  $M/S$  endlich ist, ist  $R[\hat{M}/S]/(\pi_S(0)) \cong R^{((\hat{M}/S) \setminus \{\pi_S(0)\})} \cong R^{(\hat{M}/S) \setminus \{\pi_S(0)\}}$  als Produkt vollständiger Gruppen wegen (War93, II Theorem 7.8) ebenfalls vollständig. Punkt (i) und Lemma 6.3 (ii) implizieren dann die Aussage.

- (iii) Dies folgt mit Korollar 6.29 (ii) mit gleichen Argumenten wie im Beweis von (ii).

□

**Definition 7.18**

Es sei  $R$  ein vollständiger, topologischer Ring und  $M$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid. Die Vervollständigung (vgl. Satz 6.9)  $R[[M; \theta]] = \widehat{R[M; \theta]}$  des topologischen Schiefmonoidrings heißt **vollständiger Schiefmonoidring** von  $M$  über  $R$ . Falls  $\theta = \iota_M$ , dann heißt  $R[[M]] = R[[M; \theta]]$  **vollständiger Monoidring** von  $M$  über  $R$ .

**Bemerkung 7.19**

Falls  $R \in \text{TMod}_{U,C}\text{-}R$  ein vollständiger topologischer Ring ist und  $R[\theta] : R[M; \theta] \longrightarrow E_\theta[M]$  stetig, dann induziert der Vervollständigungsfunktor (vgl. Satz 6.9 (ii)) einen stetigen Ringhomomorphismus

$$R[[\theta]] = \widehat{R[\theta]} : R[[M; \theta]] \longrightarrow E_\theta[[M]].$$

**7.4 Beispiele**

Hier wird schließlich nachgewiesen, dass die allgemeine Konstruktion der vollständigen Schiefmonoidringe sich zu den bekannten Fällen der vollständigen Gruppenringe und der (Schief-)Potenzreihenringe spezialisiert. Man sieht, dass das durch Satz 7.15 gegebene Existenzkriterium für Schiefpotenzreihenringe mit der in (SV06) geforderten Bedingung der  $\sigma$ -Nilpotenz der betroffenen  $\sigma$ -Derivation  $\delta$  übereinstimmt.

**7.4.1 Vollständige (Schief-)Gruppenringe und die Iwasawa-Algebra****Proposition 7.20**

Es sei  $R \in \text{TMod}_U\text{-}R$  ein topologischer Ring und  $G$  eine proendliche Gruppe. Jeder Gruppenhomomorphismus  $G \xrightarrow{f} \text{Aut}_{\mathcal{TRing}}(R) \subset \text{End}_{\text{TMod}_U\text{-}\mathbb{Z}}(R)$  induziert einen Monoidhomomorphismus

$$\theta_f : G \longrightarrow \text{End}_{\text{TMod}_U\text{-}\mathbb{Z}}(R)[G], \quad g \longmapsto f(g) \cdot g$$

und folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $\forall U \leq R$  offen  $\exists N \triangleleft G$  offen :  $f(g)(r) - r \in U \quad \forall g \in N, r \in R$ .
- (ii)  $\theta_f$  ist stetig.
- (iii)  $f$  ist stetig.

Insbesondere ist dann  $R[G; \theta_f]$  wegen Korollar 7.16 ein topologischer Schiefmonoidring.

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Topologie auf  $E_\theta$  und der Äquivalenz:

$$\begin{aligned} \forall U \leq R \text{ offen} \quad \exists N \triangleleft G \text{ offen} : & \quad (f(g) - \text{id}_R)(R) \subseteq U \quad \forall g \in N \\ \iff \forall U \leq R \text{ offen} \quad \exists N \triangleleft G \text{ offen} : & \quad f(N) \subseteq \text{id}_R + \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}\mathbb{Z}}(R, U) \\ \iff \theta_f \text{ stetig bei } 1 & \quad \iff f \text{ stetig} \end{aligned}$$

□

**Beispiel 7.21**

Es sei  $R \in \text{TMod}_{U,C}\text{-}R$  ein topologischer Ring, der hausdorffsch und vollständig ist,  $G$  eine proendliche Gruppe und  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{TMon}}(G, \text{End}_{\mathcal{TRing}}(R))$  stetig.

Dann ist  $R[G; \theta_f]$  nach Proposition 7.20 ein topologischer Schiefmonoidring.

- (i)  $R[[G; \theta_f]]$  heißt **vollständiger Schiefgruppenring** von  $G$  über  $R$ .
- (ii) Für das triviale  $f$ , d.h.  $f(g) = \text{id}_R$  für alle  $g \in G$ , ist  $R[[G; \theta_f]] = R[[G]]$  der **vollständige Gruppenring** von  $G$  über  $R$ .  
Insbesondere für  $R = \mathbb{Z}_p$  mit einer Primzahl  $p$  ist  $\mathbb{Z}_p[[G]] = \Lambda(G)$  die **Iwasawa-Algebra** von  $G$ .

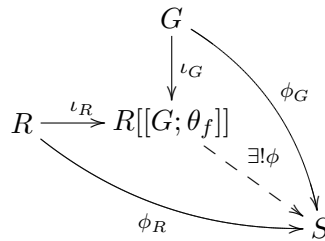
**Proposition 7.22**

Es seien  $G$  eine proendliche Gruppe und  $R$  ein vollständiger, topologischer Ring. Jeder vollständige Schiefgruppenring  $R[[G; \theta_f]]$  erfüllt folgende universelle Eigenschaft:

Gegeben seien ein vollständiger, topologischer Ring  $S \in \mathcal{TRing}_C$  sowie  $\phi_R \in \text{Hom}_{\mathcal{TRing}}(R, S)$  und  $\phi_G \in \text{Hom}_{\mathcal{TMon}}(G, S^\times)$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\phi_G(g) \cdot \phi_R(r) = \phi_R \circ f(g)(r) \cdot \phi_G(g)$  für alle  $r \in R$  und  $g \in G$ .
- (ii)  $S \in R\text{-TMod}_U$  via  $\phi_R$  oder  $G$  ist endlich oder  $S$  ist proendlich.

Dann existiert genau ein  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{TRing}}(R[[G; \theta_f]], S)$ , so dass das Diagramm



kommutiert.

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Proposition 7.14 und Satz 6.9 (i). □

**7.4.2 (Schief-)Potenzreihenringe**

**Definition 7.23**

Es seien  $R \in \text{TMod}_U\text{-R}$  ein topologischer Ring,  $\sigma \in \text{Aut}_{\mathcal{TRing}}(R)$  und  $\delta$  eine stetige  $\sigma$ -Derivation.  $\delta$  heie  $\sigma$ -**nilpotent**, wenn für alle offenen  $R$ -Rechtsuntermoduln  $U \leq R$  ein  $m \in \mathbb{N}_0$  existiert, so dass

$$M(\delta, \sigma, \sigma^{-1})(R) \subseteq U \quad \text{für } M \in \mathcal{A}_{\geq m},$$

wobei  $\mathcal{A}_{\geq m}$  die Menge aller nicht-kommutativen Monome in drei Variablen ist, die mindestens  $m$  Faktoren in der ersten Variable besitzen. (Diese Definition verallgemeinert (SV06, S. 5 Definition) wegen (SV06, Remark 0.1(i)).)

**Beispiel 7.24**

Es seien  $R \in \text{TMod}_U\text{-R}$  ein vollständiger, topologischer Ring,  $M = \langle t \rangle$  das freie, einfach erzeugte, diskrete Monoid,  $\sigma \in \text{End}_{\mathcal{TRing}}(R)$  ein stetiger Ringendomorphismus und  $\delta \in \text{End}_{\mathbb{Z}\text{-TMod}}(R)$  eine stetige  $\sigma$ -Derivation, dann definiert

$$\theta_{\sigma, \delta} : M \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}\text{-TMod}}(R)[M], \quad t \longmapsto \sigma t + \delta$$

einen stetigen Monoidhomomorphismus, der wegen Proposition 4.18 eine Ringmultiplikation auf  $R^{(M)}$  induziert.

Falls  $\delta$   $\sigma$ -nilpotent ist, dann ist  $R[M; \theta]$  ein topologischer Schiefmonoidring und der vollständige Schiefmonoidring  $R[[t; \sigma, \delta]] := R[[M; \theta]]$  heißt **Schiefpotenzreihenring** über  $R$ .

(Diese Definition verallgemeinert die Konstruktion aus (SV06))

*Beweis.* Es sei  $0 \in U \subseteq E_\theta[M]$  eine offene Umgebung der 0. Dann gibt es offene  $0 \in U_k \subseteq E_\theta$  mit  $U_k = R$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , so dass  $\prod_{k \geq 0} U_k t^k \subseteq U$ , da  $E_\theta[M] \subseteq E_\theta^M$  nach Korollar 6.24 die Teilraumtopologie der Produkttopologie trägt. Folglich gibt es ein  $n \in \mathbb{N}_0$ , so dass  $U_k = R$  für alle  $k \geq n$ . Für die offene Umgebung  $0 \in V = \bigcap_{k=0}^n U_k \subseteq E_\theta$  gibt es nach Definition der Topologie auf  $E_\theta$  ein  $W \in \mathcal{U}_R$ , so dass  $\text{Hom}_{\text{TMod}_U \mathcal{R}_\theta}(R, W) \subseteq V$  ist. Die  $\sigma$ -Nilpotenz von  $\delta$  liefert nun ein  $m \in \mathbb{N}_0$ , so dass

$$M(\delta, \sigma, \sigma^{-1})(R) \subseteq V \quad \text{für } M \in \mathcal{A}_{\geq m}.$$

Mit vollständiger Induktion über  $k \in \mathbb{N}_0$  folgt für alle  $i \in \mathbb{N}_0$

$$\pi_i(\theta_{\sigma, \delta}(t^k)) = M_1(\delta, \sigma, \sigma^{-1}) + \dots + M_r(\delta, \sigma, \sigma^{-1})$$

mit gewissen  $M_j \in \mathcal{A}_{\geq k-i}$  für alle  $1 \leq j \leq r$  und  $r \in \mathbb{N}_0$ , wobei  $E_\theta[M] \subseteq E_\theta^M \xrightarrow{\pi_i} E_\theta$  die kanonische Projektion auf die Koordinate  $i$  ist. Falls  $k \geq m+n$  ist, dann gilt für  $0 \leq i \leq n$

$$\pi_i(\theta_{\sigma, \delta}(t^k))(R) \subseteq M_1(\delta, \sigma, \sigma^{-1})(R) + \dots + M_r(\delta, \sigma, \sigma^{-1})(R) \subseteq V + \dots + V \subseteq V,$$

da  $M_j \in \mathcal{A}_{\geq m}$  für  $1 \leq j \leq n$  wegen  $k-i \geq (m+n)-i \geq m+n-n = m$ . Nach Konstruktion ist also insgesamt  $\theta_{\sigma, \delta}(t^k) \in U$  für alle  $k \geq m+n$ . Damit ist  $M \setminus \theta_{\sigma, \delta}^{-1}(U) \subseteq \{1, t, \dots, t^{m+n-1}\}$  endlich und  $R[M; \theta_{\sigma, \delta}]$  nach Korollar 7.16 ein topologischer Schiefmonoidring von  $M$  über  $R$ .  $\square$

### Proposition 7.25

Es seien  $R \in \mathcal{TRing}_C$  ein vollständiger, topologischer Ring. Weiterhin seien  $\sigma \in \text{End}_{\mathcal{TRing}}(R)$  ein stetiger Ringendomorphismus und  $\delta \in \text{End}_{\mathbb{Z}\text{-TMod}}(R)$  eine stetige  $\sigma$ -Derivation, so dass der topologische und damit auch der vollständige Schiefmonoidring  $R[t; \sigma, \delta]$  existiert.

Es sei  $S \in \mathcal{TRing}_C$  ein vollständiger, topologischer Ring,  $\phi_R \in \text{Hom}_{\mathcal{TRing}}(R, S)$  und  $s \in S$  mit den folgenden drei Eigenschaften:

- (i)  $s \cdot \phi_R(r) = \phi_R \circ \sigma(r) \cdot s + \phi_R \circ \delta(r)$  für alle  $r \in R$ .
- (ii) Die Folge  $(s^k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Nullfolge in  $S$ .
- (iii)  $S \in R\text{-TMod}_U$  via  $\phi_R$  oder  $S$  ist proendlich.

Dann existiert genau ein stetiger Ringhomomorphismus:

$$R[[t; \sigma, \delta]] \longrightarrow S, \quad t \longmapsto s, \quad r \longmapsto \phi_R(r)$$

*Beweis.* Die angegebenen Bedingungen sind in diesem Fall äquivalent zu denen aus Proposition 7.14. Zusammen mit Satz 6.9 (i) zeigt dies die Behauptung.  $\square$

## 7.5 Zusammenhang mit dem semidirekten Produkt

In diesem Abschnitt wird auf zwei unterschiedlichen Arten die Verträglichkeit der Konstruktion topologischer Schiefmonoidringe mit dem semidirekten Produkt zweier lokal proendlicher, eigentlicher Monoide nachgewiesen. Der erste Beweis verwendet das in Satz 7.15 vorgestellte Existenzkriterium für topologische Schiefmonoidringe und stellt dementsprechend die Bedingung der Existenz einer Umgebungsbasis der 0 aus offenen Rechtsidealen an den Koeffizientenring.

Der andere Beweis kommt ohne diese Bedingung aus und liefert darüber hinaus einen topologischen Ringisomorphismus  $R[N \rtimes_{\varphi} M] \cong R[N][M; \theta_{\varphi}]$  für beliebige topologische Ringe  $R$  und lokal proendliche, eigentliche Monoide  $M$  und  $N$  der Art, dass  $N \rtimes_{\varphi} M$  versehen mit der Produkttopologie ebenfalls lokal proendlich und eigentlich ist.

**Lemma 7.26**

Es seien  $M, N \in \mathcal{TMon}_{L,P}$  und  $N$  via  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{Mon}}(M, \text{End}_{\mathcal{TMon}}(N))$  ein lokal  $M$ -eigentliches  $M$ -Monoid. Weiterhin sei  $R \in \text{TMod}_U\text{-}R$  ein topologischer Ring.

Dann ist folgender Monoidhomomorphismus stetig:

$$M \longrightarrow (\text{End}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(R[N]), \circ), \quad m \longmapsto R[\varphi(m)]$$

*Beweis.* Satz 5.73 impliziert, dass  $\varphi(M) \subseteq E(N) = \text{End}_{\mathcal{TMon}_{L,P}}(N)$  ist und weiterhin die Verkettung  $M \xrightarrow{\varphi} E(N) \xrightarrow{C} E(\hat{N})$  stetig ist, wobei  $\mathcal{TMon}_{L,P} \xrightarrow{C} \mathcal{TMon}_C$  der Kompaktifizierungsfunktor aus Korollar 5.35 ist. Da  $R[-]$  ein Funktor ist, induziert jedes  $S \in \text{Cong}_O(\hat{N})$  damit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \downarrow \varphi & & \\ \text{End}_{\mathcal{TMon}_{L,P}}(\hat{N}) & \xleftarrow{C} & \text{End}_{\mathcal{TMon}_{L,P}}(N) & \xrightarrow{R[-]} & \text{End}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(R[N]) \\ \downarrow \pi_{S*} = \pi_{S^{\circ}-} & & \downarrow \pi_{S*} = \pi_{S^{\circ}-} & & \downarrow R[\pi_S]_* = R[\pi_S]^{\circ}- \\ \text{Hom}_{\mathcal{TMon}_L}(\hat{N}, \hat{N}/S) & \xrightarrow{\iota^* = -\circ\iota} & \text{Hom}_{\mathcal{TMon}_L}(N, \hat{N}/S) & \xrightarrow{R[-]} & \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(R[N], R[\hat{N}/S]) \\ & & & & \downarrow \pi_{d*} = \pi_d^{\circ}- \\ & & & & \text{Hom}_{\text{TMod}_U\text{-}R}(R[N], R) \end{array}$$

mit  $d \in \hat{N}/S$  und der kanonischen Inklusion  $N \xhookrightarrow{\iota} \hat{N}$ .

- Zeige zunächst, dass die zweite Zeile eine stetige Abbildung bildet, falls  $\text{Hom}_{\mathcal{TMon}}(\hat{N}, \hat{N}/S)$  mit der Kompakt-Offen-Topologie versehen wird. Dazu seien  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{TMon}_L}(\hat{N}, \hat{N}/S)$  und  $U \in \mathcal{U}_{R[\hat{N}/S]}$  offen, wobei  $\mathcal{U}_{R[\hat{N}/S]}$  die Menge der offenen  $R$ -Rechtsuntermoduln von  $R[\hat{N}/S] \cong R^{\hat{N}/S}$  ist. Für  $U' = (\hat{N}/S) \cap U \subseteq \hat{N}/S$  ist

$$V = T(g^{-1}(U'), U') \cap \bigcap_{d \in (\hat{N}/S) \setminus U'} T(g^{-1}(d), \{d\})$$

offen in  $\text{Hom}_{\mathcal{TMon}}(\hat{N}, \hat{N}/S)$ , denn  $U'$  und  $\{d\}$  sind offen und abgeschlossen, da  $\hat{N}/S$  diskret ist. Urbilder abgeschlossener Mengen unter  $g$  sind kompakt, da  $\hat{N}$  kompakt ist. Da  $\hat{N}/S$  endlich ist, ist  $V$  ein endlicher Durchschnitt offener Teilmengen von  $\text{Hom}_{\mathcal{TMon}_L}(\hat{N}, \hat{N}/S)$  und damit selbst offen. Nach Konstruktion ist  $g \in V$ , so dass  $V$  eine offene Umgebung von  $g$  ist. Es seien  $f \in V$  und  $n \in N$ .

- Falls  $n \in g^{-1}(U')$ , dann ist  $f(n) \in U' \subseteq U$  bzw.  $f(n) - g(n) \in U$ , da  $U \in \text{TMod}\text{-}R$ .
- Falls  $n \notin g^{-1}(U')$ , dann ist  $f(n) \in f(g^{-1}g(n)) \subseteq \{g(n)\}$ , d.h.  $f(n) = g(n)$ . Dies impliziert wiederum  $f(n) - g(n) = 0 \in U$ .

Wegen  $R$ -Linkslinearität gilt dann  $R[f](x) - R[g](x) \in U$  für alle  $x \in R[N]$  und damit  $R[f] - R[g] \in \text{Hom}_{\text{TMod-}R}(R[N], U)$  bzw.  $R[f] \in R[g] + \text{Hom}_{\text{TMod-}R}(R[N], U)$ . Da  $U \in \mathcal{U}_{R[\hat{N}/S]}$  beliebig war, ist damit die Stetigkeit bei  $g$  gezeigt. Da auch  $g$  beliebig war, ist die Abbildung insgesamt stetig.

- Nach Definition 5.61 trägt  $E(\hat{N}) = \text{End}_{\mathcal{TMon}_{L,P}}(\hat{N})$  die Kompakt-Offen-Topologie, so dass der Homomorphismus  $\text{End}_{\mathcal{TMon}_{L,P}}(\hat{N}) \xrightarrow{\pi_S^*} \text{Hom}_{\mathcal{TMon}_L}(\hat{N}, \hat{N}/S)$  nach (Bou66a, X.3.4 Proposition 9) stetig ist. Da nach Voraussetzung  $C \circ \varphi$  stetig sind, so auch die Verkettung damit. Die Kommutativität der beiden Quadrate impliziert dann die Stetigkeit von

$$M \xrightarrow{\varphi} \text{End}_{\mathcal{TMon}_{L,P}}(N) \xrightarrow{R[-]} \text{End}_{\text{TMod}_U-R}(R[N]) \xrightarrow{R[\pi_S]^*} \text{Hom}_{\text{TMod}_U-R}(R[N], R[\hat{N}/S]).$$

Nun waren  $S$  und  $d \in \hat{N}/S$  beliebig und  $R[N]$  trägt nach Definition 7.2 die Initialtopologie bezüglich der Projektionen  $R[N] \xrightarrow{R[\pi_S]} R[\hat{N}/S] \xrightarrow{\pi_d} R$ , für alle  $S \in \mathcal{U}_{\hat{N}}$  und  $[0]_S \neq d \in \hat{N}/S$ . Proposition 6.15 impliziert daher die Stetigkeit von  $M \xrightarrow{\varphi} E(N) \xrightarrow{R[-]} \text{End}_{\text{TMod-}R}(R[N])$ .

□

### Satz 7.27

Es seien  $R \in \text{TMod}_U\text{-}R$  ein topologischer Ring und  $M, N \in \mathcal{TMon}_{L,P}$ , wobei  $N$  via  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(M, \text{End}_{\mathcal{TMon}}(N))$  ein lokal  $M$ -eigentliches  $M$ -Monoid sei.

Dann ist der in Proposition 4.29 eingeführte Monoidhomomorphismus

$$\theta_\varphi : M \longrightarrow \text{End}_{\text{Mod-}R}(R[N])[M], \quad m \longmapsto R[\varphi(m)] \cdot m$$

stetig und  $R[N][M; \theta_\varphi]$  ein topologischer Ring.

*Beweis.* Im Folgenden sei  $E(R[N]) = \text{End}_{\text{TMod}_U-R}(R[N])$ . Nach Lemma 7.26 ist  $R[-] \circ \varphi$  stetig. Da  $E(R[N])[M]$  ein topologischer Ring ist und das unten abgebildete Diagramm kommutativ ist, ist  $\theta_\varphi$  als Verkettung stetiger Abbildungen stetig.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta_\varphi} & E(R[N])[M] \\ \downarrow (R[-] \circ \varphi, \text{id}_M) & & \uparrow \mu_{E(R[N])[M]} \\ E(R[N]) \times M & \xrightarrow{\iota_{E(R[N])} \times \iota_M} & E(R[N])[M] \times E(R[N])[M] \end{array}$$

Für  $0 \in U \subseteq E(R[N])[M]$  gilt  $E(R[N]) = \text{End}_{\text{TMod}_U-R}(R[N]) \in \text{TMod}_U\text{-}E(R[N])$  nach Satz 6.14. Wegen Lemma 7.5 ist dann auch  $E(R[N])[M] \in \text{TMod}_U\text{-}E(R[N])[M]$ , so dass ein offenes Rechtsideal  $I \in \mathcal{U}_{E(R[N])[M]}$  existiert, welches in  $U$  enthalten ist. Für alle  $m \in I \cap M$  ist  $\theta_\varphi(m) = R[\varphi(m)] \cdot m = m \cdot R[\varphi(m)] \in I$ , da  $I$  ein Rechtsideal ist. Folglich ist

$$M \setminus \theta_\varphi^{-1}(U) \subseteq M \setminus \theta_\varphi^{-1}(I) \subseteq M \setminus I.$$

Nach Lemma 6.26 ist  $M \setminus I$  kompakt. Da  $U$  offen und  $\theta_\varphi$  stetig ist, folgt die Abgeschlossenheit von  $M \setminus \theta_\varphi^{-1}(U)$  in  $M$ . Damit ist dies selbst ein Kompaktum. Nun gilt im Allgemeinen jedoch nur  $R \subseteq R_{\theta_\varphi}$  und nicht die Gleichheit beider Ringe. Wegen Korollar 6.21 kann man  $E_{\theta_\varphi} = \text{End}_{\text{TMod}_U\text{-}R_{\theta_\varphi}}(R[N])$  als topologischen Teilring von  $E(R[N]) = \text{End}_{\text{TMod}_U-R}(R[N])$  auffassen, über den  $\theta_\varphi$  faktorisiert. Korollar 7.16 liefert schließlich das gewünschte Ergebnis.

□

**Satz 7.28**

Es seien  $M, N \in \mathcal{TMon}_{L,P}$ , wobei  $N$  via  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{Mon}}(M, \text{End}_{\mathcal{TMon}}(N))$  ein lokal  $M$ -eigentliches  $N$ -Monoid sei. Weiterhin sei  $R \in \mathcal{TRing}$  ein topologischer Ring.

Dann ist der kanonische Ringisomorphismus  $R[N][M; \theta_\varphi] \xrightarrow{\phi} R[N \rtimes_\varphi M]$  aus Proposition 4.29 ein Isomorphismus topologischer  $R$ -Linksmoduln.

Insbesondere ist  $R[N][M; \theta_\varphi]$  ein topologischer Schiefmonoidring und  $\phi$  ein Isomorphismus topologischer Ringe.

