4. Aufgabe: (3+4=7 Punkte) Man kann eine Hilbertraumbasis von $L^2([0,1])$ wie folgt konstruieren: Mit

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiere $f_{n,m}(x) = 2^{n/2} \cdot \psi(2^n x - m)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq m < 2^n$. Zeigen Sie:

(a) Die $f_{n,m}$ bilden zusammen mit der konstanten Funktion $\mathbf{1}$ ein Orthonormalsystem.

(b) $W := \mathbb{C} \cdot \mathbf{1} \oplus \bigoplus\limits_{n,m} \mathbb{C} \cdot f_{n,m}$ liegt dicht in $L^2([0,1])$ bezüglich der L^2-Norm.

Hinweis zu b): Zeigen Sie nacheinander: (i) $W' = \mathbb{R} \cdot \mathbf{1} \oplus \bigoplus_{n,m} \mathbb{R} \cdot f_{n,m}$ ist ein Verband und punktetrennend, (ii) für jedes $g \in C_c([0,1], \mathbb{C})$ sind jeweils Real- und Imaginärteil von g wegen Satz 8.12 Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von $g_k \in W'$ und (iii) verwenden Sie: $C_c([0,1], \mathbb{C})$ liegt dicht in $L^2([0,1])$ wegen Lemma 8.6.

Bemerkung: Die Definition

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist aus technischen Gründen günstiger, führt aber zu den selben L^2-Äquivalenzklassen. Im Folgenden wird diese alternative Definition verwendet.

Lösung:

Orthogonalität: Wir zeigen, dass $\langle 1, f_{n,m} \rangle$ und $\langle f_{n,m}, f_{n',m'} \rangle$ für $(n,m) \neq (n',m')$ verschwinden. Die Funktion $f_{n,m}$ hat Träger in $(m2^{-n}, (m+1)2^{-n}]$.

(a) $\langle \mathbf{1}, f_{n,m} \rangle = \int_0^1 f_{n,m} \mathrm{d}x = 2^{n/2}(\frac{1}{2}2^{-n} - \frac{1}{2}2^{-n}) = 0$.

(b) Für $n = n'$ und $m \neq m'$ haben $f_{n,m}$, $f_{n',m'}$ disjunkte Träger, also $\langle f_{n,m}, f_{n',m'} \rangle = 0$.

(c) Sei nun oBdA $n > n'$. Auf dem offenen Intervall $(m2^{-n}, (m+1)2^{-n})$ nimmt $f_{n',m'}$ einen konstanten Wert c an. Also gilt wie oben

$$\langle f_{n,m}, f_{n',m'} \rangle = \int_{m2^{-n}}^{(m+1)2^{-n}} f_{n,m} f_{n',m'} \mathrm{d}x = c \int_{m2^{-n}}^{(m+1)2^{-n}} f_{n,m} \mathrm{d}x = c \cdot 0 = 0.$$

Normierung: Es ist klar, dass $\|\mathbf{1}\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^1 1^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{1} = 1$. Es ist auch klar, dass

$$\|f_{n,m}\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f_{n,m}|^2 \mathrm{d}x = \int_{m2^{-n}}^{(m+1)2^{-n}} (2^{n/2})^2 \mathrm{d}x = 2^{-n}(m+1-m) \cdot 2^n = 1.$$

Treppenfunktionen: Wir zeigen zunächst, dass für ganze n, k mit $0 \leq k < 2^n$ die charakteristische Funktion $g_{n,k}$ des halboffenen Intervalls $(k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}]$ in W' liegt. Wir verwenden vollständige Induktion über n:

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $g_{0,0} = \mathbf{1} \in W'$.

Induktionsannahme: Angenommen $g_{n,k} \in W'$ für alle $k = 0, \ldots, 2^n - 1$.

Induktionsschritt: Sei $k = 0, \ldots, 2^{n+1} - 1$ beliebig.

Falls k gerade, so ist $2g_{n+1,k} = g_{n,k/2} + 2^{-n/2} \cdot f_{n,k/2} \in W'$.
Falls k ungerade, so ist $2g_{n+1,k} = g_{n,(k-1)/2} - 2^{-n/2} \cdot f_{n,(k-1)/2} \in W'$.

Verbandseigenschaft: Nach Konstruktion ist $W' = \mathbb{R} \cdot \mathbf{1} \oplus \bigoplus_{n,m} \mathbb{R} \cdot f_{n,m}$ ein reeller Vektorraum. Sei nun $f \in W'$ eine endliche Linearkombination aus $\mathbf{1}$ und den $f_{n,m}$. Für geeignetes $n' \in \mathbb{N}_0$ und alle $k = 0, \ldots, 2^{n'} - 1$ ist $|f|$ konstant auf den halboffenen Intervallen $(k \cdot 2^{-n'}, (k+1) \cdot 2^{-n'}]$. Also ist $|f|$ Linearkombination aus $\mathbf{1}$ und den $g_{n',k}$.

Punktetrennend: Seien $0 \leq x < y \leq 1$ und $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Wähle $n \in \mathbb{N}_0$ so groß, dass $|x - y| < 2^{-n}$. Wähle $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$x < k\, 2^{-n} < y.$$

Die Funktion $f_{x,y} = a\mathbf{1} + (b-a)(g_{n,k} + \cdots + g_{n,2^n-1})$ hat die gewünschten Eigenschaften: $f_{x,y}(x) = a$, $f_{x,y}(y) = b$ und $f_{x,y}$ ist jeweils stetig in einer Umgebung von x und von y.

Approximation von $C_c([0,1])$-Funktionen: Nach Satz 8.12 gibt es zu jedem reellwertigen $f \in C_c([0,1])$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $g \in W'$, sodass $\|f - g\|_\infty = \sup_x |f(x) - g(x)| < \epsilon$.

Der komplexwertige Fall: Sei $f \in C_c([0,1], \mathbb{C})$ beliebig mit Realteil $\mathrm{Re}(f)$ und Imaginärteil $\mathrm{Im}(f)$ in $C_c([0,1])$ und sei $\epsilon > 0$. Nach dem letzten Schritt gibt es dann g_1 und g_2 in W' mit $\|\mathrm{Re}(f) - g_1\|_\infty < \epsilon/2$ und $\|\mathrm{Im}(f) - g_2\|_\infty < \epsilon/2$. Also gibt es $g = g_1 + ig_2 \in W$ mit $\|g - f\|_\infty \leq \|g_1 - \mathrm{Re}(f)\|_\infty + \|g_2 - \mathrm{Im}(f)\|_\infty < \epsilon$.

Normabschätzung: Ab jetzt gehen wir zu L^2-Äquivalenzklassen über und verwenden für beschränkte messbare quadrat-integrierbare $g \in \mathcal{L}^2([0,1])$ die Abschätzung:

$$\|[g]\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |g|^2 \mathrm{d}x \leq \sup_x |g(x)|^2 = \|g\|_\infty^2.$$

Vollständigkeit: Sei $f \in L^2([0,1])$ und $\epsilon > 0$ fest gegeben. Dann gibt es nach Satz 8.6 im Skript ein $g \in C_c([0,1], \mathbb{C})$ mit $\|f - g\|_{L^2} < \epsilon/2$. Nach dem obigen Schritt gibt es ein $h \in W$ mit $\|g - h\|_{L^2} \leq \|g - h\|_\infty < \epsilon/2$, also $\|f - h\|_{L^2} < \epsilon$ und W dicht in $L^2([0,1])$.