Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker III **Blatt 4**

Prof. Dr. R. Weissauer Wintersemester 2014
Mirko Rösner Abgabe bis 14.11.14 um 11:15 in den Übungskästen in INF 288

Wir betrachten das Lebesgue-Integral zum Standardintegral auf $B = C_c(X)$ für $X \subseteq \mathbb{R}^k$ mit $k \geq 1$.

1. Aufgabe: (3 Punkte) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer reellwertiger Funktionen in $M(X)$ mit

$$\forall x \in X: \ f(x) := \sup_n f_n(x) < \infty.$$

Zeigen Sie: Dies definiert eine messbare Funktion $f \in M(X)$.

2. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie: Für reelles $\alpha < k$ ist

$$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad x \mapsto \|x\|^{-\alpha}$$

in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^k)$, also lokal Lebesgue-integrierbar.

3. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Zeigen Sie: Der Grenzwert $\lim\limits_{m\to\infty} \int_{-m}^{m} f(x)\, \mathrm{d}x$ existiert in $\mathbb{R}$ für $m \in \mathbb{N}_{>0}$ und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & x = 0, \\ \sin(2\pi x)/(2\pi x) & x \neq 0, \end{cases}$$

aber f ist nicht Lebesgue-integrierbar über $\mathbb{R}$.
Hinweis: Sie können verwenden, dass f stetig ist.

4. Aufgabe: (2+3=5 Punkte) Zeigen Sie:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \exp(-x^2)$ ist Lebesgue-integrierbar mit $I(f) > 0$,

(b) berechnen Sie $(I(f))^2 = \pi$ in Polarkoordinaten.