*Beweis.* Nach Definition 7.2 und Lemma 6.23 trägt  $R[N][M; \theta_\varphi]$  die Initialtopologie bezüglich der von  $S_M \in \text{Cong}_O(\hat{M})$  induzierten Projektionen

$$R[N][M; \theta_\varphi] \xrightarrow{R[\pi_{S_M}]} R[N][\hat{M}/S_M] \cong R[N]^{\hat{M}/S_M} \xrightarrow{\pi_{[m]}} R$$

für alle  $[0] \neq [m] \in \hat{M}/S_M$ .  $R[N]$  wiederum trägt die Initialtopologie bezüglich der von  $S_N \in \text{Cong}_O(\hat{N})$  induzierten Projektionen

$$R[N] \xrightarrow{R[\pi_{S_N}]} R[\hat{N}/S_N] \cong R^{\hat{N}/S_N} \xrightarrow{\pi_{[n]}} R$$

für alle  $[0] \neq [n] \in \hat{N}/S_N$ . Insgesamt trägt daher  $R[N][M; \theta_\varphi] \cong (R^{(N)})^{(M)} \cong R^{(N \times M)}$  die Initialtopologie bezüglich der Projektionen

$$R^{(N \times M)} \cong R[N][M; \theta_\varphi] \xrightarrow{R[\pi_{S_N} \times \pi_{S_M}]} R[\hat{N}/S_N][\hat{M}/S_M] \cong R^{\hat{N}/S_N \times \hat{M}/S_M} \xrightarrow{\pi_{([n],[m])}} R \quad (7.1)$$

für  $[0] \neq [m] \in \hat{M}/S_M$  und  $[0] \neq [n] \in \hat{N}/S_N$ .  $R[N \rtimes_\varphi M]$  wiederum trägt die Initialtopologie bezüglich der von allen  $S \in \text{Cong}_O(\widehat{N \rtimes_\varphi M})$  induzierten Projektionen

$$R^{(N \rtimes_\varphi M)} \cong R[N \rtimes_\varphi M] \xrightarrow{R[\pi_S]} R[\widehat{N \rtimes_\varphi M}/S] \cong R^{\widehat{N \rtimes_\varphi M}/S} \xrightarrow{\pi_{([n],[m])}} R \quad (7.2)$$

für  $[0] \neq [(n, m)] \in N \rtimes_\varphi M$ . Zeige nun nacheinander die Stetigkeit von  $\phi$  und  $\phi^{-1}$ .

- Es sei  $S \in \text{Cong}_O(\widehat{N \rtimes_\varphi M})$  beliebig. Dann ist  $(\widehat{N \rtimes_\varphi M})/S$  endlich und mit Lemma 5.4 existieren Relationen  $S_M \in \text{Cong}_O(\hat{M})$  bzw.  $S_N \in \text{Cong}_O(\hat{N})$  und stetige Abbildungen  $\hat{M}/S_M \xrightarrow{f_M} \widehat{N \rtimes_\varphi M}/S$  bzw.  $\hat{N}/S_N \xrightarrow{f_N} \widehat{N \rtimes_\varphi M}/S$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\iota_M} & N \rtimes_\varphi M & \xleftarrow{\iota_N} & N \\ \text{kan.} \downarrow & & \downarrow \text{kan.} & & \downarrow \text{kan.} \\ \hat{M} & \xrightarrow{\hat{\iota}_M} & \widehat{N \rtimes_\varphi M} & \xleftarrow{\hat{\iota}_N} & \hat{N} \\ \pi_{S_M} \downarrow & & \downarrow \pi_S & & \downarrow \pi_{S_N} \\ \hat{M}/S_M & \xrightarrow{f_M} & \widehat{N \rtimes_\varphi M}/S & \xleftarrow{f_N} & \hat{N}/S_N \end{array}$$

Setzt man  $f = \mu_{\widehat{N \rtimes_\varphi M}/S} \circ (f_N \times f_M)$ , dann erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N \times M & \xrightarrow{\text{id}_{N \times M}} & N \rtimes_\varphi M \\ \pi_{S_N} \times \pi_{S_M} \downarrow & & \downarrow \pi_S \\ \hat{N}/S_N \times \hat{M}/S_M & \xrightarrow{f} & \widehat{N \rtimes_\varphi M}/S, \end{array}$$



da  $\text{id}_{N \times M} = \mu_{N \times_\varphi M} \circ (\iota_N \times \iota_M)$  ist und die mittlere Senkrechte des vorherigen Diagramms aus Monoidhomomorphismen besteht. Setzt man die Abbildungen des Diagramms  $R$ -linkslinear fort, dann erhält man das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R[N][M; \theta_\varphi] & \xrightarrow{\phi} & R[N \times_\varphi M] \\ R[\pi_{S_N}][\pi_{S_M}] \downarrow & & \downarrow R[\pi_S] \\ R[\hat{N}/S_N][\hat{M}/S_M] & \xrightarrow{R[f]} & R[\widehat{N \times_\varphi M}/S]. \end{array}$$

Wegen  $(f_N \circ \pi_{S_M})(0) = (\pi_{S_M} \circ \iota_M)(0) = \pi_{S_M}(0)$  und aus Symmetriegründen  $(f_N \circ \pi_{S_N})(0) = \pi_{S_N}(0)$  gilt für alle  $m \in M, n \in N$ , dass

$$[(n, m)]_S \neq [0]_S \implies [m]_{S_M} \neq [0]_{S_M} \quad \text{und} \quad [n]_{S_N} \neq [0]_{S_N},$$

so dass mit (7.1) und (7.2) schließlich  $\phi$  stetig ist, da  $S$  beliebig war.

- Nun seien  $S_M \in \text{Cong}_O(\hat{M})$  und  $S_N \in \text{Cong}_O(\hat{N})$  zwei beliebige Kongruenzen. Durch

$$f : \widehat{N \times M} \longrightarrow \hat{N}/S_N \times \hat{M}/S_M, \quad (n, m) \longmapsto \begin{cases} ([n]_{S_N}, [m]_{S_M}) & [n]_{S_N} \neq 0 \text{ und } [m]_{S_M} \neq 0 \\ (0, 0) & \text{sonst} \end{cases}$$

wird eine stetige Abbildung definiert, denn:

- Für  $([n]_{S_N}, [m]_{S_M}) = (0, 0)$  sind  $N \setminus [n]_{S_N}$  und  $M \setminus [m]_{S_M}$  kompakt. Folglich ist auch

$$\begin{aligned} \widehat{N \times M} \setminus f^{-1}([n]_{S_N}, [m]_{S_M}) &= \widehat{N \times M} \setminus ((N \times [m]_{S_M}) \cup ([n]_{S_N} \times M)) \\ &= (N \setminus [n]_{S_N}) \times (M \setminus [m]_{S_M}) \end{aligned}$$

als Produkt zweier Kompakta selbst kompakt. Dies impliziert, dass nach Definition der Topologie auf der Einpunktkompaktifizierung  $f^{-1}([n]_{S_N}, [m]_{S_M}) \subseteq \widehat{N \times M}$  offen ist.

- Für  $([n]_{S_N}, [m]_{S_M}) \neq (0, 0)$  ist  $f^{-1} = [n]_{S_N} \times [m]_{S_M} \subseteq N \times M \subseteq \widehat{N \times M}$  ebenfalls offen, da  $S_M$  und  $S_N$  offene Kongruenzen sind.

Nach Lemma 5.4 existiert dann eine Kongruenz  $S \in \text{Cong}_O(N \times_\varphi M)$  und eine Abbildung  $(\widehat{N \times_\varphi M})/S \xrightarrow{h} \hat{N}/S_N \times \hat{M}/S_M$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} N \times_\varphi M & \xrightarrow{\text{id}_{N \times M}} & N \times M \\ \text{kan.} \downarrow & & \downarrow \text{kan.} \\ \widehat{N \times_\varphi M} & \xrightarrow{f} & \hat{N}/S_N \times \hat{M}/S_M \\ \pi_S \downarrow & & \parallel \\ \widehat{N \times_\varphi M}/S & \xrightarrow{h} & \hat{N}/S_N \times \hat{M}/S_M \end{array}$$

Wegen  $h \circ \pi_S(0) = f(0) = ([0], [0])$  hat man wiederum eine Implikation

$$[m]_{S_M} \neq [0]_{S_M} \quad \text{und} \quad [n]_{S_N} \neq [0]_{S_N} \implies [(n, m)]_S \neq [0]_S$$

und mittels einer  $R$ -linearen Fortsetzung zeigt man analog zum ersten Teil, dass  $\phi^{-1}$  stetig ist. □



**Teil III**

**Noethersche**

**Monoidring-Konstruktionen**



## Kapitel 8

# Partiell geordnete Monoide und Filtrierungen

Hier werden partiell geordnete Monoide betrachtet. Dies sind Monoide der monoidalen Kategorie  $(\mathcal{P}os, \times, 1)$ . Neben den „gewöhnlichen“ Monoidhomomorphismen, kommen für diese Monoid-Kategorie noch weitere ordnungserhaltende Abbildungen als Morphismen in Frage. Um nachzuweisen, dass Schiefpotenzreihenringe mit noetherschen Koeffizientenringen (unter gewissen Voraussetzungen) wieder noethersch sind, wird eine Theorie für Filtrierungen benötigt, die in diesem Abschnitt erarbeitet wird. In diesem Spezialfall wählt man Filtrierungen durch natürliche Zahlen auf dem partiell geordneten Monoid der beidseitigen Ideale eines Rings.

Die Theorie der Filtrierungen kann jedoch vollkommen unabhängig von diesem Verwendungszweck aufgebaut werden und hat eine weitere Bedeutung kategorieller Natur. So wie in Kapitel 2 partiell geordnete Mengen als Kategorien betrachtet wurden, können partiell geordnete Monoide als monoidale Kategorien interpretiert werden. Filtrierungen sind dann Spezialfälle von monoidalen Funktoren, d.h. Funktoren, die die monoidalen Eigenschaften der Quell- und Zielkategorie respektieren.

Das Prinzip einer Adjunktion, abgeleitet aus der Kategorientheorie, spielt auch für die Theorie der Filtrierungen eine Rolle. Im letzten Abschnitt wird gezeigt, dass das Idealspektrum von Monoiden einer monoidalen Kategorie einen Funktor in die Kategorie der partiell geordneten Monoide mit den Filtrierungen als Morphismen definiert.

### 8.1 Partiell geordnete Monoide und Filtrierungen

#### Definition 8.1

Die monoidale Kategorie der partiell geordneten Mengen und ihre Teilkategorien seien wie folgt definiert:

- (i) Nach Proposition 3.2 ist  $(\mathcal{P}os, \times, \{1\})$  eine monoidale Kategorie. Es bezeichne  $\mathcal{P}Mon = \mathcal{P}os\text{-}Mon$  dementsprechend die Kategorie der partiell geordneten Monoide.
- (ii) Für ein partiell geordnetes Monoid  $M \in \mathcal{P}Mon$  seien folgende Axiome definiert:
  - $(M\vee)$   $M \in \mathcal{P}os_{\vee}$  und  $\lambda_m, \rho_m \in \text{End}_{\mathcal{P}os_{\vee}}(M)$  für alle  $m \in M$ .
  - $(M\wedge)$   $M \in \mathcal{P}os_{\wedge}$  und  $\lambda_m, \rho_m \in \text{End}_{\mathcal{P}os_{\wedge}}(M)$  für alle  $m \in M$ .
  - $(M\mathbb{W})$   $M \in \mathcal{P}os_{\mathbb{W}}$  und  $\lambda_m, \rho_m \in \text{End}_{\mathcal{P}os_{\mathbb{W}}}(M)$  für alle  $m \in M$ .
  - $(M\mathbb{A})$   $M \in \mathcal{P}os_{\mathbb{A}}$  und  $\lambda_m, \rho_m \in \text{End}_{\mathcal{P}os_{\mathbb{A}}}(M)$  für alle  $m \in M$ .

wobei  $\lambda_m$  bzw.  $\rho_m$  die Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit  $m \in M$  ist.

- (iii) Es sei  $\mathcal{P}\text{Mon}_\vee \subseteq \mathcal{P}\text{Mon}$  die Teilkategorie, dessen Objekte  $(M, \vee)$  erfüllen und dessen Morphismen in  $\text{Pos}_\vee$  liegen.

Analog seien  $\mathcal{P}\text{Mon}_\wedge$ ,  $\mathcal{P}\text{Mon}_\mathbb{W}$  und  $\mathcal{P}\text{Mon}_\mathbb{A}$ , sowie Kombinationen  $\mathcal{P}\text{Mon}_{\vee, \wedge}$ , usw. definiert.

### Definition 8.2

Neben den Monoidhomomorphismen gibt es die Filtrierungen, die als Morphismen für  $\mathcal{P}\text{Mon}$  in Frage kommen:

- (i) Es seien  $M, N \in \mathcal{P}\text{Mon}$ . Für eine ordnungserhaltende Abbildung  $M \xrightarrow{f} N$  seien folgende Axiome definiert:

$$(F1) \quad f(1) = 1.$$

$$(F\leq) \quad f(mn) \leq f(m)f(n) \text{ für alle } m, n \in M.$$

$$(F\geq) \quad f(mn) \geq f(m)f(n) \text{ für alle } m, n \in M.$$

Erfüllt  $f$   $(F1)$  und  $(F\geq)$ , so heiÙe  $f$   **$M$ -Filtrierung** auf  $N$  bzw. kurz **Filtrierung**.

- (ii) Es sei  $\mathcal{P}\text{Mon}_1, \mathcal{P}\text{Mon}_{\leq}$  bzw.  $\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq}$  die Kategorie der partiell geordneten Monoide mit den ordnungserhaltenden Abbildungen als Morphismen, die  $(F1)$ ,  $(F\leq)$  bzw.  $(F\geq)$  erfüllen. Morphismen in  $\mathcal{P}\text{Mon}_{\leq, 1}$  erfüllen dementsprechend  $(F\leq)$  und  $(F1)$ , usw.

Per Definition gilt  $\mathcal{P}\text{Mon} = \mathcal{P}\text{Mon}_{\leq, \geq, 1}$ .

- (iii) Für alle  $M, N \in \mathcal{P}\text{Mon}$  seien  $\text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}}(M, N)$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\leq}}(M, N)$  usw. mit der von  $\text{Hom}_{\text{Pos}}(M, N)$  induzierten Halbordnung ausgestattet, d.h. für  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq, 1}}(M, N)$  gilt

$$f \leq g \iff f(m) \leq g(m) \text{ für alle } m \in M.$$

- (iv) Analog sei  $\mathcal{P}\text{Mon}_{\leq, \vee}$  die Kategorie der partiell geordneten Monoide, die  $(M, \vee)$  erfüllen und dessen Morphismen in  $\text{Pos}_\vee$  liegen und  $(F\leq)$  erfüllen. Ebenso seien auch alle weiteren Kategorien mit Indexkombinationen definiert.

### Bemerkung 8.3

Der Dualitätsfunktork  $\text{Pos} \xrightarrow{\sim} \text{Pos}$ , der jeder partiell geordneten Menge  $(P, \leq)$  seine duale Menge  $(P, \geq)$  zuordnet, definiert einen Kategorien-Isomorphismus

$$O : \mathcal{P}\text{Mon}_{\leq} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}\text{Mon}_{\geq}, \quad (M, \leq) \mapsto (M, \geq),$$

der die Monoidstruktur unverändert lässt.

Durch Einschränkungen von  $O$  erhält man weitere Kategorien-Isomorphismen  $\mathcal{P}\text{Mon}_{\leq, \vee} \cong \mathcal{P}\text{Mon}_{\geq, \wedge}$ ,  $\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq, \mathbb{W}} \cong \mathcal{P}\text{Mon}_{\leq, \mathbb{A}}$ ,  $\mathcal{P}\text{Mon}_\vee \cong \mathcal{P}\text{Mon}_\wedge$  usw.

### Bemerkung 8.4

Da jede partiell geordnete Menge als Kategorie aufgefasst werden kann, kann analog jedes partiell geordnete Monoid als monoidale Kategorie aufgefasst werden. Wie in Bemerkung 2.15 gesehen, gibt es für jeden Punkt aus den Definitionen 8.1 und 8.2 eine kategorielle Interpretation.

### 8.1.1 Partiiell geordnete Monoide mit globalem Supremum 1

Das Idealspektrum jedes Monoids jeder monoidalen Kategorie ist ein partiiell geordnetes Monoid, dessen neutrales Element gleichzeitig das globale Supremum ist. Diese Teilklasse partiiell geordneter Monoide ist daher für die Theorie noetherscher Schiefpotenzreihenringe interessant. Auf partiiell geordneten Monoiden dieser Art gibt es eine weitere kanonische Halbordnung, die von der Monoidstruktur induziert wird und gröber als die ursprüngliche Halbordnung ist. Weiterhin hat man für Filtrierungen auf diesen Monoiden eine konkrete Darstellung der Suprema.

#### Bemerkung 8.5

Auf einem Monoid  $M$  sei durch  $m \preccurlyeq n$ , falls  $(m) \subseteq (n)$ , für  $m, n \in M$  eine Relation definiert<sup>1</sup>.

- (i) „ $\preccurlyeq$ “ ist reflexiv und transitiv, aber im Allgemeinen nicht antisymmetrisch.
- (ii) Ist  $M$  kommutativ, dann respektiert die Multiplikation von  $M$  diese Relation, d.h. es gilt  $m \cdot n \preccurlyeq m' \cdot n'$  für alle  $m, m', n, n' \in M$  mit  $m \preccurlyeq m'$  und  $n \preccurlyeq n'$ .
- (iii) Wegen  $(1) = M$  ist  $1$  ein globales Supremum.

#### Bemerkung 8.6

Es sei  $M \in \mathcal{PMon}$  ein durch „ $\leq$ “ partiiell geordnetes Monoid mit  $1$  als globales Supremum.

- (i) Für alle  $m, n \in M$  impliziert  $m \preccurlyeq n$  schon  $m \leq n$ .  
Insbesondere ist „ $\preccurlyeq$ “ dann eine Halbordnung auf  $M$ , da sich die Antisymmetrie von „ $\leq$ “ auf „ $\preccurlyeq$ “ überträgt.
- (ii)  $1 \in M$  ist die einzige Einheit.
- (iii) Ein Element  $n \in M$  ist genau dann ein globales Infimum, wenn  $n$  eine Null in  $M$  ist, d.h.  $n \cdot m = m \cdot n = n$  für alle  $m \in M$ .  
Besitzt  $M$  ein solches Element, so werde dieses im Folgenden als  $0$  bezeichnet.
- (iv) Für alle  $m \in M$  ist  $M_{\leq m} \triangleleft M$  ein Ideal.  
Insbesondere ist  $M_{\preccurlyeq m} = (m)$ , falls  $\preccurlyeq$  von der Multiplikation auf  $M$  respektiert wird.

*Beweis.*

- (i) Es seien  $m, n \in M$  mit  $m \preccurlyeq n$ , d.h.  $(m) \subseteq (n)$ . Folglich gibt es  $a, b \in M$ , so dass  $m = anb$  ist. Da  $1$  ein globales Supremum ist, gilt  $a, b \leq 1$ . Da Links- und Rechtsmultiplikation „ $\leq$ “ respektieren folgt aus  $a \leq 1$  schon  $an \leq n$  und aus  $b \leq 1$  folgt  $anb \leq an$ , so dass insgesamt  $m = anb \leq an \leq n$  ist.
- (ii) Es sei  $u \in M$  eine Einheit. Dann ist  $(u) = M = (1)$ , d.h.  $1 \preccurlyeq u \preccurlyeq 1$  und damit schon  $u = 1$ , da „ $\preccurlyeq$ “ wegen (i) eine Halbordnung auf  $M$  ist.
- (iii) Ist  $n$  eine Null in  $M$ , dann impliziert  $n \leq 1$  schon  $n = n \cdot m \leq 1 \cdot m = m$  für alle  $m \in M$ , so dass  $n$  ein globales Infimum ist.  
Umgekehrt sei  $n \in M$  ein globales Infimum. Für  $m \in M$  impliziert dann  $m \leq 1$  bereits  $n \leq n \cdot m \leq n \cdot 1 = n$  und damit  $n \cdot m = n$ . Analog zeigt man  $m \cdot n = n$ .

<sup>1</sup> $(m) \subset M$  bezeichne hierbei das von  $m$  erzeugte Hauptideal von  $M$ , d.h. das kleinste Ideal von  $M$ , das  $m$  enthält. Verwendet wird der Begriff des Monoid-Ideals im Sinne von Bemerkung 3.9 (i)

- (iv) Es sei  $m \in M$ . Für alle  $x \in M_{\leq m}$  und  $n \in M$  gilt  $n \cdot x \leq 1 \cdot x = x \leq m$ , da  $n \leq 1$  ist und die Multiplikation ordnungserhaltend ist. Folglich gilt  $nx \in M_{\leq m}$  und analog  $xn \in M_{\leq m}$ , so dass  $M_{\leq m} \triangleleft M$  ein Ideal ist.

Es sei  $m \in M$ . Für alle  $x \in M$  folgt aus  $x \preccurlyeq m$ , dass  $(x) \subseteq (m)$  und damit  $x \in (m)$  ist. Dies impliziert  $M_{\preccurlyeq m} \subseteq (m)$ . Umgekehrt ist  $m \in M_{\preccurlyeq m}$  und folglich  $(m) \subseteq M_{\preccurlyeq m}$  nach der Idealeigenschaft von  $M_{\preccurlyeq m}$ , so dass insgesamt  $(m) = M_{\preccurlyeq m}$ .

□

### Satz 8.7

Es seien  $M, N \in \mathcal{P}\text{Mon}$  partiell geordnete Monoide.

Für nicht-leere Teilmengen  $S \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1}}(M, N)$  gelten folgende Eigenschaften:

- (i) Falls  $N$  vollständig ist, dann gilt für alle  $m \in M$ :

$$\left(\bigwedge S\right)(m) = \bigwedge_{f \in S} f(m), \quad \left(\bigwedge \emptyset\right)(m) = \begin{cases} 1 & m \leq 1 \\ \bigvee N & 1 < m \end{cases}$$

Insbesondere ist  $\text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1}}(M, N)$  wegen Bemerkung 2.13 vollständig.

- (ii) Falls  $N \in \mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1,\mathbb{W}}$  ist mit  $1 = \bigvee N$ , dann gilt für alle  $m \in M$ :

$$\left(\bigvee S\right)(m) = \bigvee_{\substack{f_1, \dots, f_r \in S, \\ m_1, \dots, m_r \in M, \\ m_1 \dots m_r \leq m}} f_1(m_1) \cdot \dots \cdot f_r(m_r), \quad \left(\bigvee \emptyset\right)(m) = \begin{cases} 0 & m < 1 \\ 1 & m = 1 \end{cases}$$

*Beweis.* Es seien  $\bigwedge' S$  und  $\bigvee' S$  wie die rechte Seite in (i) und (ii) definiert. Weise nacheinander die universelle Eigenschaft eines Infimums bzw. eines Supremums von  $S$  nach.

- (i) Da alle  $f \in S$  ordnungserhaltend sind, ist auch  $\bigwedge' S$  ordnungserhaltend. Außerdem gilt  $(\bigwedge' S)(1) = \bigwedge_{f \in S} f(1) = 1$ . Nach Bemerkung 2.14 und der Definition der Produkthalbordnung gilt  $(\bigwedge A) \cdot (\bigwedge B) \leq \bigwedge (A \cdot B)$  für alle  $A, B \subseteq N$ . Dies impliziert für alle  $m, n \in M$

$$\begin{aligned} (\bigwedge' S)(m) \cdot (\bigwedge' S)(n) &\leq \left(\bigwedge_{f \in S} f(m)\right) \cdot \left(\bigwedge_{g \in S} g(n)\right) \leq \bigwedge_{f, g \in S} (f(m)g(n)) \\ &\leq \bigwedge_{f \in S} \underbrace{(f(m)f(n))}_{\leq f(mn)} \leq (\bigwedge' S)(mn), \end{aligned}$$

womit insgesamt gezeigt ist, dass auch  $\bigwedge' S \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1}}(M, N)$  eine Filtrierung ist. Per Konstruktion und nach Definition der Halbordnung auf  $\text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1}}(M, N)$  ist  $(\bigwedge' S)$  ein Infimum von  $S$ .

Nach Konstruktion ist  $\bigwedge' \emptyset$  eine Filtrierung und gleichzeitig ein globales Supremum von  $\text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1}}(M, N)$ .

- (ii) Es seien  $m, n \in M$  mit  $m \leq n$  und  $S \neq \emptyset$ . Für jedes Produkt  $m_1 \cdot \dots \cdot m_r \leq m$  in  $M$  und alle  $f_1, \dots, f_r \in S$  ist wegen  $m_1 \cdot \dots \cdot m_r \leq m \leq n$  nach Konstruktion  $f_1(m_1) \cdot \dots \cdot f_r(m_r) \leq (\bigvee' S)(n)$  und folglich  $(\bigvee' S)(m) \leq (\bigvee' S)(n)$ , so dass  $\bigvee' S$  ordnungserhaltend ist. Da  $1 \in N$  maximal und  $f(1) = 1$  für alle  $f \in S$  ist, gilt  $(\bigvee' S)(1) \geq f(1) = 1$  bzw.  $(\bigvee' S)(1) = 1$ .



Es seien  $m, n \in M$  und  $m_1 \cdot \dots \cdot m_r \leq m$  sowie  $n_1, \dots, n_s \leq n$  zwei Produkte in  $M$ . Weiterhin seien  $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \in S$ . Dann gilt  $m_1 \cdot \dots \cdot m_r \cdot n_1 \cdot \dots \cdot n_s \leq m \cdot n$ , da die Multiplikation auf  $M$  ordnungserhaltend ist. Folglich ist

$$f_1(m_1) \cdot \dots \cdot f_r(m_r) \cdot g_1(n_1) \cdot \dots \cdot g_s(n_s) \leq (\bigvee' S)(mn)$$

nach Definition von  $\bigvee' S$ . Da nun die Multiplikation auf  $N$  mit Suprema vertauscht, folgt insgesamt  $(\bigvee' S)(m) \cdot (\bigvee' S)(n) \leq (\bigvee' S)(mn)$ , womit das Multiplikationsaxiom  $(F_{\geq})$  nachgewiesen wurde.

Es sei nun  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1}}(M, N)$  eine weitere Filtrierung mit  $f \leq h$  für alle  $f \in S$ . Für alle  $m \in M$  und alle Produkte  $m_1 \cdot \dots \cdot m_r \leq m$  in  $M$  und alle  $f_1, \dots, f_r \in S$  gilt

$$f_1(m_1) \cdot \dots \cdot f_r(m_r) \leq h(m_1) \cdot \dots \cdot h(m_r) \leq h(m_1 \cdot \dots \cdot m_r) \leq h(m)$$

wegen  $(F_{\geq})$  für  $h$  und da die Multiplikation in  $M$  ordnungserhaltend ist. Folglich ist  $\bigvee' S \leq h$  nach Definition von  $\bigvee' S$  und damit ein Supremum von  $S$  in  $\text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1}}(M, N)$ .

Wegen Bemerkung 8.6 (iii) ist  $\bigvee' \emptyset$  eine Filtrierung und bildet daher ein globales Infimum von  $\text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1}}(M, N)$ .

□

## 8.2 Adjungierte Filtrierungen

In diesem Abschnitt werden Adjungierte von Filtrierungen behandelt. Korollar 8.9 zeigt die Funktorialität der Konstruktion einer Adjungierten auf.

### Proposition 8.8

Für zwei partiell geordnete Monoide  $M, N \in \mathcal{P}\text{Mon}$  mit  $M \in \mathcal{P}\text{Mon}_{\mathbb{W}}$  gilt

- (i) Falls  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\leq}}(M, N)$ , dann ist  $f^* \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq}}(N, M)$ .
- (ii) Falls  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\leq,1}}(M, N)$  und  $\bigvee M = 1$ , dann ist  $f^* \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1}}(N, M)$ .

$f^*$  sei dabei wie in Definition 2.16 definiert.

*Beweis.*

- (i) Nach Bemerkung 2.17 (i) ist  $f^*$  ordnungserhaltend. Es seien  $m, n \in N$ . Für alle  $x \in f^{-1}(N_{\leq m})$  und  $y \in f^{-1}(N_{\leq n})$  ist  $f(xy) \leq f(x) \cdot f(y) \leq mn$  und folglich  $f(xy) \in N_{\leq mn}$ , da die Multiplikation auf  $N$  ordnungserhaltend ist. Dies impliziert  $f^{-1}(N_{\leq m}) \cdot f^{-1}(N_{\leq n}) \subseteq f^{-1}(N_{\leq mn})$ . Da die Multiplikation auf  $M$  mit Suprema vertauscht, gilt somit

$$\begin{aligned} f^*(m) \cdot f^*(n) &= \left( \bigvee f^{-1}(N_{\leq m}) \right) \left( \bigvee f^{-1}(N_{\leq n}) \right) = \bigvee (f^{-1}(N_{\leq m}) \cdot f^{-1}(N_{\leq n})) \\ &\leq \bigvee f^{-1}(N_{\leq mn}) = f^*(mn), \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, dass  $f^*$  auch das Multiplikativitätsaxiom  $(F_{\geq})$  erfüllt.

- (ii) Wegen  $f(1) = 1$  ist  $1 \in f^{-1}(N_{\leq 1})$  und damit  $f^*(1) = 1$ , da  $1 = \bigvee M$ .

□

**Korollar 8.9**

Die Abbildung  $F$  aus Bemerkung 2.17 (iii) definiert einen (kontravarianten) Funktor

$$\mathcal{P}Mon_{\leq, \vee} \xrightarrow{F} \mathcal{P}Mon_{\geq}, \quad M \mapsto M$$

*Beweis.* Für  $M \in \mathcal{P}Mon_{\leq, \vee}$  und  $m \in M$  ist  $\text{id}_M^*(m) = \bigvee \text{id}_M^{-1}(M_{\leq m}) = \bigvee M_{\leq m} = m$  und damit  $\text{id}_M^* = \text{id}_M$ .

Für  $K, M, N \in \mathcal{P}Mon_{\leq, \vee}$  und Morphismen  $K \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$  dieser Kategorie gilt  $f^{-1}(N_{\leq n}) = M_{\leq \bigvee f^{-1}(N_{\leq n})}$  für alle  $n \in N$ , denn:

- Für jedes  $m \in f^{-1}(N_{\leq n})$  ist auch  $m \leq \bigvee f^{-1}(N_{\leq n})$  und damit  $m \in M_{\leq \bigvee f^{-1}(N_{\leq n})}$ .
- Da  $f$  mit Suprema vertauscht, gilt umgekehrt für alle  $m \in M$  mit  $m \leq \bigvee f^{-1}(N_{\leq n})$ , dass  $f(m) \leq \bigvee f(f^{-1}(N_{\leq n})) = \bigvee (f(M) \cap N_{\leq n}) \leq \bigvee N_{\leq n} = n$  und folglich  $m \in f^{-1}(N_{\leq n})$ .

Insgesamt liefert dies für alle  $n \in N$  die Gleichung

$$(f \circ g)^*(n) = \bigvee g^{-1}(f^{-1}(N_{\leq n})) = \bigvee g^{-1}(M_{\leq \bigvee f^{-1}(N_{\leq n})}) = g^*(\bigvee f^{-1}(N_{\leq n})) = g^* \circ f^*(n)$$

und damit  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ , so dass durch  $F(f) = f^*$  ein Funktor definiert wird. □

### 8.3 Erzeugersysteme von Filtrierungen

Für die Theorie noetherscher Schiefpotenzreihenringe sind Erzeugersysteme von Filtrierungen wichtig. Insbesondere an endlich erzeugten Filtrierungen ist man interessiert. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie sich Erzeugersysteme von Filtrierungen unter Adjunktionen und Suprema verhalten.

**Definition 8.10**

Es seien  $M$  und  $N$  zwei partiell geordnete Monoide.

Eine Teilmenge  $X \subseteq M$  heißt **Erzeugersystem** einer  $M$ -Filtrierung  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon_{\geq, 1}}(M, N)$ , wenn  $f(m)$  für alle  $m \in M$  ein Supremum folgender Teilmenge in  $N$  bildet:

$$S = \{f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_r); x_1, \dots, x_r \in X, x_1 \cdot \dots \cdot x_r \leq m\} \subseteq N$$

*Beachte:* Das Supremum der leeren Teilmenge ist ein globales Infimum von  $N$ . Falls also  $\langle X \rangle \subsetneq M$  ist und  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon_{\geq, 1}}(M, N)$  von  $X$  erzeugt wird, dann besitzt  $N$  ein globales Infimum.

**Bemerkung 8.11**

Es seien  $M, N \in \mathcal{P}Mon$  und  $X \subseteq M$  eine Teilmenge, die  $M$  als Monoid erzeugt.

Dann erzeugt  $X$  jedes  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon}(M, N) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon_{\geq, 1}}(M, N)$  aufgefasst als Filtrierung.

*Beweis.* Für jedes  $m \in M$  ist  $m = y_1 \cdot \dots \cdot y_s$  für gewisse  $y_1, \dots, y_s \in X$ , da  $M = \langle X \rangle$  ist. Die Multiplikativität von  $f$  impliziert

$$f(m) = f(y_1) \cdot \dots \cdot f(y_s) \in S = \{f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_r); x_1, \dots, x_r \in X, x_1 \cdot \dots \cdot x_r \leq m\}.$$

Nach dem Multiplikativitätsaxiom ( $F_{\geq}$ ) ist  $f(m)$  eine obere Schranke von  $S$  und damit ein Supremum von  $S$ , so dass  $f$  von  $X$  erzeugt wird. □

**Proposition 8.12**

Es seien  $M, N \in \mathcal{P}Mon$  und  $N \in \mathcal{P}Mon_{\mathbb{N}}$  vollständig mit  $\bigvee N = 1$ .

Für  $i \in \{1, 2\}$  und  $f_i \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon_{\geq 1}}(M, N)$ , wobei  $f_i$  von  $X_i \subseteq M$  erzeugt wird, wird  $f_1 \vee f_2$  von  $X_1 \cup X_2$  erzeugt.

*Beweis.* Nach Satz 8.7 (ii) ist für alle  $m \in M$

$$(f_1 \vee f_2)(m) = \bigvee_{\substack{i_1, \dots, i_r \in \{1, 2\}, \\ m_1, \dots, m_r \in M, \\ m_1 \cdot \dots \cdot m_r \leq m}} f_{i_1}(m_1) \cdot \dots \cdot f_{i_r}(m_r).$$

Nach Definition 8.10 ist für alle  $i_1, \dots, i_r \in \{1, 2\}$  und jedes  $j = 1, \dots, r$

$$f_{i_j}(m_j) = \bigvee_{\substack{x_1, \dots, x_{s_j} \in X, \\ x_1 \cdot \dots \cdot x_{s_j} \leq m_j}} f_{i_j}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{i_j}(x_{s_j}).$$

Da in  $N$  die Multiplikation mit Suprema vertauscht und die Multiplikation auf  $M$  ordnungserhaltend ist, erhält man durch Einsetzen in die obige Darstellung von  $f_1 \vee f_2$  die Darstellung

$$(f_1 \vee f_2)(m) = \bigvee_{\substack{i_1, \dots, i_r \in \{1, 2\}, \\ x_1, \dots, x_r \in X_1 \cup X_2, \\ x_1 \cdot \dots \cdot x_r \leq m}} f_{i_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{i_r}(x_r) \leq \bigvee_{\substack{x_1, \dots, x_r \in X_1 \cup X_2, \\ x_1 \cdot \dots \cdot x_r \leq m}} (f_1 \vee f_2)(x_1) \cdot \dots \cdot (f_1 \vee f_2)(x_r).$$

Aufgrund des Multiplikativitätsaxiom ( $F \geq$ ) für Filtrierungen gilt auch die andere Abschätzung „ $\geq$ “, so dass damit  $f_1 \vee f_2$  von  $X_1 \cup X_2$  erzeugt wird. □

**Proposition 8.13**

Es seien  $M, N \in \mathcal{P}Mon$  und  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon}(M, N)$  besitze eine Rechtsadjungierte  $g$  (im Sinne von Definition 2.18).

Falls  $M$  von  $X \subseteq g(N)$  erzeugt wird, dann wird  $g$  von  $g^{-1}(X) \subseteq N$  erzeugt.

*Beweis.* Es sei  $n \in N$ . Da  $M$  von  $X$  erzeugt wird, gibt es  $x_1, \dots, x_r \in X$  mit  $g(n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_r$ . Aus  $g(n) \leq g(n)$  folgt mit der Galoiseigenschaft  $f \circ g(n) \leq n$ . Aus der Multiplikativität von  $f$  resultiert  $f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_r) = f \circ g(n) \leq n$ . Nach Bemerkung 2.19 (iii) ist  $g \circ f(x_i) = x_i \in X$  und damit  $f(x_i) \in g^{-1}(X)$  für alle  $1 \leq i \leq r$ , so dass schließlich

$$g(n) = g \circ f(x_1) \cdot \dots \cdot g \circ f(x_r) \in S_n = \{g(y_1) \cdot \dots \cdot g(y_s); y_1, \dots, y_s \in g^{-1}(X), y_1 \cdot \dots \cdot y_s \leq n\}.$$

Da  $g(n)$  nach dem Multiplikativitätsaxiom ( $F \geq$ ) die Menge  $S_n$  beschränkt, ist  $g(n)$  ein Supremum bzw. Maximum von  $S_n$ , so dass  $g$  per Definition von  $g^{-1}(X)$  erzeugt wird. □

### 8.3.1 Endlich erzeugte Filtrierungen durch natürliche Zahlen

Hier wird der wichtige Spezialfall von Filtrierungen durch natürliche Zahlen behandelt. Später werden Ideal-Filtrierungen des Koeffizientenrings durch natürliche Zahlen betrachtet. Für diese kann der graduierte Ring gebildet werden, der zum Nachweis noetherscher Schiefpotenzreihenringe essenziell ist. Es gibt eine kanonische Operation der positiven, natürlichen Zahlen auf der halbgeordneten Menge der  $-\mathbb{N}_0$ -Filtrierungen auf einem partiell geordneten Monoid. Über diese Operation erhält man mit Proposition 8.17 für jede endlich erzeugte Filtrierung eine Darstellung als endliches Supremum von Potenzen (über diese Operation) von Monoidhomomorphismen.

**Beispiel 8.14**

Für die weiteren Ergebnisse wichtige partiiell geordnete Monoide sind

- (i)  $\mathbb{N}_0$  zusammen mit der Addition und der kanonischen Halbordnung.  $\mathbb{N}_0$  besitzt Infima nicht-leerer Teilmengen und ist damit „fast“ vollständig.

Durch Hinzufügen eines globalen Supremums  $\infty$  erhält man das vollständige, partiiell geordnete Monoid  $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \in \mathcal{PMon}_{\mathbb{Q}, \mathbb{A}}$ .

- (ii)  $-\mathbb{N}_0$  ebenfalls mit Addition und kanonischer Halbordnung.  $-\mathbb{N}_0$  ist die zu  $\mathbb{N}_0$  duale partiiell geordnete Menge.
- (iii)  $\mathbb{N}_0$  und  $\mathbb{N}$  zusammen mit der Multiplikation und kanonischer Halbordnung. Um diese von der additiven Variante zu unterscheiden, verwende die Notation  $\mathbb{N}_0^\bullet$  bzw.  $\mathbb{N}^\bullet$ .

**Proposition 8.15** (i) Für  $M \in \mathcal{PMon}$  gibt es den Isomorphismus partiiell geordneter Mengen:

$$\phi : M \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{PMon}}(-\mathbb{N}_0, M), \quad m \longmapsto \bar{m} \quad \text{mit} \quad \bar{m}(-k) = m^k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

- (ii) Für  $M = -\mathbb{N}_0$  liefert (i) den (ordnungsumkehrenden) Monoidisomorphismus

$$\phi : \mathbb{N}_0^\bullet \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathcal{PMon}}(-\mathbb{N}_0), \quad n \longmapsto \lambda_n,$$

wobei  $\lambda_n$  die Linksmultiplikation mit  $n$  sei.

- (iii) Für alle  $n \in \mathbb{N}^\bullet$  gibt es zu  $\lambda_n \in \text{End}_{\mathcal{PMon}}(-\mathbb{N}_0)$  einen Rechtsadjungierten  $\lambda_n^*$  gegeben durch

$$\lambda_n^* : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0, \quad k \longmapsto \bigvee \lambda_n^{-1}((-\mathbb{N}_0)_{\leq k}) = \bigvee (-\mathbb{N}_0)_{\leq k/n} = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor.$$

*Beweis.*

- (i) Nach Konstruktion ist  $\phi(m) \in \text{Hom}_{\mathcal{PMon}}(-\mathbb{N}_0, M)$  für alle  $m \in M$ . Außerdem ist jeder Monoidhomomorphismus in  $\text{Hom}_{\mathcal{PMon}}(-\mathbb{N}_0, M)$  durch sein Bild von  $-1$  vollständig festgelegt, so dass  $\phi$  eine Bijektion definiert. Nach Definition der Halbordnung auf Endomorphismenmengen ist  $\phi$  außerdem ordnungserhaltend. Umgekehrt impliziert  $\phi(m) \leq \phi(n)$  schon  $m = \phi(m)(-1) = \phi(n)(-1) = n$ .

- (ii) Per Definition ist  $\phi$  multiplikativ und  $\phi(1) = \text{id}_{-\mathbb{N}_0}$ .

- (iii) Es seien  $a, b \in -\mathbb{N}_0$ . Da  $a$  ganzzahlig ist, gilt die Äquivalenz

$$na = \lambda_n(a) \leq b \iff a \leq \frac{b}{n} \iff a \leq \lambda_n^*(b) = \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor,$$

so dass  $\lambda_n^*$  per Definition rechtsadjungiert zu  $\lambda_n$  ist.

□

**Korollar 8.16**

Man erhält einen kanonischen Funktor

$$\text{Hom}_{\mathcal{PMon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, -) : \mathcal{PMon}_{\geq 1} \longrightarrow \text{Pos-}\mathbb{N}^\bullet,$$

wobei  $\mathbb{N}^\bullet$  für alle  $M \in \mathcal{PMon}_{\geq 1}$  wie folgt auf  $\text{Hom}_{\mathcal{PMon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, M)$  operiert:

$$\text{Hom}_{\mathcal{PMon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, M) \times \mathbb{N}^\bullet, \quad (f, n) \longmapsto f^n := f \circ \lambda_n^*$$

*Beweis.* Proposition 2.12 (iii) liefert den Hom-Funktor  $\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1} \longrightarrow \mathcal{P}\text{os-End}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1}}(-\mathbb{N}_0)$ , da jede Hom-Menge in kanonischer Weise eine halbgeordnete  $\text{End}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1}}(-\mathbb{N}_0)$ -Linksmenge ist. Der Homomorphismus partiell geordneter Monoid

$$\mathbb{N}^\bullet \xrightarrow{\phi} \text{End}_{\mathcal{P}\text{Mon}}(\mathbb{N}_0) \xrightarrow{O} \text{End}_{\mathcal{P}\text{Mon}}(-\mathbb{N}_0) \xrightarrow{(-)^*} \text{End}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1}}(-\mathbb{N}_0), \quad n \longmapsto \lambda_n^*$$

induziert dann den gewünschten Funktor. Beachte, dass  $O$  bzw.  $(-)^*$  nach Bemerkung 8.3 bzw. Bemerkung 2.17 (iii) ordnungsumkehrend sind. □

### Proposition 8.17

Es sei  $M \in \mathcal{P}\text{Mon}_{\mathbb{V}}$  mit  $\bigvee M = 1$ .

Für eine Filtrierung  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq,1}}(-\mathbb{N}_0, M)$ , sind äquivalent:

(i)  $f$  wird von  $\{-1, \dots, -n\} \subseteq -\mathbb{N}$  erzeugt.

(ii)  $f = \bigvee_{k=1}^n \overline{f(-k)}^k$ .

*Beweis.* Es sei  $f$  von  $X = \{-1, \dots, -n\}$  erzeugt und  $f' = \bigvee_{k=1}^n \overline{f(-k)}^k$ . Weiterhin sei  $k = 1, \dots, n$ . Für  $a \in -\mathbb{N}_0$  gilt

$$\overline{f(-k)}^k(a) = \overline{f(-k)}(\lambda_k^*(a)) = f(-k)^{-\lambda_k^*(a)} \leq f(k \cdot \lambda_k^*(a)) = f \circ \lambda_k \circ \lambda_k^*(a) \leq f(a)$$

wegen der Galoiseigenschaft und der Filtrierungsaxiome für  $f$ , so dass  $f' \leq f$  ist per Definition von  $f'$  als Supremum. Andererseits ist  $\overline{f(-k)}^k(-k) = f(-k)^{-\lambda_k^*(-k)} = f(-k)$  wegen  $\lambda_k^*(-k) = \lfloor \frac{-k}{k} \rfloor = -1$ , so dass  $f$  und  $f'$  auf  $X$  übereinstimmen. Da  $f$  von  $X$  erzeugt wird, gilt nach Definition 8.10 von Erzeugersystemen und Satz 8.7 für alle  $a \in -\mathbb{N}_0$

$$f(a) = \bigvee_{\substack{x_1, \dots, x_r \in X, \\ x_1 + \dots + x_r \leq a}} f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_r) = \bigvee_{\substack{x_1, \dots, x_r \in X, \\ x_1 + \dots + x_r \leq a}} \overline{f(x_1)}^{(-x_1)}(x_1) \cdot \dots \cdot \overline{f(x_r)}^{(-x_r)}(x_r) = f'(a)$$

und damit  $f = f'$ , was zu zeigen war.

Umgekehrt sei  $1 \leq k \leq n$ . Da  $-\mathbb{N}_0$  von  $-1$  erzeugt wird, wird  $\lambda_k^*$  nach Proposition 8.13 von  $(\lambda_k^*)^{-1}(-1) = \{-1, \dots, -k\}$  erzeugt. Nun wird  $\overline{f(-k)}$  als Monoidhomomorphismus wegen Bemerkung 8.11 von  $-1 \in \lambda_k^*(\{-1, \dots, -k\})$  erzeugt. Damit wird auch  $\overline{f(-k)}^k$  von  $\{-1, \dots, -k\}$  erzeugt. Wegen Proposition 8.12 wird daher  $f$  von  $\bigcup_{k=1}^n \{-1, \dots, -k\} = \{-1, \dots, -n\}$  erzeugt. □

## 8.4 Filtrierungen invariant unter einer Derivation

Der Begriff der Derivation auf einem partiell geordneten Monoid ist unmittelbar aus dem Anwendungsbeispiel der Untersuchung von noetherschen Schiefpotenzreihenringen motiviert. Im folgenden Abschnitt wird die hierfür notwendige Theorie entwickelt. Im Hinblick auf die spätere Anwendung ist man besonders an endlich erzeugten, ausschöpfenden Filtrierungen interessiert, die invariant unter einer Derivation sind.

### Definition 8.18

Es sei  $M \in \mathcal{P}\text{Mon}_{\mathbb{V}}$  ein partiell geordnetes Monoid.

- (i) Eine Abbildung  $\delta \in \text{End}_{\mathcal{P}os_{\vee}}(M)$  heißt **Derivation** auf  $M$ , falls  $\delta(mn) \leq (m \cdot \delta(n)) \vee (\delta(m) \cdot n)$  ist für alle  $m, n \in M$ .
- (ii) Eine Derivation  $\delta$  auf  $M$  heißt **nilpotent**, wenn es für alle  $m \in M$  ein  $n \in \mathbb{N}_0$  gibt, so dass  $\delta^k(1) \leq m$  für alle  $k \geq n$ .
- (iii) Es sei  $\delta$  eine Derivation auf  $M$ . Eine Filtrierung  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon_{\geq,1}}(-\mathbb{N}_0, M)$  heißt  **$\delta$ -invariant**, wenn  $\delta \circ f(-k) \leq f(-k-1)$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt.
- (iv) Für ein weiteres partiiell geordnetes Monoid  $N$  heißt eine Filtrierung  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon_{\geq,1}}(N, M)$  **ausschöpfend**, falls  $\bigwedge f(N) = \bigwedge M$  ist.

**Bemerkung 8.19**

Es sei  $M \in \mathcal{P}Mon_{\vee}$  ein partiiell geordnetes Monoid und  $\delta$  eine Derivation auf  $M$ .

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $m_1, \dots, m_k \in M$  gilt

$$\delta(m_1 \cdot \dots \cdot m_k) \leq \bigvee_{i=1}^k m_1 \cdot \dots \cdot m_{i-1} \cdot \delta(m_i) \cdot m_{i+1} \cdot \dots \cdot m_k.$$

Insbesondere ist  $\delta(m^{k+1}) \leq \bigvee_{i=0}^k m^i \cdot \delta(m) \cdot m^{k-i}$  für  $m \in M$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ .

*Beweis.* Für  $k = 1$  ist  $\delta(m_1) = \bigvee_{i=1}^k m_1 \cdot \dots \cdot m_{i-1} \cdot \delta(m_i) \cdot m_{i+1} \cdot \dots \cdot m_k$ . Angenommen die Aussage gilt für  $k$ . Da die Multiplikation auf  $M$  mit endlichen Suprema vertauscht, gilt dann

$$\begin{aligned} \delta(m_1 \cdot \dots \cdot m_{k+1}) &\leq (m_1 \cdot \delta(m_2 \cdot \dots \cdot m_{k+1})) \vee (\delta(m_1) \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_{k+1}) \\ &\leq \left( m_1 \cdot \bigvee_{i=2}^{k+1} m_2 \cdot \dots \cdot m_{i-1} \cdot \delta(m_i) \cdot m_{i+1} \cdot \dots \cdot m_{k+1} \right) \vee (\delta(m_1) \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_{k+1}) \\ &= \left( \bigvee_{i=2}^{k+1} m_1 \cdot \dots \cdot m_{i-1} \cdot \delta(m_i) \cdot m_{i+1} \cdot \dots \cdot m_{k+1} \right) \vee (\delta(m_1) \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_{k+1}) \\ &= \bigvee_{i=1}^{k+1} m_1 \cdot \dots \cdot m_{i-1} \cdot \delta(m_i) \cdot m_{i+1} \cdot \dots \cdot m_{k+1}, \end{aligned}$$

so dass die Aussage auch für  $k + 1$  gilt. Per vollständiger Induktion gilt sie dann für alle  $k \in \mathbb{N}$ . □

**Lemma 8.20**

Es sei  $M \in \mathcal{P}Mon_{\vee}$  mit  $\bigvee M = 1$  und  $\delta$  eine Derivation auf  $M$ . Weiterhin seien  $a, b \in M$  mit  $\delta(a) \leq b$  und  $1 \leq m < n$  zwei natürliche Zahlen.

Dann gilt  $\delta \circ \bar{a}^m(-k) \leq (\bar{a}^m \vee \bar{b}^n)(-k-1)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Es sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es  $s, t \in \mathbb{N}_0$  mit  $k = sm + t$  und  $1 \leq t \leq m$ . Dies impliziert

$$\lambda_m^*(-k) = \left\lfloor \frac{-(sm+t)}{m} \right\rfloor = \left\lfloor -\left(s + \frac{t}{m}\right) \right\rfloor = -(s+1).$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}\delta \circ \bar{a}^m(-k) &= \delta \circ \bar{a} \circ \lambda_m^*(-k) = \delta \circ \bar{a}(-(s+1)) = \delta(a^{s+1}) \leq \bigvee_{i=0}^s a^i \cdot b \cdot a^{s-i} \\ &= \bigvee_{i=0}^s \bar{a}^{m(-im)} \cdot \bar{b}^n(-n) \cdot \bar{a}^m(-(s-i)m).\end{aligned}$$

Wegen  $-im - (s-i)m - n = -sm - n < -sm - m \leq k$  und der Darstellung des Supremums  $\bar{a}^m \vee \bar{b}^n$  aus Satz 8.7 (ii), gilt schließlich  $\delta \circ \bar{a}^m(-k) \leq (\bar{a}^m \vee \bar{b}^n)(-k-1)$ .  $\square$

### Lemma 8.21

Es seien  $M \in \mathcal{PMon}_{\mathbb{W}}$  mit  $\bigvee M = 1$ ,  $\delta$  eine Derivation auf  $M$  und  $m_1, \dots, m_n \in M$  mit  $\delta(1) \leq m_1$ ,  $\delta(m_n) \leq m_1^2$  und  $\delta(m_i) \leq m_{i+1}$  für alle  $1 \leq i \leq n-1$ .

Dann ist  $f = \bar{m}_1^n \vee \bar{m}_2^{2n+1} \vee \dots \vee \bar{m}_n^{2n-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{PMon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, M)$  eine endlich erzeugte  $\delta$ -invariante Filtrierung.

*Beweis.* Es sei  $S = \{\bar{m}_1^r, \bar{m}_2^{r+1}, \dots, \bar{m}_r^{2r-1}\}$ . Nach Satz 8.7 (ii) ist dann für alle  $k \in \mathbb{N}_0$

$$f(-k) = \bigvee_{\substack{x_0, \dots, x_r \in \mathbb{N}_0, \\ x_0 + \dots + x_r \geq k, \\ f_1, \dots, f_r \in S}} f_1(-x_1) \cdot \dots \cdot f_r(-x_r).$$

Wendet man  $\delta$  darauf an, dann folgt mit Bemerkung 8.19 und (F $\geq$ ), dass

$$\begin{aligned}\delta \circ f(-k) &= \bigvee_{\substack{x_0, \dots, x_r \in -\mathbb{N}_0, \\ x_0 + \dots + x_r \leq -k, \\ f_0, \dots, f_r \in S}} f_0(x_0) \cdot \dots \cdot f_r(x_r) \\ &\leq \bigvee_{\substack{x_0, \dots, x_r \in \mathbb{N}_0, \\ x_0 + \dots + x_r \leq -k, \\ f_0, \dots, f_r \in S}} \bigvee_{j=0}^r \underbrace{f_0(x_0) \cdot \dots \cdot f_{j-1}(x_{j-1})}_{\leq f(x_0 + \dots + x_{j-1})} \cdot \delta(f_j(x_j)) \cdot \underbrace{f_{j+1}(x_{j+1}) \cdot \dots \cdot f_r(x_r)}_{\leq f(x_{j+1} + \dots + x_r)}.\end{aligned}$$

Für den mittleren Faktor, beachte, dass  $f_j = \bar{m}_l^{n-1+l}$  mit einem  $1 \leq l \leq n$  ist.

- Ist  $l < n$ , dann gilt wegen  $\delta(m_l) \leq m_{l+1}$  nach Lemma 8.20, dass

$$\delta(f_j(x_j)) = (\delta \circ \bar{m}_l^{n-1+l})(x_j) \leq (\bar{m}_l^{n-1+l} \vee \bar{m}_{l+1}^{n-1+l+1})(x_j - 1) \leq f(x_j - 1).$$

- Ist  $l = n$ , dann gilt wegen  $\delta(m_n) \leq m_1^2$  und  $\bar{m}_1^{2n} \leq \bar{m}_1^n$  nach Lemma 8.20, dass

$$\begin{aligned}\delta(f_j(x_j)) &= (\delta \circ \bar{m}_n^{2n-1})(x_j) \leq \left( \bar{m}_n^{2n-1} \vee \left( \bar{m}_1^{2n} \right) \right) (x_j - 1) \\ &\leq (\bar{m}_n^{2n-1} \vee \bar{m}_1^n)(x_j - 1) \leq f(x_j - 1).\end{aligned}$$

Einsetzen in die obige Rechnung ergibt dann mit (F $\geq$ ) für  $f$

$$\delta \circ f(-k) \leq \bigvee_{\substack{x_0, \dots, x_r \in \mathbb{N}_0, \\ x_0 + \dots + x_r \leq -k, \\ f_0, \dots, f_r \in S}} \bigvee_{j=0}^r \underbrace{f(x_0 + \dots + x_{j-1}) \cdot f(x_j - 1) \cdot f(x_{j+1} + \dots + x_r)}_{\leq f(x_0 + \dots + x_r - 1)} \leq f(-k-1).$$

$\square$

### 8.4.1 Endlich erzeugte Filtrierungen invariant unter einer Derivation

#### Lemma 8.22

Es sei  $M \in \mathcal{P}Mon_{\mathbb{W}}$  ein partiell geordnetes Monoid, so dass für alle absteigend filtrierte Teilmengen  $S \subseteq M$  und alle  $x \in M$  das Distributivgesetz  $x \vee \bigwedge S = \bigwedge_{s \in S} (x \vee s)$  gilt.

Für alle ausschöpfenden Filtrierungen  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, M)$  und alle  $j \in M$  der Art, dass  $M_{\geq j}$  endlich ist, gibt es ein  $n \in \mathbb{N}_0$ , so dass  $f(-n) \leq j$  ist.

*Beweis.* Da  $-\mathbb{N}_0$  absteigend filtrierte ist, ist auch  $f(-\mathbb{N}_0)$  absteigend filtrierte. Aufgrund des Distributivgesetzes für absteigend filtrierte Mengen und da  $f$  nach Voraussetzung ausschöpfend ist, gilt

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}_0} (f(-k) \vee j) = \left( \bigwedge f(-\mathbb{N}_0) \right) \vee j = 0 \vee j = j.$$

Da nur endlich viele Elemente von  $M$  größer oder gleich  $j$  sind, wird die absteigende Kette  $f(0) \vee j \geq f(-1) \vee j \geq f(-2) \vee j \geq \dots$  stationär und es gibt daher ein  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $f(-n) \vee j = j$ . Insbesondere ist  $f(-n) \leq j$ . □

#### Lemma 8.23

Es sei  $M \in \mathcal{P}Mon_{\mathbb{W}}$  ein partiell geordnetes Monoid mit  $\bigvee M = 1$  und den Eigenschaften

- (i) Für alle absteigend filtrierte Teilmengen  $S \subseteq M$  und alle  $x \in M$  gilt  $x \vee \bigwedge S = \bigwedge_{s \in S} (x \vee s)$ .
- (ii) Es gibt eine ausschöpfende Filtrierung  $j \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon}(-\mathbb{N}_0, M)$ , so dass  $M_{\geq j(-k)}$  endlich ist für  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Unter diesen Bedingungen sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Es gibt eine ausschöpfende  $\delta$ -invariante Filtrierung  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, M)$ .
- (ii)  $\delta$  ist nilpotent und es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\delta^n(1) \leq j(-1)$ .

*Beweis.* Gegeben sei eine ausschöpfende  $\delta$ -invariante Filtrierung  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, M)$ .

- Es sei  $m \in \mathbb{N}$ . Nach Lemma 8.22 gibt es für alle  $m \in \mathbb{N}$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $f(-n) \leq j(-m)$ . Für alle  $k \geq n$  gilt aufgrund der  $\delta$ -Invarianz von  $f$

$$\delta^k(1) = \delta^k \circ f(0) \leq f(-k) \leq f(-n) \leq j(-m),$$

so dass  $\delta$  per Definition nilpotent ist.

- Da  $f$   $\delta$ -invariant ist, gilt  $\delta(1) = \delta \circ f(0) \leq f(-1)$ , so dass es für  $m = 1$  nach Lemma 8.22 ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\delta(1)^n \leq f(-1)^n \leq f(-n) \leq j(-1)$  gibt, da  $f$  eine Filtrierung ist.

Umgekehrt sei  $m \in \mathbb{N}$  beliebig.

- (i) Da  $\delta$  nilpotent ist, gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\delta^k(1) \leq j(-m)$ .
- (ii) Nach Voraussetzung gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\delta(1)^n \leq j(-m)$ .

Betrachte die Filtrierung  $g$  definiert durch

$$g(-k) = \bigvee_{\substack{k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0 \\ k_1 + \dots + k_r \geq k}} \delta^{k_1}(1) \cdot \dots \cdot \delta^{k_r}(1).$$

Nach Konstruktion erfüllt  $g$  die Filtrierungsaxiome (F1) und (F $\geq$ ). Außerdem ist  $g$  nach Bemerkung 8.19 per Konstruktion  $\delta$ -invariant. Es seien nun  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0$  mit  $kn \leq k_1 + \dots + k_r$ .



- Falls  $r < n$  ist, dann führt die Annahme, dass  $k_i < k$  ist für alle  $1 \leq i \leq r$  wegen

$$\sum_{i=1}^r k_i < rk < nk = \sum_{i=1}^r k_i$$

zum Widerspruch. Daher gibt es ein  $1 \leq i \leq r$  mit  $k_i \geq k$ . Mit (i) gilt dann  $\delta^{k_1}(1) \cdots \delta^{k_r}(1) \leq \delta^{k_i}(1) \leq j(-m)$ , da  $1 = \bigvee M$  ist.

- Falls  $r \geq n$  ist, dann gilt  $\delta^{k_i}(1) \leq \delta(1)$  wegen  $1 = \bigvee M$  und da  $\delta$  ordnungserhaltend ist. Dies impliziert wegen (ii)

$$\delta^{k_1}(1) \cdot \dots \cdot \delta^{k_r}(1) \leq \delta(1)^r \leq \delta(1)^n \leq j(-m).$$

Insgesamt ist also  $g(-kn) \leq j(-m)$ . Da  $m \in \mathbb{N}$  beliebig war, folgt

$$\bigwedge g(-\mathbb{N}_0) \leq \bigwedge j(-\mathbb{N}_0) = 0,$$

so dass  $g$  ausschöpfend ist. □

### Satz 8.24

Es sei  $M \in \mathcal{P}Mon_{\mathbb{W}}$  ein partiell geordnetes Monoid mit  $\bigvee M = 1$  und den Eigenschaften

- (i) Für alle absteigend filtrierten Teilmengen  $S \subseteq M$  und alle  $x \in M$  gilt  $x \vee \bigwedge S = \bigwedge_{s \in S} (x \vee s)$ .
- (ii) Es gibt eine ausschöpfende Filtrierung  $j \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon}(-\mathbb{N}_0, M)$ , so dass  $M_{\geq j(-k)}$  endlich ist für  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Falls  $\delta$  nilpotent ist und es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\delta^n(1) \leq j(-1)$  gibt, dann existiert auch eine endlich erzeugte,  $\delta$ -invariante, ausschöpfende Filtrierung  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, M)$ .

*Beweis.* Nach Lemma 8.23 gibt es unter diesen Voraussetzungen zunächst eine  $\delta$ -invariante, ausschöpfende Filtrierung  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, M)$ . Wegen Lemma 8.22 gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $f(-m) \leq j(-2)$ . Da  $f$  nach Voraussetzung  $\delta$ -invariant ist, gilt

- $\delta(1) = \delta \circ f(0) \leq f(-1) \leq j(-1) \vee f(-1)$ .
- $\delta(j(-1) \vee f(-1)) \leq \delta(1) = \delta \circ f(0) \leq \delta \circ f(-1)$ .
- $\delta \circ f(-m) \leq f(-m) \leq j(-2) = j(-1)^2 \leq (f(-1) \vee j(-1))^2$ .

Damit genügen die Elemente  $j(-2) \vee f(-1) \geq f(-2) \geq f(-3) \geq \dots \geq f(-m)$  wegen der  $\delta$ -Invarianz von  $f$  den Bedingungen aus Lemma 8.21 und erzeugen eine endlich erzeugte  $\delta$ -invariante Filtrierung. □

## 8.5 Idealspektra von Monoiden

So wie man für Ringe das Idealspektrum als partiell geordnetes Monoid erhält, kann man diese Konstruktion auch analog für beliebige Monoide jeder monoidalen Kategorie durchführen. Satz 8.25 zeigt die Funktorialität dieser Konstruktion und liefert ein weiteres Beispiel für das Vorkommen von Filtrierungen. Für den späteren Anwendungsfall ist jedoch lediglich der Spezialfall für (pseudokompakte) noethersche Ringe interessant.

**Satz 8.25**

Es sei  $(\mathcal{D}, \boxtimes, E)$  eine monoidale Kategorie,  $\mathcal{D}$  besitze Faserprodukte und sei wellpowered und  $(\text{Epi}, \text{Mono})$ -strukturiert. Weiterhin sei  $M \in \mathcal{D}\text{-Mon}$  ein Monoid und die Endofunktoren  $(X \boxtimes -)$  und  $(- \boxtimes X)$  auf  $\mathcal{D}$  erhalten Epimorphismen für alle  $X \in M\text{-}\mathcal{D}\text{-}M$ . Dann gilt:

- (i) In kanonischer Weise ist  $U_{M\text{-}\mathcal{D}\text{-}M}(M) \in \mathcal{P}\text{Mon}$  mit  $\bigvee U_{M\text{-}\mathcal{D}\text{-}M}(M) = 1$ , wobei  $U_{M\text{-}\mathcal{D}}(M)$  die Menge der Unterobjekte von  $M$  ist, aufgefasst als Objekt in  $M\text{-}\mathcal{D}\text{-}M$  (vgl. Definition 2.22).
- (ii) Falls der Funktor  $M\text{-}\mathcal{D}\text{-}M \xrightarrow{f\text{-}\mathcal{D}\text{-}f} N\text{-}\mathcal{D}\text{-}N$  aus Bemerkung 3.13 für alle  $M, N \in \mathcal{D}\text{-}Mon$  und alle  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}\text{-}Mon}(M, N)$  Monomorphismen respektiert, dann erhält man einen kontravarianten Funktor  $\mathcal{D}\text{-}Mon \xrightarrow{I} \mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}$ .

Über den Funktor  $N\text{-}\mathcal{D}\text{-}N \xrightarrow{f^\# := f\text{-}\mathcal{D}\text{-}f} M\text{-}\mathcal{D}\text{-}M$  aus Bemerkung 3.13 sei dazu  $I(f)([m]) = [f^\#(m)']$  für alle  $(N, N)$ -linearen Monomorphismen  $U_m \xrightarrow{m} N$ , wobei ein Apostroph den Pullback unter dem  $(M, M)$ -linearen Morphismus  $M \xrightarrow{f} f^\#(N)$  kennzeichne.

- (iii) Falls der Funktor  $M\text{-}\mathcal{D}\text{-}M \xrightarrow{f\text{-}\mathcal{D}\text{-}f} N\text{-}\mathcal{D}\text{-}N$  aus Bemerkung 3.13 für alle  $M, N \in \mathcal{D}\text{-}Mon$  und alle  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}\text{-}Mon}(M, N)$  Limiten erhält, dann respektiert  $I(f)$  beliebige Infima (falls diese existieren).

*Beachte:* Wegen (AHS06, Proposition 11.16) impliziert diese Voraussetzung für alle Monoidhomomorphismen die Voraussetzung von (ii). Außerdem kann man zeigen, dass dies immer erfüllt ist, wenn  $\mathcal{D}$  Differenzkokerne besitzt.

*Achtung:* Falls es keine kanonische  $(\text{Epi}, \text{Mono})$ -Faktorisierung zu jedem Morphismus in  $\mathcal{D}$  gibt, dann wird das Auswahlaxiom für Klassen benötigt.

*Beweis.*

- (i) Es sei  $\mathcal{M}_M$  die Klasse aller Monomorphismen in  $M\text{-}\mathcal{D}\text{-}M$  mit Zielbereich  $M$  ist versehen mit der Präordnung „ $\leq$ “ und der Äquivalenzrelation „ $\sim$ “ aus Bemerkung 2.21. Für einen Monomorphismus  $m \in \mathcal{M}_M$  bezeichne im Folgenden  $U_m$  seinen Quellbereich. Für zwei Monomorphismen  $m, n \in \mathcal{M}_M$  sei  $m \cdot n$  der Monomorphismus einer  $(\text{Epi}, \text{Mono})$ -Faktorisierung  $U_m \boxtimes U_n \xrightarrow{e_{m,n}} U_{m \cdot n} \xrightarrow{m \cdot n} M$  von  $\mu_M \circ (m \boxtimes n)$ . Nach Proposition 3.11 (i) ist in kanonischer Weise  $U_{m \cdot n} \in M\text{-}\mathcal{D}\text{-}M$  und  $m \cdot n$   $(M, M)$ -bilinear, so dass man eine zweistellige Verknüpfung

$$\mu : \mathcal{M}_M \times \mathcal{M}_M \longrightarrow \mathcal{M}_M, \quad (m, n) \longmapsto m \cdot n$$

mit folgenden Eigenschaften erhält:

- Es seien  $m_1, m_2, n \in \mathcal{M}_M$  mit  $m_1 \leq m_2$ , d.h. es gibt ein  $g$  mit  $m_1 = m_2 \circ g$ . Nach Definition von  $m_1 \cdot n$  und  $m_2 \cdot n$  kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g \boxtimes \text{id}_{U_n} & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 U_{m_1} \boxtimes U_n & \xrightarrow{m_1 \boxtimes n} & M \boxtimes M & \xleftarrow{m_2 \boxtimes n} & U_{m_2} \boxtimes U_n \\
 e_{m_1, n} \downarrow & & \downarrow \mu_M & & \downarrow e_{m_2, n} \\
 U_{m_1 \cdot n} & \xrightarrow{m_1 \cdot n} & M & \xleftarrow{m_2 \cdot n} & U_{m_2 \cdot n} \\
 & \dashrightarrow & \exists ! d & \dashrightarrow & 
 \end{array}$$

Der Morphismus  $d$  wird von der Diagonaleigenschaft für Faktorisierungen induziert. Folglich ist  $m_1 \cdot n = (m_2 \cdot n) \circ d$  und insbesondere  $m_1 \cdot n \leq m_2 \cdot n$ . Analog gilt  $n \cdot m_1 \leq n \cdot m_2$ .

- Für alle  $k, m, n \in \mathcal{M}_M$  betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \alpha_{U_k, U_m, U_n} & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 U_k \boxtimes (U_m \boxtimes U_n) & \xrightarrow{k \boxtimes (m \boxtimes n)} & M \boxtimes (M \boxtimes M) & \xrightarrow{\alpha_{M, M, M}} & (M \boxtimes M) \boxtimes M \xleftarrow{(k \boxtimes m) \boxtimes n} (U_k \boxtimes U_m) \boxtimes U_n \\
 \downarrow \text{id}_{U_k} \boxtimes e_{m, n} & & \downarrow \text{id}_M \boxtimes \mu_M & & \downarrow \mu_M \boxtimes \text{id}_M \\
 U_k \boxtimes U_{m \cdot n} & \xrightarrow{k \boxtimes (m \cdot n)} & M \boxtimes M & & M \boxtimes M \xleftarrow{(k \cdot m) \boxtimes n} U_{k \cdot m} \boxtimes U_n \\
 \downarrow e_{k, m \cdot n} & & \downarrow \mu_M & & \downarrow \mu_M \\
 U_{k \cdot (m \cdot n)} & \xrightarrow{k \cdot (m \cdot n)} & M & \xrightarrow{\text{id}_M} & M \xleftarrow{(k \cdot m) \cdot n} U_{(k \cdot m) \cdot n} \\
 & & & & \downarrow e_{k \cdot m, n}
 \end{array}$$

Der Mittelteil kommutiert nach Diagramm (i) aus Definition 3.3, da  $M$  ein Monoid ist. Die kleinen Quadrate kommutieren nach Konstruktion der Faktorisierungen und da  $U_k \boxtimes -$  bzw.  $- \boxtimes U_n$  Funktoren sind. Der obere Teil kommutiert aufgrund der Natürlichkeit von  $\alpha$ . Nach Voraussetzung erhalten diese beiden Funktoren außerdem Epimorphismen, so dass  $\text{id}_{U_k} \boxtimes e_{m, n}$  und  $e_{k, m} \boxtimes \text{id}_{U_n}$  epimorph sind. Damit sind auch  $e_{k, m \cdot n} \circ (\text{id}_{U_k} \boxtimes e_{m, n})$  und  $e_{(k \cdot m), n} \circ (e_{k, m} \boxtimes \text{id}_{U_n})$  epimorph und man erhält zwei (Epi, Mono)-Faktorisierungen

$$\begin{aligned}
 \mu_M \circ (\text{id}_M \boxtimes \mu_M) \circ (k \boxtimes (m \boxtimes n)) &= \underline{(k \cdot (m \cdot n))} \circ \underline{((e_{k, m \cdot n} \circ \text{id}_{U_k}) \boxtimes e_{m, n})} \\
 &= \underline{((k \cdot m) \cdot n)} \circ \underline{(e_{(k \cdot m), n} \circ (e_{k, m} \boxtimes \text{id}_{U_n}) \circ \alpha_{U_k, U_m, U_n})}.
 \end{aligned}$$

- Für alle  $m \in \mathcal{M}_M$  gibt es aufgrund der  $M$ -Linkslinearität von  $m$  eine kanonische (Epi, Mono)-Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc}
 M \boxtimes U_m & \xrightarrow{\text{id}_M \boxtimes m} & M \boxtimes M \\
 \mu_{U_m} \downarrow & & \downarrow \mu_M \\
 U_m & \xrightarrow{m} & M,
 \end{array}$$

wobei  $\mu_{U_m}$  epimorph ist, da  $\mu_{U_m} \circ (\eta_M \boxtimes \text{id}_M) = \lambda_{U_m}$  wegen des zweiten Diagramms aus Definition 3.5 (i) und da  $\lambda$  ein natürlicher Isomorphismus ist.

Wegen Punkt eins induziert  $\mu$  eine wohldefinierte, zweistellige Verknüpfung auf dem Idealspektrum  $U_{M-\mathcal{D}-M}(M) = \mathcal{M}_M / \sim$ , die nach Punkt zwei assoziativ ist und nach Punkt drei ein neutrales Element  $[\text{id}_M]$  besitzt. Insgesamt ist daher  $U_{M-\mathcal{D}-M}(M) \in \mathcal{P}Mon$  ein partiell geordnetes Monoid. Nach Definition der Halbordnung auf  $U_{M-\mathcal{D}-M}(M)$  ist  $[\text{id}_M]$  gleichzeitig sein globales Supremum.

- (ii) Um zu sehen, dass  $I$  auf Morphismen wohldefiniert ist, beachte zunächst, dass  $f^\#$  nach Voraussetzung Monomorphismen respektiert. Weiterhin gibt es für alle  $m, n \in \mathcal{M}_N$  mit  $m \leq n$  ein  $g$  mit  $m = n \circ g$ , so dass  $f^\#(m) = f^\#(n) \circ f^\#(g)$  und insbesondere  $f^\#(m) \leq f^\#(n)$  gilt. Wie im Beweis von 2.24 sieht man, dass ebenso Pullbacks die Präordnung „ $\leq$ “ respektieren, so dass schließlich auch  $f^\#(m)' \leq f^\#(n)'$  ist. Wegen Bemerkung 3.13 (ii) und

(iii) erfüllt  $I$  die Funktoreigenschaften. Bleibt zu zeigen, dass  $I(f)$  eine Filtrierung ist. Dazu seien  $m, n \in \mathcal{M}_N$ . Zunächst hat man die beiden Faserprodukt diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
 P_m = M \times_{f^\sharp(N)} f^\sharp(U_m) & \xrightarrow{\pi_m} & f^\sharp(U_m) \\
 \downarrow f^\sharp(m)' & & \downarrow f^\sharp(m) \\
 M & \xrightarrow{f} & f^\sharp(N)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 P_n = M \times_{f^\sharp(N)} f^\sharp(U_n) & \xrightarrow{\pi_n} & f^\sharp(U_n) \\
 \downarrow f^\sharp(n)' & & \downarrow f^\sharp(n) \\
 M & \xrightarrow{f} & f^\sharp(N)
 \end{array}$$

Durch Anwenden des Bifunktors  $-\boxtimes-$  auf deren Produkt erhält man ein kommutatives Quadrat, welches sich zu folgendem Diagramm ergänzen lässt

$$\begin{array}{ccccc}
 P_m \boxtimes P_n & \xrightarrow{\pi_m \boxtimes \pi_n} & f^\sharp(U_m) \boxtimes f^\sharp(U_n) & \xrightarrow{e_{m,n}} & f^\sharp(U_{m \cdot n}) \\
 \downarrow f^\sharp(m)' \boxtimes f^\sharp(n)' & & \downarrow f^\sharp(m) \boxtimes f^\sharp(n) & & \downarrow f^\sharp(m \cdot n) \\
 M \boxtimes M & \xrightarrow{f \boxtimes f} & f^\sharp(N) \boxtimes f^\sharp(N) & \xrightarrow{\mu_N} & f^\sharp(N) \\
 \downarrow \mu_M & & \downarrow f & & \downarrow f \\
 M & & M & & M
 \end{array}$$

$U_{f^\sharp(m)' \cdot f^\sharp(n)'}$   $\xrightarrow{e_{f^\sharp(m)', f^\sharp(n)'}}$   $M \boxtimes M$   $\xrightarrow{f \boxtimes f}$   $f^\sharp(N) \boxtimes f^\sharp(N)$   $\xrightarrow{\mu_N}$   $f^\sharp(N)$   $\xrightarrow{f}$   $M$   $\xrightarrow{f^\sharp(m \cdot n)'}$   $P_{m \cdot n}$

wobei  $P_{m \cdot n} = M \times_{f^\sharp(N)} f^\sharp(U_{m \cdot n})$  ist. Das rechte Quadrat ist kommutativ nach Konstruktion. Der Teil darunter ist kommutativ, da  $f$  ein Monoidhomomorphismus ist. Der linke untere Teil ist kommutativ nach Definition des Produkts auf  $\mathcal{M}_M$ . Der rechte untere Teil ist kommutativ, da er ein Faserprodukt diagramm ist. Damit kommutiert das gesamte Diagramm. Nach der Faserprodukteigenschaft existiert zunächst ein eindeutiges  $g$  und wegen der Diagonaleigenschaft von Faktorisierungen außerdem ein eindeutiges  $d$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 P_m \boxtimes P_n & \xrightarrow{\pi_m \boxtimes \pi_n} & f^\sharp(U_m) \boxtimes f^\sharp(U_n) & & \\
 \downarrow e_{f^\sharp(m)', f^\sharp(n)'} & \searrow \exists! g & \downarrow e_{m,n} & & \\
 U_{f^\sharp(m)' \cdot f^\sharp(n)'} & \xrightarrow{\exists! d} & P_{m \cdot n} & \xrightarrow{\quad} & f^\sharp(U_{m \cdot n}) \\
 \downarrow f^\sharp(m)' \cdot f^\sharp(n)' & & \downarrow f^\sharp(m \cdot n)' & & \downarrow m \cdot n \\
 M & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{f} & f^\sharp(N)
 \end{array}$$

Dies impliziert  $f^\sharp(m)' \cdot f^\sharp(n)' \leq f^\sharp(m \cdot n)'$  und folglich  $I(f)([m] \cdot [n]) \leq I(f)([m]) \cdot I(f)([n])$ , so dass  $I(f)$  schließlich das Axiom (F $\geq$ ) erfüllt.

$I(f)$  erfüllt außerdem (F1), da das nachfolgende Diagramm ein Faserprodukt diagramm ist.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & f^\sharp(N) \\
 \text{id}_M \downarrow & & \downarrow f^\sharp(\text{id}_N) = \text{id}_{f^\sharp(N)} \\
 M & \xrightarrow{f} & f^\sharp(N)
 \end{array}$$

(iii) Dies folgt unmittelbar aus Proposition 2.24.

□

### Definition 8.26

Es sei  $(\mathcal{D}, \boxtimes, E)$  eine monoidale Kategorie mit den Voraussetzungen aus Satz 8.25 und  $N \in \mathcal{P}\text{Mon}$  ein partiell geordnetes Monoid. Eine  **$N$ -Filtrierung** auf einem Monoid  $M \in \mathcal{D}\text{-Mon}$  ist eine Filtrierung  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}}(N, U_{M\text{-}\mathcal{D}\text{-}M}(M))$ .

### Beispiel 8.27

Die monoidale Kategorie  $(\text{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$  erfüllt die Voraussetzungen aus Satz 8.25, denn:

- $\text{Ab}$  ist vollständig, denn  $\text{Ab}$  besitzt Produkte und Differenzkerne.
- Die Unterobjekte einer abelschen Gruppe entsprechen bijektiv dessen Untergruppen (vgl. die ähnliche Argumentation für Moduln in Bemerkung 3.8). Diese bilden eine Teilmenge der Potenzmenge und  $\text{Ab}$  ist demnach wellpowered.
- Als abelsche Kategorie ist  $\text{Ab}$  nach Bemerkung 2.31 (Epi, Mono)-strukturiert.
- Für alle  $A \in \text{Ab}$  erhalten  $A \otimes_{\mathbb{Z}} -$  und  $- \otimes_{\mathbb{Z}} A$  Epimorphismen, da Tensorieren rechtsexakt ist.
- Für alle  $R, S \in \text{Ring} = \text{Ab}\text{-Mon}$  und alle  $f \in \text{Hom}_{\text{Ring}}(R, S)$  gibt es eine Adjunktion

$$\text{Hom}_{S\text{-Ab}\text{-}S}(S \otimes_R X \otimes_R S, Y) \cong \text{Hom}_{R\text{-Ab}\text{-}R}(X, (f\text{-Ab}\text{-}f)(Y)),$$

so dass  $f\text{-Ab}\text{-}f$  als Rechtsdjungierter nach (AHS06, Proposition 18.19) oder (Mac72, V.5 Satz 1) mit Limiten vertauscht.

Damit erfüllt  $(\text{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$  die Bedingungen aus Satz 8.25. Nach Bemerkung 3.8 kann  $U_{R\text{-Ab}\text{-}R}(R)$  für alle Ringe  $R \in \text{Ring} = \text{Ab}\text{-Mon}$  als die Menge aller Ideale von  $R$  aufgefasst werden und der Funktor  $\text{Ab}\text{-Mon} \xrightarrow{U_{R\text{-Ab}\text{-}R}} \mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}$  ordnet dann jedem Ringhomomorphismus  $R \xrightarrow{f} S$  die folgende Filtrierung zu:

$$U_{R\text{-Ab}\text{-}R}(f) : U_{S\text{-Ab}\text{-}S}(S) \longrightarrow U_{R\text{-Ab}\text{-}R}(R), \quad I \longmapsto f^{-1}(I)$$



## Kapitel 9

# Noethersche Monoidring-Konstruktionen

Möchte man (vollständige) (Schief-)Monoidringe in Bezug auf die Noether-Eigenschaft untersuchen, so bietet es sich an, den Begriff „noethersch“ auf die Kategorie der Monoide zu erweitern. Da es sich bei Monoiden und Ringen um monoidale Kategorien handelt, kann auch ganz allgemein der Begriff eines noetherschen Monoids (einer monoidalen Kategorie) eingeführt werden, der sich auf die Struktur eines  $M$ -Objekts über einem Monoid  $M$  einer beliebigen monoidalen Kategorie bezieht. Wie in Kapitel 2 Abschnitt 2.4.2 gezeigt, macht es in abelschen Kategorien keinen Unterschied, ob man Unterobjekte oder Quotienten betrachtet. Im Gegensatz zur Kategorie der abelschen Gruppen  $Ab$  ist jedoch die Kategorie der Mengen  $Set$  nicht abelsch. Daher wird man gezwungen sein Unterobjekte und Quotienten in der Kategorie der  $M$ -Mengen über einem (Mengen-)Monoid  $M$  zu unterscheiden. Auf diese Weise motiviert werden für  $M$ -Objekte allgemeiner monoidaler Kategorien zwei „Noether“-Begriffe definiert, die im Fall einer abelschen monoidalen Kategorie übereinstimmen. Während sich der eine auf die Unterobjekte bezieht, bezieht sich der andere auf die Quotienten eines  $M$ -Objekts. Für den Fall der (Mengen-)Monoide wird man sehen, dass zumindest einer der beiden Begriffe den anderen impliziert, da die in Proposition 2.28 aus Kapitel 2 angegebene Vergleichsabbildung zwischen Unterobjekten und Quotienten injektiv ist.

### 9.1 Noethersche Monoide

Hier werden (ko-)noethersche  $M$ -Objekte einer beliebigen monoidalen Kategorie definiert und einige Eigenschaften abgeleitet, die aus kommutativen Algebra für Ringe bereits bekannt sind.

#### Definition 9.1

Es sei  $(\mathcal{D}, \boxtimes, E)$  eine monoidale Kategorie.  $\mathcal{D}$  sei wellpowered und co-wellpowered. Weiterhin sei  $M \in \mathcal{D}\text{-Mon}$  ein Monoid.

- (i) Eine partiell geordnete Menge  $P$  heißt **noethersch**, wenn jede aufsteigende Kette  $p_1 \leq p_2 \leq \dots$  stationär wird.
- (ii) Ein  $M$ -Linksobjekt  $S \in M\text{-}\mathcal{D}$  heißt **noethersch**, wenn die partiell geordnete Menge  $U(S)$  der  $M\text{-}\mathcal{D}$ -Unterobjekte von  $S$  noethersch ist. Analog seien auch noethersche  $M$ -Rechtsobjekte definiert.

- (iii) Ein  $M$ -Linksobjekt  $S \in M\text{-}\mathcal{D}$  heißt **konoethersch**, wenn die partiell geordnete Menge  $Q(S)$  der  $M\text{-}\mathcal{D}$ -Quotienten von  $S$  noethersch ist (vgl. Definition 2.22). Analog seien auch konoethersche  $M$ -Rechtsobjekte definiert.
- (iv)  $M$  ist **links-/rechts(-ko-)noethersch**, wenn  $M$  aufgefasst als  $M$ -Links-/Rechtsobjekt (ko-)noethersch ist.  $M$  heißt **(ko-)noethersch**, wenn  $M$  links- und rechts(-ko-)noethersch ist.

Ein Monoid  $M \in \mathcal{D}\text{-Mon}$  oder ein  $M$ -Linksobjekt ist immer auch gleichzeitig ein Objekt in  $\mathcal{D}$ . Um Verwechslungen zu vermeiden, schreibe im Folgenden die betreffende Kategorie als Index an  $U$  bzw.  $Q$ .

### Bemerkung 9.2

Für die monoidale Kategorie  $(\text{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$  und einen Ring  $R \in \text{Ab-Mon}$  ist  $R\text{-Ab} = R\text{-Mod}$  (vgl. Bemerkung 3.8) eine abelsche Kategorie.

- (i) Nach Bemerkung 3.8 gibt es eine ordnungserhaltende Bijektion zwischen der Menge der  $R$ -Untermoduln von  $M$  mit der Halbordnung „ $\subseteq$ “ und der halbgeordneten Menge  $U_{R\text{-Ab}}(M)$ .
- (ii) Wegen Proposition 2.32 ist  $M \in R\text{-Ab}$  genau dann noethersch, wenn  $M$  konoethersch ist.

Insbesondere stimmt die Definition von „(ko-)noethersch“ mit der klassischen Definition von „noethersch“ für  $R$ -Moduln überein.

### Bemerkung 9.3

Es seien  $P, Q \in \text{Pos}$  zwei partiell geordnete Mengen.

- (i)  $P$  ist genau dann noethersch, wenn jede Teilmenge  $T \subseteq P$  ein maximales Element besitzt.
- (ii) Ist  $P \xrightarrow{\iota} Q$  eine ordnungserhaltende Injektion, dann ist  $P$  noethersch, falls  $Q$  noethersch ist.

*Beweis.*

- (i) Die Äquivalenz folgt direkt aus Zorns Lemma wie im bekannten Beweis aus der kommutativen Algebra.
- (ii) Jede aufsteigende Kette  $p_1 \leq p_2 \leq \dots$  in  $P$  bildet eine aufsteigende Kette  $\iota(p_1) \leq \iota(p_2) \leq \dots$  in  $Q$ , die stationär wird, da  $Q$  noethersch ist. Aufgrund der Injektivität von  $\iota$  wird dann auch  $p_1 \leq p_2 \leq \dots$  stationär.

□

### Korollar 9.4

Es seien  $(\mathcal{D}, \boxtimes, E)$  eine monoidale Kategorie,  $\mathcal{D}$  sei wellpowered, co-wellpowered und  $(\text{Epi}, \text{Mono})$ -strukturiert. Weiterhin sei  $M \in \mathcal{D}\text{-Mon}$  ein Monoid und  $X \xrightarrow{f} Y$  ein  $M$ -linkslinearer Morphismus zwischen zwei  $M$ -Linksobjekten  $X, Y \in M\text{-}\mathcal{D}$ . Aus Bemerkung 9.3 und Korollar 2.27 resultiert:

- (i) Ist  $Y$  konoethersch und  $f$  monomorph, dann ist auch  $X$  konoethersch.
- (ii) Ist  $X$  noethersch und  $f$  epimorph, dann ist auch  $Y$  noethersch.



## 9.2 Noethersche (Mengen-)Monoide

Hier wird analysiert, was es für (Mengen-)Monoide bedeutet, noethersch zu sein. Für abelsche Monoide  $M$  und kommutative Ringe  $R$  ist ein direkter Zusammenhang zwischen der Noether-Eigenschaft des Monoidrings  $R[M]$  und der von  $M$  und  $R$  bekannt.

### 9.2.1 Noethersche Monoide

#### Bemerkung 9.5

Es sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein Monoid.

Falls  $R[M]$  (links-/rechts-)noethersch ist, dann sind  $R$  und  $M$  (links-/rechts-)noethersch.

*Beweis.*

- Es gibt eine kanonische Abbildung

$$\iota_M : Q_{M\text{-Set}}(M) \hookrightarrow Q_{R[M]\text{-Ab}}(R[M]), \quad S \mapsto I_S = \sum_{(m,n) \in S} R \cdot (m - n),$$

wobei  $Q_{M\text{-Set}}(M)$  wie in Bemerkung 3.9 als partiell geordnete Menge aller linksmultiplikativen Äquivalenzrelationen von  $M$  und  $Q_{R[M]\text{-Ab}}(R[M])$  wie in Bemerkung 3.8 als Menge aller Linksideale von  $R[M]$  aufgefasst wird. Aufgrund der Linksmultiplikativität aller  $S \in Q_{M\text{-Set}}(M)$  ist  $I_S$  ein Linksideal von  $R[M]$ , so dass  $\iota$  wohldefiniert ist. Per Konstruktion ist  $\iota_M$  ordnungserhaltend. Für alle  $S \in Q_{M\text{-Set}}(M)$  ist der Durchschnitt der von  $I_S$  erzeugten Äquivalenzrelation auf  $R[M]$  mit  $M \times M$  wieder  $S$ , so dass  $\iota_M$  injektiv ist.

- Analog erhält man eine kanonische Inklusion

$$\iota_R : Q_{R\text{-Ab}}(R) \hookrightarrow Q_{R[M]\text{-Ab}}(R[M]), \quad I \mapsto \bigoplus_{m \in M} I \cdot m,$$

wobei  $\iota_R$  injektiv ist, da  $\iota_R(I) \cap R = I$  ist für alle  $I \in Q_{R\text{-Ab}}(R)$ .

Nach Bemerkung 9.3 sind  $R$  und  $M$  linksnoethersch, falls  $R[M]$  linksnoethersch ist. Analog zeigt man die Vererbung für den rechtsnoetherschen Fall. □

#### Korollar 9.6

Es seien  $N \leq M$  zwei Monoide, wobei  $\mathbb{Z}[N]$  noethersch ist. Weiterhin gebe es ein  $t \in M$ , so dass  $M$  von  $t$  und  $N$  erzeugt wird und  $tN = Nt$  gilt.

Dann ist  $\mathbb{Z}[M]$  und insbesondere wegen Bemerkung 9.5 auch  $M$  noethersch.

*Beweis.* Nach Voraussetzung wird  $\mathbb{Z}[M]$  von  $\mathbb{Z}[N]$  und  $t$  erzeugt und es gilt  $tR[N] + R[N] = R[N]t + R[N]$  wegen  $tN = Nt$ . Nach einer Variante von Hilberts Basissatz (MR01, Theorem I.2.10) ist dann  $\mathbb{Z}[M]$  noethersch. □

#### Satz 9.7

Ein abelsches Monoid ist genau dann noethersch, wenn es endlich erzeugt ist.

*Beweis.* Ist  $A = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$  ein endlich erzeugtes, abelsches Monoid, dann erhält man eine Surjektion

$$\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_r] \longrightarrow \mathbb{Z}[A], \quad X_i \longmapsto a_i,$$

so dass nach Hilberts Basissatz  $\mathbb{Z}[A]$  und wegen Bemerkung 9.5 auch  $A$  noethersch ist. Umgekehrt ist jedes noethersche Monoid auch eine noethersche Halbgruppe und nach (Bro03, Theorem 2.3) daher endlich erzeugt. □

### Korollar 9.8

Für einen beliebigen Ring  $R$  und ein abelsches Monoid  $M$  gilt:

$R[M]$  ist genau dann (links-/rechts-)noethersch, wenn  $R$  und  $M$  dies sind.

*Beweis.* Ist  $R[M]$  linksnoethersch, so auch  $R$  und  $M$  nach Bemerkung 9.5. Sind umgekehrt  $R$  und  $M$  linksnoethersch, dann ist  $M$  nach Satz 9.7 endlich erzeugt. Also gibt es  $m_1, \dots, m_n \in M$  mit  $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ . Nach Hilberts Basissatz ((MR01, Theorem I.2.10)) ist der Polynomring  $R[X_1, \dots, X_n]$  linksnoethersch und damit auch  $R[M]$ , da es folgenden Ringepimorphismus gibt:

$$R[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow R[M], \quad r \longmapsto r, \quad X_i \longmapsto m_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

□

### 9.2.2 Konoethersche (Mengen-)Monoide

Hier wird der schwächere Begriff „konoethersch“ für (Mengen-)Monoide analysiert. Da Ideale einfacher zu handhaben sind als Kongruenzen, erhält man notwendige Bedingungen dafür, wann ein Monoid noethersch ist. Man beachte jedoch, dass jede Gruppe konoethersch ist.

#### Bemerkung 9.9

Es sei  $M$  ein Monoid und  $I \triangleleft M$  ein Links-/Rechtsideal. Für  $m, n \in M$  sei  $mS_I n$ , falls  $m = n$  oder  $m, n \in I$ . Dann gilt

(i)  $S_I$  ist eine links-/rechtsmultiplikative Äquivalenzrelation auf  $M$  und für alle  $m \in M$  gilt:

$$[m] = \begin{cases} I & m \in I \\ \{m\} & m \notin I \end{cases}$$

(ii) Sind  $I \subseteq J$  zwei Links-/Rechtsideale in  $M$ , dann ist  $S_I \subseteq S_J$ . Falls  $S_I = S_J$ , dann ist  $I = J$ , so dass die Zuordnung  $I \longmapsto S_I$  eine injektive Abbildung induziert.

Die Zuordnung  $I \longmapsto S_I$  entspricht per Konstruktion der Abbildung aus Proposition 2.28.

*Beweis.*

(i) Die Idealeigenschaft von  $I$  impliziert, dass  $S_I$  eine links-/rechtsmultiplikative Äquivalenzrelation auf  $M$  definiert.

(ii) Dies folgt aus der Beschreibung der Äquivalenzklassen in (i). □

**Bemerkung 9.10**

Es gilt:

- (i) Jede Gruppe ist ein konoethersches Monoid.
- (ii) Jedes noethersche Monoid ist auch konoethersch.
- (iii) Es sei  $M \xrightarrow{f} N$  ein Monoidhomomorphismus.  
Ist  $M$  (links-/rechts-)konoethersch, dann ist auch  $N$  (links-/rechts-)konoethersch.

*Beweis.*

- (i) Jede Gruppe  $G$  besitzt nur die beiden (Links-/Rechts-)Ideale  $\emptyset$  und  $G$ .
- (ii) Dies folgt unmittelbar aus Bemerkung 9.9 (ii) und Bemerkung 9.3 (ii).
- (iii)  $f^{-1}$  bildet Idealketten in  $N$  auf Idealketten in  $M$  ab und respektiert echte Inklusionen, da  $f$  surjektiv ist. Ist  $N$  nicht noethersch, dann gibt es eine aufsteigende Kette, die nicht stationär wird. Das Urbild unter  $f$  ist dann eine Kette in  $M$ , die nicht stationär wird, so dass auch  $M$  nicht noethersch ist.

□

**Beispiel 9.11**

Im Gegensatz zum abelschen Fall (vgl. Satz 9.7) sind im Allgemeinen endlich erzeugte Monoide weder noethersch, noch konoethersch. Ebenso wenig muss ein konoethersches Monoid endlich erzeugbar sein.

- (i) Das freie Monoid in einem Erzeuger  $\langle a \rangle$  ist abelsch und damit (ko-)noethersch.
- (ii) Das freie Monoid in zwei Erzeugern  $\langle a, b \rangle$  ist nicht (ko-)noethersch, denn

$$(aa) \subsetneq (aa, aba) \subsetneq (aa, aba, ab^2a) \subsetneq \dots \subsetneq (aa, aba, \dots, ab^k a) \subsetneq \dots$$

ist eine unendliche, echt aufsteigende Kette von Idealen.

- (iii)  $(\mathbb{N}_0, \vee)$  ist abelsch, konoethersch und versehen mit der diskreten Topologie eigentlich, aber nicht endlich erzeugbar, insbesondere wegen Satz 9.7 nicht noethersch.

**9.3 Noethersche Schiefpotenzreihenringe**

Nun werden schließlich Schiefpotenzreihenringe in Bezug auf die Noether-Eigenschaft untersucht. Während man für Potenzreihenringe in endlichen vielen Variablen durch eine verallgemeinerte Form des Hilbertschen Basissatzes starke Kriterien erhält, erweist sich der Nachweis dieser Eigenschaft für Schiefpotenzreihenringe als weitaus schwieriger. Daher kann an dieser Stelle nur für den Spezialfall von pseudokompakten, noetherschen Koeffizientenringen eine Bedingung angegeben werden, wann der Schiefpotenzreihenring noethersch ist. Neben der starken Bedingung an den Ring, hat man ebenfalls eine weitere Bedingung an die beteiligte  $\sigma$ -Derivation, die über das Existenzkriterium für Schiefpotenzreihenringe hinaus geht.

### 9.3.1 Noethersche Schiefpotenzreihenringe

Ein filtrierter, vollständiger Ring ist noethersch, wenn der zu dieser Ideal-Filtrierung assoziierte, graduierte Ring noethersch ist. Dieses Kriterium soll auch für Schniefpotenzreihenringe benutzt werden. Dazu wird in diesem Abschnitt eine Methode vorgestellt, wie aus einer Filtrierung mit gewissen Invarianz-Eigenschaften unter  $\sigma$  und  $\delta$  eine Filtrierung auf dem Schiefpotenzreihenring induziert wird. Der graduierte Ring des auf diese Weise filtrierten Schiefpotenzreihenrings ist dann der Polynomring über dem graduierten Ring des Koeffizientenrings. Diese Methode ist bereits aus (SV06) bekannt, wurde dort jedoch nur für eine ganz spezielle Filtrierung betrachtet. Spätere Ergebnisse zeigen, dass man mehr Resultate erhält, wenn man auch andere Filtrierungen zulässt.

#### Definition 9.12

Es sei  $R$  ein Ring. Führe folgende abkürzende Schreibweisen ein.

- (i) Es sei  $\mathcal{I}(R) = U_{R\text{-Ab-}R}(R)$  das Idealspektrum von  $R$ ,
- (ii) Für eine Filtrierung  $I \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, \mathcal{I}(R))$  schreibe kurz  $I_k = I(-k)$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , d.h.  $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$  ist eine absteigende Kette von Idealen mit  $I_0 = R$  und  $I_k \cdot I_l \subseteq I_{k+l}$  für alle  $k, l \in \mathbb{N}_0$ .
- (iii) Jede Filtrierung  $I \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, \mathcal{I}(R))$  induziert den **graduierten Ring**  $\text{gr}_I R = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} I_k / I_{k+1}$  mit der Multiplikation gegeben durch  $(x + I_{k+1}) \cdot (y + I_{l+1}) = (xy + I_{k+l+1})$  für alle  $x \in I_k, y \in I_l$  und  $k, l \in \mathbb{N}_0$ .

#### Proposition 9.13

Es seien  $R \in \mathcal{TRing}_{U,C}$  ein topologischer, vollständiger Ring,  $\sigma \in \text{Aut}_{\mathcal{TRing}}(R)$  und  $\delta$  eine stetige,  $\sigma$ -nilpotente  $\sigma$ -Derivation. Für  $i, j \in \mathbb{N}_0$  sei  $M_{i,j}(X, Y)$  die Summe aller nicht-kommutativen Monome in zwei Variablen  $X$  und  $Y$  mit  $i$  Faktoren in  $X$  und  $j$  Faktoren in  $Y$ . Dann gilt:

- (i) Für alle  $a \in R$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $t^n \cdot a = \sum_{k=0}^n M_{n-k,k}(\delta, \sigma)(a) \cdot t^k$ .
- (ii) Für  $f, g \in R[[t; \sigma, \delta]]$  mit  $f = \sum_{i \geq 0} a_i \cdot t^i$  und  $g = \sum_{j \geq 0} b_j \cdot t^j$  gilt:

$$f \cdot g = \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{0 \leq j \leq i, k} a_i \cdot M_{i-j,j}(\delta, \sigma)(b_{k-j}) \right) t^k$$

*Beweis.*

- (i) Die angegebene Formel stimmt für  $n = 0$ . Für  $n = 1$  ist  $t \cdot a = \sigma(a)t + \delta(a)$  ebenfalls

korrekt. Angenommen sie stimmt für  $n$ , dann gilt

$$\begin{aligned}
 t^n \cdot a &= \sum_{k=0}^n t \cdot M_{n-k,k}(\delta, \sigma)(a) \cdot t^k \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \sigma \circ M_{n+1-k,k-1}(\delta, \sigma)(a) \cdot t^k + \sum_{k=0}^n \delta \circ M_{n-k,k}(\delta, \sigma)(a) \cdot t^k \\
 &= \sigma \circ \sigma^n(a)t^{n+1} + \delta \circ \delta^n(a) + \sum_{k=1}^n \underbrace{(\sigma \circ M_{n+1-k,k}(\delta, \sigma) + \delta \circ M_{n-k,k}(\delta, \sigma))}_{=M_{n+1-k,k}(\delta, \sigma)}(a) \cdot t^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} M_{n+1-k,k}(\delta, \sigma)(a) \cdot t^k,
 \end{aligned}$$

so dass die Formel auch für  $n + 1$  stimmt. Per Induktion stimmt sie dann für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

(ii) Mit der in (i) gezeigten Formel gilt:

$$\begin{aligned}
 f \cdot g &= \sum_{i,m \geq 0} a_i \cdot t^i \cdot b_m \cdot t^m = \sum_{i,m \geq 0} a_i \cdot \sum_{j=0}^i M_{i-j,j}(\delta, \sigma)(b_m) \cdot t^{j+m} \\
 &= \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^{\min(i,k)} a_i \cdot M_{i-j,j}(\delta, \sigma)(b_{k-j}) \right) t^k = \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{0 \leq j \leq i, k} a_i \cdot M_{i-j,j}(\delta, \sigma)(b_{k-j}) \right) t^k
 \end{aligned}$$

□

### Proposition 9.14

Es sei  $R$  ein Ring. Dann operiert  $\text{End}_{\mathcal{A}b}(R, +)$  durch folgenden Monoidhomomorphismus auf  $\mathcal{I}(R)$ :

$$\phi : \text{End}_{\mathcal{A}b}(R, +) \longrightarrow \text{End}_{\mathcal{P}os_{\leq, \omega}}(\mathcal{I}(R)), \quad f \longmapsto [I \longmapsto (f(I))]$$

Weiterhin gilt:

- (i) Ist  $\sigma \in \text{End}_{\mathcal{R}ing}(R)$ , dann ist  $\phi(\sigma) \in \text{End}_{\mathcal{P}Mon_{\leq, \omega}}(\mathcal{I}(R))$ .
- (ii) Ist  $\sigma \in \text{End}_{\mathcal{R}ing}(R)$ ,  $\mathcal{I}(R)^\sigma = \{I \in \mathcal{I}(R); \phi(\sigma)(I) = I\}$  das Fixmonoid unter  $\sigma$  und  $\delta \in \text{End}_{\mathcal{A}b}(R, +)$  eine  $\sigma$ -Derivation, dann ist  $\phi(\delta)|_{\mathcal{I}(R)^\sigma}$  eine Derivation auf  $\mathcal{I}(R)^\sigma$ .

*Beweis.* Da jedes  $f \in \text{End}_{\mathcal{A}b}(R, +)$  eine Abbildung ist, ist  $\phi(f)$  ordnungserhaltend. Für alle  $S \subseteq \mathcal{I}(R)$  ist

$$\phi(f) \left( \bigvee S \right) = \left( f \left( \sum_{I \in S} I \right) \right) = \left( \sum_{I \in S} f(I) \right) = \sum_{I \in S} (f(I)) = \bigvee \phi(f)(S),$$

so dass  $f$  Suprema respektiert. Sind  $f, g \in \text{End}_{\mathcal{A}b}(R, +)$ , dann gilt für alle  $I \in \mathcal{I}(R)$ , dass

$$\phi(f \circ g)(I) = (f \circ g)(I) = (f((g(I)))) = \phi(f) \circ \phi(g)(I),$$

so dass  $\phi$  multiplikativ ist. Außerdem ist  $\phi(\text{id}_R)(I) = (I) = I$ , so dass  $\phi$  ein Monoidhomomorphismus ist.

- (i) Für alle  $I, J \in \mathcal{I}(R)$  ist  $\phi(\sigma)(I \cdot J) = (\sigma(I) \cdot \sigma(J)) \subseteq (\sigma(I)) \cdot (\sigma(J)) = \phi(\sigma)(I) \cdot \phi(\sigma)(J)$ .
- (ii) Für alle  $I, J \in \mathcal{I}(R)^\sigma$  ist nach Definition der Idealmultiplikation und nach Definition einer  $\sigma$ -Derivation

$$\phi(\delta)(I \cdot J) = (\delta(I \cdot J)) \subseteq (I \cdot \delta(J) + \delta(I) \cdot \sigma(J)) \subseteq I \cdot (\delta(J)) + (\delta(J)) \cdot (\sigma(J)),$$

da  $\phi(\sigma)(J) = (\sigma(J)) = J$  ist, so dass  $\phi(\delta)|_{\mathcal{I}(R)^\sigma}$  eine Derivation auf  $\mathcal{I}(R)^\sigma$  ist.

□

**Lemma 9.15**

Es seien  $R \in \text{Ring}$  ein Ring und  $I \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, \mathcal{I}(R))$  eine ausschöpfende Filtrierung mit  $R \cong \varprojlim_{k \geq 0} R/I_k$ .

Ist  $\text{gr}_I R$  links-noethersch, dann ist auch  $R$  links-noethersch.

*Beweis.* Betrachte  $R$  versehen mit der Topologie erzeugt von den  $I_k$ . Dann ist  $R$  nach Voraussetzung ein projektiver Limes diskreter Ringe und damit nach Lemma 6.2 vollständig. Zur Vereinfachung der Notation definiere  $I_k = R$  für alle  $k \in -\mathbb{N}_0$ . Es sei  $N \leq R$  ein  $R$ -Linksuntermodul von  $R$ . Dann bilden  $J_k = N \cap I_k$  für  $k \geq 0$  in  $N$  eine Umgebungsbasis der 0 und  $\text{gr}_J N = \bigoplus_{k \geq 0} J_k/J_{k+1} \leq \text{gr}_I R$  ist ein endlich erzeugter  $\text{gr}_I R$ -Linksmodul, da  $\text{gr}_I R$  linksnoethersch ist. Folglich existieren  $x_i \in J_{n_i}$  mit  $n_i \in \mathbb{N}_0$  für  $i = 1, \dots, r$ , so dass  $\text{gr}_J N = \sum_{i=1}^r (\text{gr}_I R)(x_i + J_{n_i+1})$  bzw.  $J_k/J_{k+1} = \sum_{i=1}^r I_{k-n_i}(x_i + J_{n_i+1})$  nach Definition der Ring-Struktur auf  $\text{gr}_I R$  bzw. der Modulstruktur auf  $\text{gr}_J N$ . Dies impliziert

$$J_k = \sum_{i=1}^r I_{k-n_i} \cdot x_i + J_{k+1}.$$

Es sei nun  $F = \bigoplus_{i=1}^r Re_i \cong R^r$  der freie  $R$ -Linksmodul in  $r$  Erzeugern versehen mit der Produkttopologie und  $F \xrightarrow{f} N$  die  $R$ -linkslineare Abbildung, definiert durch  $f(e_i) = x_i$ . Dann gilt für alle  $k \geq 0$ , dass

$$f \left( \bigoplus_{i=1}^r I_{k-n_i} e_i \right) = \sum_{i=1}^r I_{k-n_i} x_i \subseteq J_k.$$

Insbesondere ist  $f$  stetig bei 0 und wegen (War93, I Theorem 5.18) insgesamt stetig.

Es sei  $x \in N = J_0$ . Konstruiere induktiv eine Folge  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  in  $F$  der Art, dass  $(f(y_k))_k$  gegen  $x$  konvergiert.

- Setze  $y_0 = 0$ . Dann ist  $x - f(y_0) \in J_0$ .
- Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $x - f(y_k) \in J_k$  gibt es dann  $a_i \in I_{k-n_i}$  für  $1 \leq i \leq r$ , so dass

$$x - f(y_k) + J_{k+1} = \sum_{i=1}^r a_i \cdot x_i + J_{k+1}.$$

Setzt man  $y_{k+1} := y_k + \sum_{i=1}^r a_i \cdot e_i$ , dann ist  $x - f(y_{k+1}) \in J_{k+1}$ .

Es sei  $n = \max(n_1, \dots, n_r)$ . Nach Konstruktion ist  $y_{k+1} - y_k \in I_{k-n}$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Insbesondere ist  $(y_k)_k$  eine Cauchy-Folge in  $F$  und konvergiert gegen ein  $y \in F$ , da  $F$  nach (War93, II. Theorem 7.8(2)) vollständig ist. Nach Konstruktion konvergiert  $(f(y_k))_k$  gegen  $x$ , so dass  $f(y) = x$  ist aufgrund der Stetigkeit von  $f$ . Damit ist  $f$  surjektiv und folglich  $N$  endlich erzeugt. <sup>1</sup>

□

<sup>1</sup>Die Ideen für diesen Beweis stammen aus den Beweisteilen von (NVO79, I.5.7 Corollary).

**Satz 9.16**

Es seien  $R \in \mathcal{TRing}_{U,C}$  ein topologischer, vollständiger Ring,  $\sigma \in \text{Aut}_{\mathcal{TRing}}(R)$  und  $\delta$  eine stetige,  $\sigma$ -nilpotente  $\sigma$ -Derivation. Weiterhin sei  $\mathcal{I}(R)^\sigma$  das Fixmonoid unter  $\sigma$ . Jede  $\phi(\delta)$ -invariante Filtrierung  $I \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, \mathcal{I}(R)^\sigma)$  erzeugt durch

$$J_k = \prod_{i \in \mathbb{N}_0} I_{k-i} \cdot t^i \quad \text{mit } I_k := R \quad \text{für } k < 0$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  eine Filtrierung  $J \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, \mathcal{I}(R[[t; \sigma, \delta]]))$  auf dem von  $\sigma$  und  $\delta$  induzierten Schiefpotenzreihenring  $R[[t; \sigma, \delta]]$ .

Daraus lassen sich folgende Eigenschaften ableiten:

- (i) Ist  $I$  ausschöpfend, dann ist auch  $J$  ausschöpfend.
- (ii) Es gibt einen Ringisomorphismus  $\text{gr}_J R[[t; \sigma, \delta]] \cong (\text{gr}_I R)[\bar{t}; \bar{\sigma}]$ , wobei  $\bar{\sigma}$  der von  $\sigma$  auf  $\text{gr}_I R$  induzierte Ringendomorphismus ist.  
Beachte: Falls  $\sigma$  automorph ist, dann ist auch  $\bar{\sigma}$  automorph.
- (iii) Ist  $I$  ausschöpfend und  $\text{gr}_I R$  noethersch, dann sind auch  $\text{gr}_J R[[t; \sigma, \delta]]$  und  $R[[t; \sigma, \delta]]$  noethersch.

*Beweis.* Es seien  $f, g \in R[[t; \sigma, \delta]]$  mit  $f = \sum_{i \geq 0} a_i \cdot t^i$  und  $g = \sum_{j \geq 0} b_j \cdot t^j$ . Ist  $f \in J_m$  und  $g \in J_n$  für  $m, n \in \mathbb{N}_0$ , dann ist nach Proposition 9.13

$$f \cdot g = \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{0 \leq j \leq i, k} a_i \cdot M_{i-j, j}(\delta, \sigma)(b_{k-j}) \right) t^k$$

und aufgrund der  $\delta$ -Invarianz, des Filtrierungsaxioms ( $F \geq$ ) und  $\sigma(I_k) = I_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$a_i \cdot M_{i-j, j}(\delta, \sigma)(b_{k-j}) \in I_{m-i} \cdot M_{i-j, j}(\delta, \sigma)(I_{n-(k-j)}) \subseteq I_{m-i} \cdot I_{n-(k-j)+(i-j)} \subseteq I_{m+n-k}$$

für alle  $0 \leq j \leq i, k$ . Insbesondere ist  $f \cdot g \in J_{m+n}$ . Wegen  $J_0 = R[[t; \sigma, \delta]]$  impliziert  $m = 0$  bzw.  $n = 0$ , dass alle  $J_k$  Ideale sind und  $J$  damit eine Idealfiltrierung auf  $R[[t; \sigma, \delta]]$  ist.

- (i) Ist  $I$  ausschöpfend, dann ist

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} J_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \left( \prod_{i \in \mathbb{N}_0} I_{k-i} \cdot t^i \right) = \prod_{i \in \mathbb{N}_0} \underbrace{\left( \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} I_{k-i} \right)}_{=0} \cdot t^i = \prod_{i \in \mathbb{N}_0} 0 \cdot t^i = 0,$$

so dass auch  $J$  ausschöpfend ist.

- (ii) Wegen  $I(-\mathbb{N}_0) \subseteq \mathcal{I}(R)^\sigma$  ist  $\bar{\sigma}$  auf  $\text{gr}_I R$  wohldefiniert.  $\bar{\sigma}$  ist ein Ringendomorphismus auf  $\text{gr}_I R$ , da  $\sigma$  ein Ringendomorphismus auf  $R$  ist. Durch folgende Rechnung sieht man, dass

$\text{gr}_J R[[t; \sigma, \delta]]$  und  $(\text{gr}_I R)[\bar{t}; \bar{\sigma}]$  als  $R$ -Moduln isomorph sind:

$$\begin{aligned} \text{gr}_J R[[t; \sigma, \delta]] &= \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} J_k / J_{k+1} \cong \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} \left( \bigoplus_{i=0}^k I_{k-i} / I_{k+1-i} \cdot \bar{t}^i \right) \cong \bigoplus_{0 \leq i \leq k} I_{k-i} / I_{k+1-i} \cdot \bar{t}^i \\ &\cong \bigoplus_{0 \leq i \leq k} I_{k-i} / I_{k+1-i} \cdot \bar{t}^i \stackrel{k=i+j}{\cong} \bigoplus_{i, j \in \mathbb{N}_0} \underbrace{I_{(i+j)-i} / I_{(i+j)+1-i}}_{=I_j / I_{j+1}} \cdot \bar{t}^i \\ &\cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} \left( \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} I_j / I_{j+1} \right) \cdot \bar{t}^i \cong (\text{gr}_I R)[\bar{t}; \bar{\sigma}] \end{aligned}$$

Es sei  $\text{gr}_J R[[t; \sigma, \delta]] \xrightarrow{\psi} (\text{gr}_I R)[\bar{t}; \bar{\sigma}]$  dieser Isomorphismus. Nun seien  $f, g \in R[[t; \sigma, \delta]]$  mit  $f = \sum_{i \geq 0} a_i \cdot t^i$  und  $g = \sum_{j \geq 0} b_j \cdot t^j$ . Falls  $f \in J_k$ , dann gilt  $\psi(f + J_{k+1}) = \sum_{i \geq 0} (a_i + I_{k+1-i}) \cdot \bar{t}^i$  und insbesondere  $\psi(1 + J_1) = (1 + I_1)$  nach Konstruktion von  $\psi$ . Außerdem ist für  $f \in J_k$  und  $g \in J_l$  mit  $k, l \in \mathbb{N}_0$

$$(f + J_{k+1}) \cdot (g + J_{l+1}) = \sum_{i, j \geq 0} a_i \cdot \sigma^i(b_j) \cdot t^{i+j} + J_{k+l+1},$$

da alle von  $\delta$  produzierten Terme in  $J_{k+l+1}$  verschwinden nach der  $\phi(\delta)$ -Invarianz von  $I$ . Damit ist

$$\psi((f + J_{k+1}) \cdot (g + J_{l+1})) = \sum_{i, j \geq 0} (a_i \cdot \sigma^i(b_j) + I_{k+l+1-(i+j)}) \cdot \bar{t}^{i+j} = \psi(f + J_{k+1}) \cdot \psi(g + J_{l+1})$$

nach Definition der Multiplikation auf  $(\text{gr}_I R)[\bar{t}; \bar{\sigma}]$ . Insgesamt ist also  $\psi$  multiplikativ und damit ein Ringisomorphismus.

Falls  $\sigma$  automorph ist, gilt  $\phi(\sigma)(A) = (\sigma(A)) = \sigma(A)$  für alle Ideale  $A \in \mathcal{I}(R)$ . Insbesondere folgt  $\mathcal{I}(R)^\sigma = \mathcal{I}(R)^{\sigma^{-1}}$ , so dass  $\bar{\sigma}^{-1}$  ein Inverses von  $\bar{\sigma}$  ist. Damit ist  $\bar{\sigma}$  automorph.

- (iii) Falls  $\text{gr}_I R$  noethersch ist, dann ist nach der Verallgemeinerung des Hilbertschen Basissatz aus (MR01, I.1.2.9 Theorem) auch  $\text{gr}_I R[\bar{t}; \bar{\sigma}]$  noethersch. Über den Ringisomorphismus aus (ii) ist dann auch  $\text{gr}_J R[[t; \sigma, \delta]] \cong \text{gr}_I R[\bar{t}; \bar{\sigma}]$  noethersch.  $R[[t; \sigma, \delta]] \cong R^{\mathbb{N}_0}$  ist ein pseudokompakter  $R$ -Linksmodul und da alle Ideale von  $R$  abgeschlossen sind, ist auch  $J_k \subseteq R[[t; \sigma, \delta]]$  abgeschlossen nach Definition der Produkttopologie und damit pseudokompakt nach Satz 9.17 (i). Ebenso ist  $R[[t; \sigma, \delta]]/J_k$  versehen mit der Quotiententopologie nach Satz 9.17 (iv) pseudokompakt. Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  ist folgende Sequenz pseudokompakter  $R$ -Linksmoduln exakt

$$0 \longrightarrow J_k \longrightarrow R[[t; \sigma, \delta]] \longrightarrow R[[t; \sigma, \delta]]/J_k \longrightarrow 0,$$

so dass nach Satz 9.17 (iii) auch der projektive Limes dieser Sequenz exakt ist. Da  $J$  nach Voraussetzung ausschöpfend ist, gilt  $\varprojlim_{k \geq 0} J_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} J_k = 0$  und damit ist  $R[[t; \sigma, \delta]] \cong \varprojlim_{k \geq 0} R[[t; \sigma, \delta]]/J_k$  als pseudokompakte  $R$ -Linksmoduln. Da die Verkettung von Vergissfunktoren  $R\text{-TMod}_{F,C} \rightarrow \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{S}et$  nach Satz 9.17 (ii) und Proposition 2.5 bzw. Satz 2.8 mit Limiten vertauscht und der Vergissfunktoren  $\mathcal{R}ing \rightarrow \mathcal{S}et$  Limiten erzeugt, kann dieser Isomorphismus als Ringisomorphismus aufgefasst werden. Nach Lemma 9.15 ist dann auch  $R[[t; \sigma, \delta]]$  noethersch. □



### 9.3.2 Idealspektren pseudokompakter, noetherscher Ringe

Um die Filtrierungstheorie anwenden zu können, muss das Idealspektrum des Koeffizientenrings gewisse Eigenschaften erfüllen. So besitzt das Idealspektrum noetherscher, pseudokompakter Ringe in diesem Zusammenhang sehr gute Eigenschaften. Nachdem diese nachgewiesen wurden, kann mittels der abstrakten Filtrierungstheorie eine geeignete Filtrierung konstruiert werden, mit deren Hilfe der Nachweis der Noether-Eigenschaft für Schiefpotenzreihenringe gelingt.

**Satz 9.17**

Es sei  $R \in \mathcal{TRing}$  ein pseudokompakter Ring. Dann gilt:

- (i) Ein Untermodul  $N \leq M$  eines pseudokompakten  $R$ -Linksmoduls ist genau dann pseudokompakt, wenn er abgeschlossen ist.
- (ii) Der Vergissfunktork  $R\text{-TMod}_{F,C} \xrightarrow{U} \mathcal{Top}$  erzeugt Limiten. Insbesondere ist  $R\text{-TMod}_{F,C}$  vollständig.
- (iii)  $R\text{-TMod}_{F,C}$  ist eine abelsche Kategorie und besitzt exakte projektive Limiten.
- (iv) Ist  $M \in R\text{-TMod}_{F,C}$  und  $N \leq M$  ein abgeschlossener Untermodul, dann ist auch  $M/N$  versehen mit der Quotiententopologie pseudokompakt.

*Beweis.*

- (i) Es sei  $M \in R\text{-TMod}_{F,C}$  und  $N \leq M$  ein  $R$ -Untermodul versehen mit der Unterraumtopologie.  $N$  besitzt eine Umgebungsbasis der 0, bestehend aus den Untermoduln  $U \cap N$  mit  $U \in \mathcal{U}_M \cap \mathcal{L}_M$ . Wegen  $N/(U \cap N) \cong (N+U)/U \leq M/U$  ist auch  $N/(U \cap N)$  von endlicher Länge.

Nach (War93, II. Theorem 7.5) ist  $N \subseteq M$  genau dann abgeschlossen, wenn  $N$  vollständig ist. Wie gerade gezeigt ist  $N$  genau dann vollständig, wenn  $N$  pseudokompakt ist.

- (ii) Es seien  $M_i \in R\text{-TMod}_{F,C}$ . Dann ist  $M = \prod_i M_i$  versehen mit der Produkttopologie ein Hausdorff-Raum und vollständig nach (War93, II. Theorem 7.8 (2)). Nach Definition der Produkttopologie besitzt  $M$  eine Umgebungsbasis der 0, bestehend aus Untermoduln der Form  $N = \prod_i N_i$  mit  $N_i \in \mathcal{U}_{M_i} \cap \mathcal{L}_{M_i}$  und  $N_i = M_i$  für fast alle  $i$ . Für ein solches  $N \leq M$  ist  $M/N$  ein endliches Produkt von  $R$ -Moduln endlicher Länge. Daher ist auch  $M/N$  von endlicher Länge und damit  $M$  pseudokompakt.

Es seien  $M, N \in R\text{-TMod}_{F,C}$  pseudokompakt,  $f, g \in \text{Hom}_{R\text{-TMod}_{F,C}}(M, N)$  zwei stetige  $R$ -Modulhomomorphismen und  $h = f - g$ . Da  $N$  ein Hausdorff-Raum und damit  $\{0\} \subseteq N$  abgeschlossen ist, folgt aufgrund der Stetigkeit von  $h$ , dass ebenso  $\ker h = h^{-1}(0) \subseteq M$  abgeschlossen und damit nach (i) pseudokompakt ist. Damit bildet  $\ker h \hookrightarrow M$  einen Differenzkern des Paares  $(f, g)$ .

Wie gezeigt erzeugt der Vergissfunktork  $U$  Produkte und Differenzkerne. Wegen (AHS06, Theorem 12.3) kann jeder (kleine) Limes durch Produkte und Differenzkerne beschrieben werden, so dass  $U$  damit beliebige (kleine) Limiten erzeugt.

- (iii) (Gab62, IV.3 Theorem 3)
- (iv) Siehe Beweis von (Gab62, IV.3 Theorem 3).

□

**Satz 9.18**

Es sei  $R \in \mathcal{TRing}$  ein pseudokompakter Ring, der noethersch ist. Es bezeichne  $M = U_{R\text{-Ab-}R}(R)$  sein Idealspektrum.

- (i) Dann ist jedes Ideal  $I \triangleleft R$  abgeschlossen in  $R$ .
- (ii) Für alle absteigend filtrierte Teilmengen  $S \subseteq M$  und alle  $x \in M$  gilt  $x \vee \bigwedge S = \bigwedge_{s \in S} (x \vee s)$ .
- (iii) Die Topologie auf  $R$  wird von Potenzen des Jacobson-Radikals  $\text{Jac}(R)$  erzeugt.

Insbesondere wird durch

$$j : -\mathbb{N}_0 \longrightarrow M, \quad -k \longmapsto \text{Jac}(R)^k$$

eine ausschöpfende Filtrierung  $j \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, M)$  definiert, wobei  $M_{\geq j(-k)}$  endlich ist für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .

*Beweis.*

- (i) Dies folgt aus (VGB97, Proposition 3.10) und Satz 9.17 (i).
- (ii) Nach Bemerkung 3.8 kann  $M = U_{R\text{-Ab-}R}(R)$  als die Menge aller beidseitigen Ideale von  $R$  aufgefasst werden, partiell geordnet durch Inklusion, wobei der Schnitt das Infimum und die Summe das Supremum einer Teilmenge von  $U_{R\text{-Ab-}R}(R)$  bildet. Es sei  $S$  eine absteigend filtrierte Menge von Idealen und  $I$  ein Ideal von  $R$ . Da wegen (i) jedes Ideal  $I \triangleleft R$  abgeschlossen ist folgt unmittelbar aus (Gab62, IV.3. Proposition 11) das Distributivgesetz  $I + \bigcap S = \bigcap_{J \in S} (I + J)$ .
- (iii) Dies gilt nach (VGB97, Corollary 3.13). In Folge dessen ist  $\text{Jac}(R)^k \subseteq R$  offen für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und es gibt ein  $U \in \mathcal{U}_R \cap \mathcal{L}_R$  mit  $U \subseteq \text{Jac}(R)^k$ . Insbesondere ist  $R/\text{Jac}(R)^k$  als Quotient des Moduls  $R/U$  selbst von endlicher Länge und damit auch  $\text{Jac}(R)^k \in \mathcal{U}_R \cap \mathcal{L}_R$  und es liegen nur endlich viele Ideale von  $R$  über  $\text{Jac}(R)^k$ . Da  $R$  ein Hausdorff-Raum ist, gilt  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \text{Jac}(R)^k = 0$ , so dass  $j$  ausschöpfend ist.

□

**9.3.3 Noethersche Schiefpotenzreihenringe über pseudokompakten Ringen**

Lemma 9.19 analysiert den Zusammenhang der Noether-Eigenschaft eines filtrierten Rings mit der seines assoziierten graduierten Rings. Ein notwendiges Kriterium ist die Existenz einer endlich erzeugten Filtrierung, die die Ringtopologie erzeugt. Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass das Idealspektrum eines pseudokompakten, noetherschen Rings gute Eigenschaften besitzt, die in diesem Abschnitt ausgenutzt werden, um die Existenz einer endlich erzeugten  $\sigma$ - und  $\delta$ -invarianten, ausschöpfenden Filtrierung nachzuweisen. Für kommutative Koeffizientenringe impliziert dies zusammen Ergebnissen des vorherigen Abschnitts, dass auch der Schiefpotenzreihenring noethersch ist.

**Lemma 9.19**

Es seien  $R$  ein noetherscher Ring und  $I \in \text{Hom}_{\mathcal{P}Mon_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, \mathcal{I}(R))$  eine Idealfiltrierung auf  $R$ . Es gilt:

- (i) Falls  $\text{gr}_I R$  noethersch ist, dann ist  $I$  endlich erzeugt.

(ii) Falls  $R$  zusätzlich kommutativ ist, dann gilt auch die Rückrichtung.

*Beweis.*

(i) Angenommen  $I$  wäre nicht endlich erzeugt. Dann wird die aufsteigende Kette von Idealen

$$(I_1/I_2) \subseteq (I_1/I_2, I_2/I_3) \subseteq \dots \subseteq (I_1/I_2, \dots, I_k/I_{k+1}) \subseteq \dots$$

nicht stationär. Denn für alle  $k \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $k < n \in \mathbb{N}$ , so dass

$$I_n \supsetneq \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r \leq k, \\ m_1 + \dots + m_r \geq n}} I_{m_1} \cdot \dots \cdot I_{m_r},$$

da  $I$  nicht endlich erzeugt ist. Daraus resultiert

$$(I_1/I_2, \dots, I_k/I_{k+1}) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r \leq k, \\ m_1 + \dots + m_r \geq l \in \mathbb{N}_0}} (I_{m_1} \cdot \dots \cdot I_{m_r})/I_l \subsetneq (I_1/I_2, \dots, I_n/I_{n+1}).$$

(ii) Es seien nun  $R$  kommutativ und  $I$  werde von  $\{0, 1, \dots, N\}$  erzeugt. Da  $R$  noethersch ist, existieren Erzeuger  $x_{k,1}, \dots, x_{k,r}$  für jedes Ideal  $I_k$  mit  $k \leq N$ . Darüber definiert man folgende Surjektion:

$$(R/I_1)[T_{1,1}, \dots, T_{N,r}] \twoheadrightarrow \text{gr}_I R, \quad T_{k,l} \mapsto x_{k,l} + I_{k+1} \in I_k/I_{k+1},$$

womit  $\text{gr}_I R$  als Bild eines Ringhomomorphismus mit noetherscher Quelle ebenfalls noethersch ist. □

### Satz 9.20

Es seien  $R$  ein pseudokompakter, noetherscher Ring  $\sigma \in \text{Aut}_{\mathcal{T}\text{Ring}}(R)$  und  $\delta$  eine stetige,  $\sigma$ -nilpotente  $\sigma$ -Derivation der Art, dass es ein  $m \in \mathbb{N}_0$  gibt mit  $\delta(R)^m \subseteq \text{Jac}(R)$ . Dann gilt:

- Es gibt eine Filtrierung  $I \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, \mathcal{I}(R)^\sigma)$ , die endlich erzeugt, ausschöpfend und  $\phi(\delta)$ -invariant ist.
- Ist  $R$  kommutativ, dann ist nach Lemma 9.19 auch  $\text{gr}_I R$  und damit nach Satz 9.16 (iii) auch der Schiefpotenzreihenring  $R[[t; \sigma, \delta]]$  noethersch.

*Beweis.* Nach Satz 9.18 (ii) und (iii) erfüllt das Idealspektrum  $\mathcal{I}(R)$  die beiden Bedingungen aus Satz 8.24, wobei  $j$  die von den Potenzen des Jacobson-Radikals erzeugte Filtrierung auf  $R$  ist. Da  $\sigma$  ein Ringautomorphismus ist, sind für alle maximalen Linksideale  $M \triangleleft_l R$  auch  $\sigma(M), \sigma^{-1}(M) \triangleleft_l R$  maximale Linksideale von  $R$  und es gilt  $M = \sigma \circ \sigma^{-1}(M)$ , so dass

$$\sigma(\text{Jac}(R)) = \sigma \left( \bigcap_{M \triangleleft_l R \text{ maximal}} M \right) = \bigcap_{M \triangleleft_l R \text{ maximal}} \sigma(M) = \bigcap_{M \triangleleft_l R \text{ maximal}} M = \text{Jac}(R)$$

und damit  $j \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, \mathcal{I}(R)^\sigma)$  ist. Damit genügt auch  $\mathcal{I}(R)^\sigma$  den Bedingungen aus Satz 8.24. Nach Proposition 9.14 induziert  $\delta$  eine Derivation  $\delta' = \phi(\delta)|_{\mathcal{I}(R)^\sigma}$  auf  $\mathcal{I}(R)^\sigma$ . Da  $\delta$   $\sigma$ -nilpotent ist, ist  $\delta'$  nilpotent, und wegen  $\delta(R)^m \subseteq \text{Jac}(R)$  gilt  $\delta'(R)^m \leq j(-1)$ . Nach Satz 8.24 existiert dann eine endlich erzeugte  $\delta'$ -invariante Filtrierung  $I \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, \mathcal{I}(R)^\sigma)$ . □

### 9.3.4 Beispiele noetherscher Schiefpotenzreihenringe

Nun folgen ein paar Beispiele, die zeigen, dass die in diesem Kapitel erarbeiteten Bedingungen für noethersche Schiefpotenzreihenringe die aus (SV06) bekannten Kriterien erweitert.

Im Folgenden seien  $R$  ein pseudokompakter Ring,  $\sigma \in \text{Aut}(R)$  ein stetiger Ringautomorphismus auf  $R$  und  $\delta \in \text{Der}_\sigma$  eine stetige  $\sigma$ -Derivation. Für alle  $k \in \mathbb{N}$  seien

- $P_k = \{\underline{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^r; m_1 + \dots + m_r = k\}$ .
- $\mathcal{A}_k$  die Menge aller nicht-kommutativen Monome  $M(X, Y, Z)$  in drei Variablen  $X, Y$  und  $Z$  mit genau  $k$  Faktoren in  $X$ .
- $\mathcal{A}_{\geq k} = \bigcup_{k \leq i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i$ .
- $\Delta_k = \sum_{\underline{m} \in P_k} \sum_{M_i \in \mathcal{A}_{m_i}} M_1(\delta, \sigma, \sigma^{-1})(R) \cdot \dots \cdot M_r(\delta, \sigma, \sigma^{-1})(R)$  sowie  $\Delta_0 = \{1_R\}$ .
- $I_k = R\Delta_k$  sowie  $I_0 = R$ .

(vgl. (SV06))

#### Bemerkung 9.21

Nach (SV06) gilt für alle  $k, l \in \mathbb{N}_0$ , dass

- (a)  $\Delta_k \cdot \Delta_l \subseteq \Delta_{k+l}$ ,
- (b)  $\sigma(\Delta_k) = \Delta_k$ ,
- (c)  $\delta(\Delta_k) \subseteq \Delta_{k+1}$ ,  $\delta(R\Delta_{k+1}) \subseteq R\Delta_{k+1}$ ,  $\delta(\Delta_k R) \subseteq \Delta_{k+1}R$ ,
- (d)  $R\Delta_{k+1} \subseteq R\Delta_k$  und
- (e)  $R\Delta_k = \Delta_k R$ .

Insbesondere bilden die  $I_k$  eine  $\phi(\delta)$ -invariante Filtrierung  $I \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, \mathcal{I}(R)^\sigma)$ , welche im Folgenden als Standard-Filtrierung bezeichnet wird.

#### Proposition 9.22

Für  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{k-1} \Delta_i \cdot \Delta_{k-i} + \sum_{M \in \mathcal{A}_k} M(\delta, \sigma, \sigma^{-1})(R)$$

Insbesondere ist auch  $I_k = \sum_{i=1}^{k-1} I_i \cdot I_{k-i} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\sigma^j \circ \delta(I_{k-1}))$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Betrachte einen Summanden von  $\Delta_k$ . Es seien  $\underline{m} = (m_1, \dots, m_r) \in P_k$  und  $M_i \in \mathcal{A}_{m_i}$  für  $1 \leq i \leq r$ .

$r = 1$ : Es folgt  $m_1 = k$  bzw.  $M_1 \in \mathcal{A}_k$  und daher ist  $M_1(\delta, \sigma, \sigma^{-1})(R)$  in der rechten Summe enthalten.

$r \geq 2$ : Nach Definition ist

$$\underbrace{M_1(\delta, \sigma, \sigma^{-1})(R) \cdot \dots \cdot M_{r-1}(\delta, \sigma, \sigma^{-1})(R)}_{\subseteq \Delta_{k-m_r}} \cdot M_r(\delta, \sigma, \sigma^{-1})(R) \subseteq \Delta_{k-m_r} \cdot \Delta_{m_r}$$

in der linken Summe enthalten.

Die zweite Inklusion folgt nach Definition der  $\Delta_k$  und Bemerkung 9.21 (a). □

**Lemma 9.23**

Für alle  $x_1, \dots, x_n \in R$  gilt

$$\delta(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) = \sum_{i=1}^n \sigma(x_1) \cdot \dots \cdot \sigma(x_{i-1}) \cdot \delta(x_i) \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_n.$$

*Beweis.* Dies zeigt man wie Bemerkung 8.19 per Induktion. □

**Proposition 9.24**

Es sei  $K$  ein Körper versehen mit der diskreten Topologie. Es ist  $M = (\mathbb{N}_0^n, +)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  das diskrete, freie, abelsche Monoid in  $n$  Erzeugern und daher  $K[M] = K[X_1, \dots, X_n]$  der Polynomring über  $K$  in  $n$  Variablen.

- (i)  $K$  ist pseudokompakt und es existiert der vollständige Monoidring bzw. Potenzreihenring  $R = K[[\mathbb{N}_0^n]] = K[[X_1, \dots, X_n]]$  über  $K$  in  $n$  Variablen und er trägt nach Definition via  $R \cong K^{\mathbb{N}_0^n}$  die Produkttopologie.
- (ii)  $R$  ist ein pseudokompakter, noetherscher Ring und die offenen Ideale  $(X_1, \dots, X_n)^k$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  bilden eine Umgebungsbasis der 0.
- (iii) Für Einheiten  $u_1, \dots, u_n \in K^\times$  und Potenzreihen  $d_1, \dots, d_n \in (X_1, \dots, X_n)$  gilt:
  - a)  $\sigma|_K = \text{id}_K$  und  $\sigma(X_i) = u_i X_i$  definiert einen eindeutigen, stetigen Ringautomorphismus  $\sigma \in \text{Aut}_{\mathcal{TRing}}(R)$ .
  - b)  $\delta|_K = 0$  und  $\delta(X_i) = d_i$  definiert eine eindeutige, stetige  $\sigma$ -Derivation auf  $R$ .
  - c) Falls  $\delta$   $\sigma$ -nilpotent ist, dann existiert der Schiefpotenzreihenring  $R[[t; \sigma, \delta]]$  und er ist noethersch.

*Beweis.*

- (i) Da  $K$  diskret ist, bildet das offene Nullideal eine Umgebungsbasis der 0 und  $K$  ist vollständig. Da  $K$  ein Körper ist, ist  $K \cong K/(0)$  über sich selbst ein einfacher Modul und insbesondere von endlicher Länge. Insbesondere ist  $K$  damit pseudokompakt.
- (ii) Durch den  $K$ -Modulisomorphismus  $R \cong K^{\mathbb{N}_0^n}$  ist  $R$  wegen Satz 9.17 (ii) ebenfalls ein pseudokompakter  $K$ -Modul. Über diesen Isomorphismus ist  $(X_1, \dots, X_n)^k \cong K^{(\mathbb{N}_0^n)_{\geq k}^n}$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  ein offenes Ideal in  $R$ . Insbesondere bilden diese Ideale eine Umgebungsbasis der 0 in  $R$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  ist  $R/(X_1, \dots, X_n)^k \cong K^{n \cdot k}$  als  $K$ -Moduln und damit ein  $K$ - bzw.  $R$ -Modul endlicher Länge. Damit ist auch  $R$  pseudokompakt. Aus der kommutativen Algebra ist bekannt, dass  $R$  ein noetherscher Ring ist.
- (iii) a) Nach der universellen Eigenschaft des freien abelschen Monoids und des vollständigen Monoidrings aus Proposition 7.7 definiert dies einen stetigen Monoidhomomorphismus  $\mathbb{N}_0^n \xrightarrow{\sigma_M} (R, \cdot)$  und darüber einen stetigen Ringendomorphismus  $\sigma \in \text{End}_{\mathcal{TRing}}(R)$ , denn das Komplement von  $\sigma_M^{-1}((X_1, \dots, X_n)^k) = (\mathbb{N}_0^n)_{\geq k}^n$  in  $\mathbb{N}_0^n$  ist endlich und damit kompakt. Per Konstruktion ist  $\sigma$  bijektiv.

- b) Es seien  $1 \leq i_j \leq n$  für  $1 \leq j \leq r$  mit  $r \in \mathbb{N}$ . Damit  $\delta$  eine Derivation auf  $R$  definiert gilt notwendigerweise

$$\delta(X_{i_1} \cdot \dots \cdot X_{i_r}) = \sum_{j=1}^r \sigma(X_{i_1}) \cdot \dots \cdot \sigma(X_{i_{j-1}}) \cdot d_j \cdot X_{i_{j+1}} \cdot \dots \cdot X_{i_r}.$$

Außerdem muss  $\delta$  additiv und  $K$ -linear sein wegen  $\delta(k \cdot x) = \delta(k) \cdot x + \sigma(k) \cdot \delta(x) = k\delta(x)$ . Damit ist  $\delta$  als  $K$ -Vektorraumhomomorphismus  $K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow R$  bereits vollständig festgelegt. Nun ist  $\delta((X_1, \dots, X_n)^k) \subseteq (X_1, \dots, X_n)^k$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  wegen obiger Formel und da  $d_i \in (X_1, \dots, X_n)$  ist für alle  $1 \leq i \leq n$ . Damit ist  $\delta$  stetig bei 0 und damit insgesamt stetig, da diese Ideale eine Umgebungsbasis der 0 bilden. Da  $K[X_1, \dots, X_n] \subseteq R$  eine dichte Teilmenge ist, gibt es höchstens eine Fortsetzung von  $\delta$  auf  $R$ .  $\delta$  kann wegen  $\delta((X_1, \dots, X_n)^k) \subseteq (X_1, \dots, X_n)^k$  über den projektiven Limes über alle Quotienten  $R/(X_1, \dots, X_n)$  stetig fortgesetzt werden. Alternativ kann  $\delta$  auch explizit über die Darstellung der Elemente aus  $R$  als Potenzreihen definiert werden. Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass  $\delta$  eine  $\sigma$ -Derivation ist. Dazu seien  $f = \sum_{X \in \mathbb{N}_0^n} a_X \cdot X$  und  $g = \sum_{Y \in \mathbb{N}_0^n} b_Y \cdot Y$ . Man berechnet

- $\delta(fg) = \sum_{X, Y \in \mathbb{N}_0^n} a_X b_Y \delta(XY)$  und
- $\delta(f)g + \sigma(f)\delta(g) = \sum_{X, Y \in \mathbb{N}_0^n} a_X b_Y (\delta(X)Y + \sigma(X)\delta(Y))$ .

Da  $\delta$  sich auf den Monomen per Konstruktion wie eine  $\sigma$ -Derivation verhält, gilt  $\delta(XY) = \delta(X)Y + \sigma(X)\delta(Y)$ , so dass  $\delta$  damit tatsächlich eine  $\sigma$ -Derivation ist.

- c) Die Existenz folgt aus Beispiel 7.24. Nach Satz 9.20 ist  $R[[t; \sigma, \delta]]$  noethersch. □

### Beispiel 9.25

Unter den Voraussetzungen von Proposition 9.24 wähle  $n = 1$  und  $d_1 = X_1^2$ . Dann gilt

- (i)  $\delta$  ist  $\sigma$ -nilpotent, d.h.  $R[[t; \sigma, \delta]]$  existiert und ist noethersch.
- (ii) Falls  $v_k := \sum_{i=0}^{k-1} u_1^i \in K^\times$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  (also z.B. falls  $\text{char } K = 0$  und  $u_1 = 2$  ist), dann ist die Standard-Filtrierung gegeben durch  $I_k = (X_1^{k+1})$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  und damit nicht endlich erzeugt.

Insbesondere ist  $\text{gr}_I R$  nach Lemma 9.19 (i) nicht noethersch, so dass (SV06, Lemma 1.4) nicht ausreicht um zu zeigen, dass  $R[[t; \sigma, \delta]]$  noethersch ist.

*Beweis.*

- (i) Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  ist zunächst

$$\delta(X_1^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \sigma(X_1)^i \delta(X_1) \cdot X_1^{k-1-i} = \sum_{i=0}^{k-1} u_1^i \cdot X_1^{k+1} = v_k \cdot X_1^{k+1}.$$

Induktiv zeigt man dann für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , dass  $\delta^k(X_1) = w_k \cdot X_1^{k+1}$  ist mit  $w_k = v_1 \cdot \dots \cdot v_k$ . Der Induktionsanfang ist klar. Gilt die Behauptung für  $k$ , dann gilt sie wegen folgender Rechnung auch für  $k + 1$ :

$$\delta \circ \delta^k(X_1) = \delta(w_k \cdot X_1^{k+1}) = v_{k+1} \cdot w_k \cdot X_1^{k+2} = w_{k+1}$$

Damit ist insbesondere  $\delta^k(R) \subseteq (X_1)^{k+1}$ , so dass  $\delta$  nach Definition 7.23  $\sigma$ -nilpotent ist, da die Ideale  $(X_1)^k$  nach Proposition 9.24 (ii) eine Umgebungsbasis der  $0 \in R$  bilden.

- (ii) Per Definition ist  $\delta(X_1) = u_1 X_1^2$  und damit  $I_1 = (X_1^2)$ . Wegen  $\delta^k(X_1) = w_k \cdot X_1^{k+1}$  und da nach Voraussetzung  $v_i \in K^\times$  für  $1 \leq i \leq k$  und somit auch  $w_k \in K^\times$  ist, folgt per Induktion nach Proposition 9.22, dass  $I_k = (X_1^{k+1})$  ist.

□

**Beispiel 9.26**

Unter den Voraussetzungen von Proposition 9.24 wähle  $d_i = X_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq n-1$  und  $d_n = 0$ .

- (i) Durch  $J_k := (X_1^{m_1} \cdot \dots \cdot X_n^{m_n}; m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0, k \leq 0 \cdot m_1 + m_2 + 2m_3 + \dots + (n-1)m_n)$  für  $k \in \mathbb{N}$  wird eine  $\phi(\delta)$ -invariante Filtrierung  $J \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, \mathcal{I}(R)^\sigma)$  definiert.

Insbesondere ist  $\delta$  nach Lemma 8.23  $\sigma$ -nilpotent, d.h.  $R[[t; \sigma, \delta]]$  existiert und ist noethersch.

- (ii) Für die Standard-Filtrierung gilt dann  $I_k \subseteq J_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , d.h.  $I \leq J$  nach Definition der Halbordnung auf der Menge der Filtrierungen.

Möchte man Lemma (SV06, Lemma 1.4) zum Nachweis der Noether-Eigenschaft verwenden, müsste die Standard-Filtrierung nicht nur nach oben abgeschätzt, sondern exakt berechnet werden, was weitere Rechnungen nach sich zieht. Möglicherweise müssten außerdem, wie in Beispiel 9.25, Bedingungen an die Einheiten  $u_i$  gestellt werden. Für Satz 9.20 dagegen genügt schon die  $\sigma$ -Nilpotenz.

*Beweis.*

- (i) • Da  $R$  kommutativ ist, genügt es das Multiplikationsaxiom (F $\geq$ ) für die erzeugenden Monome  $X_1^{m_1} \cdot \dots \cdot X_n^{m_n}$  der Ideale  $J_k$  nachzuweisen. Aber für alle Erzeuger  $X \in J_k$  und  $Y \in J_l$  gilt per Konstruktion  $XY \in J_{k+l}$ , da der  $X_i$ -Grad von  $XY$  die Summe der  $X_i$ -Grade von  $X$  und  $Y$  ist. Außerdem ist  $J_0 = R$ , da  $1 = X_1^0 \cdot \dots \cdot X_n^0$  ein Erzeuger ist. Damit ist  $J$  eine Filtrierung.
- Da  $\sigma$  angewendet auf Monome lediglich die Multiplikation mit einer Einheit aus  $K$  ist, sind alle  $J_k$  invariant unter  $\sigma$ .
- (a) Es sei  $1 \leq i \leq n$  und  $m \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist

$$\delta(X_i^m) = \sum_{j=1}^m \sigma(X_i)^{j-1} \delta(X_i) \cdot X_i^{m-j} = \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{m-1} u_i^j \right)}_{v_{i,m} :=} \cdot X_i^{m-1} \delta(X_i).$$

Dies impliziert  $\delta(X_n^m) = v_{n,m} \cdot X_n^{m-1} \cdot 0 = 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}_0$ .

- (b) Für  $X = X_1^{m_1} \cdot \dots \cdot X_n^{m_n}$  mit  $k \leq 0m_1 + 1m_2 + \dots + (n-1)m_n$  und einem  $k\mathbb{N}_0$  ist dann nach (a)

$$\delta(X) = \sum_{i=1}^n v_{i,m_i} X_i^{m_i-1} \delta(X_i) = \sum_{i=1}^{n-1} v_{i,m_i} X_i^{m_i-1} X_{i+1}$$

und jeder Summand ist ein Element von  $J_{k+1}$ , da sich jeweils der  $X_i$ -Grad um 1 erniedrigt, dafür der  $X_{i+1}$ -Grad um 1 erhöht, welcher bei der Summenformel um 1 stärker gewichtet wird. Zusammengefasst bedeutet dies also  $\delta(X) \subseteq J_{k+1}$  für alle monomialen Erzeuger  $X \in J_k$ .

- (c) Es sei  $f \in R$ . Dann ist  $f$  eine unendliche Summe von  $K$ -skalierten Monomen. Da  $\delta$   $K$ -linear und additiv ist (nach Konstruktion auch für unendliche Summen), ist  $\delta(f)$  unendliche Summe von Bildern von Monomen unter  $\delta$  und liegt damit nach (b) für  $k = 0$  in  $J_1$ . Beachte dazu, dass die entstehende unendliche Summe  $(X_1, \dots, X_n)$ -adischer Grenzwert einer Folge endlicher Summen ist, welche alle in  $J_1$  liegen. Die Abgeschlossenheit der Ideale in  $R$  (nach Proposition 9.24 (ii) und Satz 9.18 (i)) impliziert dann, dass auch die unendliche Summe in  $J_1$  liegt. Folglich ist  $\delta(R) \subseteq J_1$ .

Es sei nun  $f \in R$  und  $X \in J_k$  ein monomialer Erzeuger von  $J_k$  der angegebenen Form für  $k \geq 1$ . Dann ist  $\delta(f \cdot X) = \delta(f)X + \sigma(f)\delta(X) \in J_1 \cdot J_k + R \cdot J_{k+1} \subseteq J_{k+1}$  nach der soeben nachgewiesenen Filtrierungseigenschaft und da  $\delta(R) \subseteq J_1$  nach (c). Die Additivität von  $\delta$  und des Ideals  $J_{k+1}$  impliziert dann  $\delta(J_k) \subseteq J_{k+1}$ , so dass  $J$  schließlich  $\phi(\delta)$ -invariant ist.

- (ii) Offenbar ist  $\Delta_0 \subseteq J_0$  und  $\Delta_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma^k \circ \delta(R) \subseteq J_1$  wegen der  $\phi(\delta)$  und  $\sigma$ -Invarianz von  $J$ . Induktiv folgt denn  $I_k \subseteq J_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  wegen Proposition 9.22 und da  $J$  eine  $\phi(\delta)$  und  $\sigma$ -invariante Filtrierung ist.

□

### Beispiel 9.27

Unter den Voraussetzungen von Proposition 9.24 wähle  $d_i = X_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq n-1$  und  $d_n = X_1^2$ . Beachte: Für  $n = 1$  erhält man wieder Beispiel 9.25.

- (i) Mit  $J_k := (X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}; m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0, k \leq n \cdot m_1 + (n+1)m_2 + (n+2)m_3 + \dots + (2n-1)m_n)$  für  $k \in \mathbb{N}$  erhält man eine  $\phi(\delta)$ -invariante Filtrierung  $J \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\text{Mon}_{\geq 1}}(-\mathbb{N}_0, \mathcal{I}(R)^\sigma)$ .

Insbesondere ist  $\delta$  nach Lemma 8.23  $\sigma$ -nilpotent, d.h.  $R[[t; \sigma, \delta]]$  existiert und ist noethersch.

- (ii) Für die Standard-Filtrierung gilt dann  $I_k \subseteq J_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , d.h.  $I \leq J$ .

Die Standard-Filtrierung  $I$  selbst wird bereits für  $n = 2$  zu kompliziert für weitere Berechnungen. Aufgrund der Definition von  $\delta$  werden die Ideale  $I_k$  in höheren Graden  $k$  nicht mehr allein von Monomen erzeugt, so dass man bereits am Aufstellen einer geschlossenen Berechnungsformel für Erzeuger scheitern wird.

*Beweis.*

- (i) Der Beweis verläuft genau wie in Beispiel 9.26. Beachte, dass  $\delta(X_n^m) = v_{n,m} X_n^{m-1} X_1^2$  für  $m \in \mathbb{N}_0$ . Aufgrund der variierten Summenbedingung  $k \leq nm_1 + (n+1)m_2 + \dots + (2n-1)m_n$  gilt auch hier  $\delta(J_k) \subseteq J_{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und alle monomialen Erzeuger von  $J_k$  (vgl. (i) (b) im Beweis von Beispiel 9.26).<sup>2</sup>

- (ii) Dies zeigt man auf die gleiche Weise wie in Beispiel 9.26.

□

<sup>2</sup>Man beachte, dass der Beweis von Lemma 8.21 aus der allgemeinen Filtrierungstheorie analoge Argumente benutzt.



## 9.4 Noethersche vollständige Monoidringe

Zuletzt soll noch ein notwendiges Kriterium für noethersche, vollständige Monoidringe lokal proendlicher Monoide über „einfachen“ Koeffizientenringe gestellt werden. Für den Ausbau der Filtrierungstheorie und die Angabe eines hinreichenden Kriteriums für die Noether-Eigenschaft bei vollständigen Monoidringen reicht der Platz in dieser Arbeit jedoch nicht aus. Gleiches gilt für die komplizierteren, vollständigen Schiefmonoidringe.

Interessant ist dennoch, dass man über das notwendige Kriterium eine Art Bewertung auf dem Monoid erhält, die eine gewisse Ähnlichkeit mit einer  $p$ -Bewertung auf einer Gruppe nach (Laz65) besitzt. Lazard gibt in seiner Arbeit unter anderem auch ein hinreichendes Kriterium für die Noether-Eigenschaft vollständiger Gruppenringe gewisser proendlicher Gruppen an. Baut man die Theorie der  $p$ -bewerteten Gruppen auf lokal proendliche Monoide aus, lassen sich vielleicht ähnliche Resultate auch für diese Objektklasse erzielen.

### Proposition 9.28

Es seien  $M$  ein lokal proendliches, eigentliches Monoid,  $n$  eine natürliche Zahl und  $R = \mathbb{Z}/n$  versehen mit der diskreten Topologie.

Wenn  $R[[M]]$  noethersch ist, dann gibt es eine Kette von Kongruenzen  $M \times M = S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots$  auf  $M$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $M/S_k$  ist endlich und diskret für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .
- (ii)  $aS_k b \implies a^n S_{kn} b^n$  für alle  $a, b \in M$  und  $k \in \mathbb{N}$ .
- (iii)  $a^{n^r} S_{n^k} b^{n^r} \implies a^{n^k} S_{n^k} b^{n^k}$  für alle  $a, b \in M$  und  $k, r \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Für alle  $S \in \text{Cong}_O(\hat{M})$  ist  $\hat{M}/S$  endlich und folglich  $R[\hat{M}/S]/(\pi_S(0)) \cong R^{(\hat{M}/S) \setminus \{\pi_S(0)\}}$  ein endlicher Ring, da  $R = \mathbb{Z}/n$  endlich ist. Wegen Proposition 7.17 (ii) ist dann  $R[[M]] \cong \varprojlim_{S \in \text{Cong}_O(\hat{M})} R[\hat{M}/S]/(\pi_S(0))$  ein proendlicher Ring und damit insbesondere pseudokompakt. Nach (VGB97, Corollary 3.13) wird dann die Topologie auf  $R[[M]]$  von Potenzen des Jacobson-Radikals  $J = \text{Jac}(R[[M]])$  erzeugt. Insbesondere ist  $J^k \subseteq R[[M]]$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  offen und folglich  $R[[M]]/J^k$  diskret. Außerdem muss  $R[[M]]/J^k$  endlich sein, denn andernfalls induzierten die Nebenklassen von  $J^k$  eine unendliche, disjunkte offene Überdeckung von  $R[[M]]$  im Widerspruch zur Kompaktheit. Da  $R[[M]]$  vollständig ist, gilt wegen Lemma 6.4 insbesondere  $R[[M]] \cong \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} R[[M]]/J^k$ . Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  erhält man einen stetigen Monoidhomomorphismus

$$f_k : M \xrightarrow{\iota_M} (R[M], \cdot) \hookrightarrow (R[[M]], \cdot) \twoheadrightarrow (R[[M]]/J^k, \cdot).$$

Da der projektive Limes die Initialtopologie bezüglich der Limesprojektionen trägt, zeigt der topologische Isomorphismus  $\phi$ , dass auch  $R[[M]]$  die Initialtopologie bezüglich der Projektionen  $R[[M]] \twoheadrightarrow R[[M]]/J^k$  trägt. Da  $M$  unter den angegebenen Inklusionen topologisch isomorph in  $R[M]$  bzw.  $R[[M]]$  eingebettet ist, trägt  $M$  die Initialtopologie bezüglich der  $f_k$ . Jedes  $f_k$  korrespondiert zu einer eindeutigen Kongruenz  $S_k$  auf  $M$  mit  $M/S_k \xrightarrow{f_k} f_k(M)$ .

- (i) Es ist  $M/S_k \cong f_k(M) \subseteq R[[M]]/J^k$  endlich und diskret, da  $R[[M]]/J^k$  dies ist.
- (ii) Für alle  $a, b \in M$  und  $0 < k \in \mathbb{N}$  gilt  $aS_k b$  genau dann, wenn  $a - b \in J^k$  ist. Da  $R$  und daher auch der Ring  $R[[M]]$  die Charakteristik  $n$  besitzen, gilt  $a^n - b^n = (a - b)^n \in (J^k)^n = J^{kn}$  also  $a^n S_{kn} b^n$ .

- (iii) Es seien  $a, b \in M$  mit  $a^{n^r} S_{n^k} b^{n^r}$  mit  $k, r \in \mathbb{N}$ , also  $(a - b)^{n^r} = a^{n^r} - b^{n^r} \in J^{n^k}$ . Dann gibt es einen eindeutigen Ringhomomorphismus

$$f : R[X]/(X^{n^r}) \longrightarrow R[[M]]/J^{n^k}, \quad f|_R = \text{id}_R, \quad X \longmapsto a - b + J^{n^k}.$$

Das Jacobson-Radikal von  $R[[M]]/J^{n^k}$  ist der Durchschnitt aller maximalen Linksideale von  $R[[M]]$ , die  $J^{n^k}$  enthalten, modulo  $J^{n^k}$ , also  $J/J^{n^k}$ , da  $J^{n^k} \subseteq J$  in jedem maximalen Linksideal enthalten ist. Das Jacobson-Radikal von  $R[X]/(X^{n^r})$  ist dementsprechend  $(X)/(X^{n^r})$ . Da Ringhomomorphismen das Jacobson-Radikal des Quellrings in das Jacobson-Radikal des Zielrings abbilden gilt  $f(X + (X^{n^r})) = a - b + J^{n^k} \in J/J^{n^k}$  bzw.  $a^{n^k} - b^{n^k} + J^{n^k \cdot n^k} = (a - b + J^{n^k})^{n^k} \in (J/J^{n^k})^{n^k} = 0$  und damit  $a^{n^k} S_{n^k} b^{n^k}$ .

□

### Bemerkung 9.29

Unter den Voraussetzungen von Proposition 9.28 induzieren die Kongruenzen  $S_k$  eine Abbildung

$$\nu : M \times M \longrightarrow (0, \infty], \quad (x, y) \longmapsto \log_n(\sup\{k \in \mathbb{N}; x S_k y\}) + 1,$$

die für  $a, b, c, d \in M$  folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i)  $\nu(ab, cd) \geq \min(\nu(a, c), \nu(b, d))$ .
- (ii)  $\nu(a^n, b^n) \geq \nu(a, b) + 1$ .

*Beweis.*

- (i) Setze  $x = \min(\nu(a, b), \nu(c, d))$  und  $y := n^{x-1}$ . Dann gilt  $a S_y b$  und  $c S_y d$  nach Definition von  $\nu$  und da  $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots$  ist. Folglich ist auch  $(ac) S_y (bd)$ , da  $S_y$  eine Kongruenz auf  $M$  ist. Dies impliziert  $\nu(ac, bd) \geq \log_n(y) + 1 = x = \min(\nu(a, b), \nu(c, d))$ .
- (ii) Setze  $y = n^{\nu(a, b)-1}$ . Dann ist  $a S_y b$  und nach Proposition 9.28 (ii) gilt  $a^n S_{y^n} b^n$ . Nach Definition von  $\nu$  ist dann  $\nu(a^n, b^n) \geq \log_n(y^n) + 1 = \log_n(y) + 2 = \nu(a, b) + 1$ .

□

# Kapitel 10

## Ausblick

Während sich die vorliegende Arbeit in erster Linie mit der reinen Konstruktion vollständiger Schiefmonoidringe beschäftigt, reicht der Rahmen einer Diplomarbeit nicht aus um diese Objekte vollständig zu analysieren. Eine genaue Untersuchung noetherscher, vollständiger Schiefmonoidringe konnte nur für den Spezialfall der Schiefpotenzreihenringe angegeben werden. Ausgehend von Proposition 9.28 könnte man versuchen Bedingungen zu finden eine ähnliche Äquivalenz wie in Korollar 9.8 auch für vollständige Monoidringe zu beweisen. Da man eine ähnliche allgemeine Aussage für  $p$ -adische analytische Gruppen hat (siehe (SSS00, Theorem 5.1.3)), ist der vermutete Zusammenhang zwischen der Noether-Eigenschaft des lokal proendlichen, eigentlichen Monoids und der des vollständigen Monoidrings nicht vollkommen unbegründet. Im Gegenteil suggeriert die Aussage von Bemerkung 9.29 wie man analog den Begriff eines  $p$ -bewerteten Monoids einführen müsste. Für  $n = p$  verhält sich die dort definierte „ $p$ -Bewertung“  $\nu$  ähnlich wie eine  $p$ -Bewertung auf einer Gruppe. Es gilt dann herauszufinden, wie man die Axiome für eine  $p$ -Bewertung für Monoide definieren muss, um die Theorie der  $p$ -bewerteten Gruppen auf Monoide so weit wie möglich übertragen zu können.

Da die Definition 9.1 von noetherschen Monoiden sehr allgemein gehalten ist, könnte man sich weiter fragen, wie sich diese Eigenschaft unter Funktoren zwischen monoidalen Kategorien verhält. Ein monoidaler Funktor zwischen zwei monoidalen Kategorien ist ein Funktor, der die monoidale Struktur respektiert, d.h. gewisse Kohärenzbedingungen erfüllt. Ein solcher Funktor induziert dann immer einen Funktor zwischen den Monoidkategorien. Hat man eine Adjunktion zwischen monoidalen Kategorien bestehend aus zwei monoidalen Funktoren, dann überträgt sich die Noether-Eigenschaft über Einheit und Koeinheit. Es stellt sich heraus, dass viele der betrachteten Funktoren monoidal sind. Beispielsweise der Vergissfunktork  $\mathcal{A}b \xrightarrow{U} \mathcal{S}et$  und der freie Funktor  $\mathcal{S}et \xrightarrow{F} \mathcal{A}b$ . Bemerkung 9.5 macht sich genau diesen Zusammenhang über die Einheit dieser Adjunktion (siehe Korollar 4.7) zunutze. Man könnte die Frage nach der Noether-Eigenschaft im (vollständigen) Monoidring also als Spezialfall folgender Frage auffassen: Unter welchen Bedingungen bleibt die Noether-Eigenschaft von Monoiden unter Bildern monoidaler, adjungierter Funktoren erhalten?

Schaut man sich die Definition monoidaler Funktoren an, so bemerkt man eine gewisse Ähnlichkeit zu den in Kapitel 8 definierten Filtrierungen. In der Tat sind Filtrierungen, d.h. Morphismen der Kategorien  $\mathcal{P}Mon_{\geq,1}$ , monoidale Funktoren, wenn man ein partiell geordnetes Monoid wie in Bemerkung 8.4 als monoidale Kategorie auffasst. Die in Kapitel 8 entwickelte Theorie umfasst unter anderem auch Adjunktionen von Filtrierungen. Vielleicht lassen sich die dort erarbeiteten Eigenschaften auch auf monoidale Funktoren übertragen. Da die Filtrierungen ja unmittelbar im Zusammenhang mit dem Nachweis der Noether-Eigenschaft standen, könnte

man sich überlegen, ob sich daraus eine allgemeinere Noether-Theorie für adjungierte, monoidale Funktoren ableiten ließen.

Abgesehen von der Fortsetzung der Noether-Eigenschaft könnte man versuchen auch andere Eigenschaften über monoidale Funktoren auf Monoide anderer Kategorien übertragen. Interessant wäre es sicher auch,  $K$ -Theorie unter diesem Aspekt zu betreiben. In (CM10) wird eine  $K$ -Theorie für Monoide definiert. Anhand dessen könnte man auch versuchen  $K$ -Theorie für (lokal) proendliche, eigentliche Monoide definieren. Wie jedoch in Abschnitt 5.1.5 gesehen, verhält sich die Kategorie der lokal proendlichen, eigentlichen Räume in Bezug auf Limiten und Kolimiten sehr schlecht. Wesentlich besser dagegen verhält sich die Kategorie der punktierten proendlichen Räume bzw. Monoide. Man kann zeigen, dass diese vollständig und kovollständig ist und es eine Adjunktion zwischen der Kategorie der proendlichen Räume und der der punktierten proendlichen Räume gibt. Weiterhin wird diese Kategorie zusammen mit dem Smash-Produkt topologischer Räume eine monoidale Kategorie, dessen Monoide das Konzept der lokal proendlichen, eigentlichen Monoide verallgemeinert. Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung definiert dann einen treuen, monoidalen Funktor von der Kategorie der lokal proendlichen, eigentlichen Räume in die Kategorie der punktierten proendlichen Räume. Weiterhin lassen sich aufgrund der Kovollständigkeit der Kategorie der punktierten proendlichen Räume Tensorprodukte von punktierten proendlichen  $M$ -Mengen über einem punktierten proendlichen Monoid  $M$  definieren. Diese Überlegungen sind zum Teil von mir auch schon mathematisch korrekt erarbeitet, finden jedoch keinen Platz in der Diplomarbeit, da sie deren Rahmen sprengen würden. Voraussichtlich werde ich sie in meiner geplanten Doktorarbeit eingehender erforschen.

Eine abstraktere Fragestellung wäre ähnlich wie beim Begriff (ko-)noetherscher Monoide, ob und wie sich die  $K$ -Gruppen eines Monoids unter monoidalen Funktoren verhalten. Gibt es vielleicht Homomorphismen zwischen den  $K$ -Gruppen eines (punktierten proendlichen) Monoids in die  $K$ -Gruppen des assoziierten (vollständigen) Monoidrings? Unter welchen Bedingungen lässt sich eine  $K$ -Theorie für Monoide einer monoidalen Kategorie definieren?

# Literaturverzeichnis

- [AHS06] ADÁMEK, Jiří ; HERRLICH, Horst ; STRECKER, George E.: Abstract and concrete categories: the joy of cats. In: *Repr. Theory Appl. Categ.* (2006), Nr. 17, S. 1–507. – Reprint of the 1990 original [Wiley, New York; MR1051419]
- [Alm05] ALMEIDA, Jorge: Profinite semigroups and applications. In: *Structural theory of automata, semigroups, and universal algebra* Bd. 207. Dordrecht : Springer, 2005. – Notes taken by Alfredo Costa, S. 1–45
- [Bir48] BIRKHOFF, Garrett: *Lattice Theory*. New York, N. Y. : American Mathematical Society, 1948 (American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 25, revised edition). – xiii+283 S
- [BJ01] BORCEUX, Francis ; JANELIDZE, George: *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Bd. 72: *Galois theories*. Cambridge : Cambridge University Press, 2001. – xiv+341 S. – ISBN 0-521-80309-8
- [Bou66a] BOURBAKI, Nicolas: *Elements of mathematics. General topology. Part 1*. Paris : Hermann, 1966. – vii+437 S
- [Bou66b] BOURBAKI, Nicolas: *Elements of mathematics. General topology. Part 2*. Paris : Hermann, 1966. – iv+363 S
- [Bou74] BOURBAKI, Nicolas: *Elements of mathematics. Algebra, Part I: Chapters 1-3*. Paris : Hermann, 1974. – xxiii+709 S. – Translated from the French
- [Bro03] BROOKFIELD, Gary: Commutative Noetherian semigroups are finitely generated. In: *Semigroup Forum* 66 (2003), Nr. 2, S. 323–327. – ISSN 0037–1912
- [CM10] CHU, C. ; MORAVA, J.: On the Algebraic K-theory of Monoids. In: *ArXiv e-prints* (2010), September
- [Gab62] GABRIEL, Pierre: Des catégories abéliennes. In: *Bull. Soc. Math. France* 90 (1962), S. 323–448. – ISSN 0037–9484
- [Laz65] LAZARD, Michel: Groupes analytiques  $p$ -adiques. In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1965), Nr. 26, S. 389–603. – ISSN 0073–8301
- [Mac72] MACLANE, Saunders: *Kategorien. Begriffssprache und mathematische Theorie*. Berlin : Springer-Verlag, 1972. – vii+295 S. – Aus dem Englischen übersetzt von Klaus Schürger, Hochschultext

- [MR01] MCCONNELL, J. C. ; ROBSON, J. C.: *Graduate Studies in Mathematics*. Bd. 30: *Noncommutative Noetherian rings*. Revised. Providence, RI : American Mathematical Society, 2001. – xx+636 S. – With the cooperation of L. W. Small. – ISBN 0–8218–2169–5
- [NVO79] NĂSTĂSESCU, Constantin ; VAN OYSTAEYEN, F.: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 758: *Graded and filtered rings and modules*. Berlin : Springer, 1979. – x+148 S. – ISBN 3–540–09708–2
- [RZ00] RIBES, Luis ; ZALESSKII, Pavel: *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Bd. 40: *Profinite groups*. Berlin : Springer-Verlag, 2000. – xiv+435 S. – ISBN 3–540–66986–8
- [SSS00] DU SAUTOY, Marcus (Hrsg.) ; SEGAL, Dan (Hrsg.) ; SHALEV, Aner (Hrsg.): *Progress in Mathematics*. Bd. 184: *New horizons in pro-p groups*. Boston, MA : Birkhäuser Boston Inc., 2000. – xiv+423 S. – ISBN 0–8176–4171–8
- [Ste10] STEINBERG, B.: On the endomorphism monoid of a profinite semigroup. In: *ArXiv e-prints* (2010), März
- [SV06] SCHNEIDER, Peter ; VENJAKOB, Otmar: On the codimension of modules over skew power series rings with applications to Iwasawa algebras. In: *J. Pure Appl. Algebra* 204 (2006), Nr. 2, S. 349–367. – ISSN 0022–4049
- [VGB97] VAN GASTEL, Martine ; VAN DEN BERGH, Michel: Graded modules of Gelfand-Kirillov dimension one over three-dimensional Artin-Schelter regular algebras. In: *J. Algebra* 196 (1997), Nr. 1, S. 251–282. – ISSN 0021–8693
- [War93] WARNER, Seth: *North-Holland Mathematics Studies*. Bd. 178: *Topological rings*. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1993. – x+498 S. – ISBN 0–444–89446–2

# Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

---

Ort, Datum, Unterschrift