

Für natürliches $n \geq 2$ ist die Oberflächenform auf der Sphäre $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\sigma_{n-1} = \sum_{i=1}^n x_i * dx_i = - \sum_{i=1}^n x_i (-1)^i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n).$$

Das $L^2(S^{n-1})$ -Skalarprodukt ist gegeben durch $\langle f, g \rangle_{L^2(S^{n-1})} = \int_{S^{n-1}} \bar{f}(x) g(x) \sigma_{n-1}$ für stetige komplexwertige Funktionen $f, g \in C(S^{n-1}, \mathbb{C})$.

1. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die Cartan-Ableitung von σ_{n-1} .
- (b) Berechnen Sie die Cartan-Ableitung von $\frac{\sigma_{n-1}}{r^n}$ in $A^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.
- (c) Zeigen Sie $\text{vol}(S^{n-1}) = n \cdot \text{vol}(E^n)$ für die Einheitskugel $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.
Hinweis: Satz von Stokes.

2. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Zeigen Sie:

- (a) $\langle x_1, 1 \rangle_{L^2(S^{n-1})} = 0$,
- (b) $\langle x_1, x_2 \rangle_{L^2(S^{n-1})} = 0$,
- (c) Der Ausdruck $\langle x_i, x_i \rangle_{L^2(S^{n-1})}$ ist unabhängig von $i = 1, \dots, n$.

Hinweis: Verwenden Sie jeweils Lemma 9.5. Wählen Sie für (a) $M(x) = (-x_1, -x_2, x_3, \dots, x_n)$ und für (b) $M(x) = (x_2, -x_1, x_3, \dots, x_n)$.

3. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die homogenen harmonischen Polynome $P_{l,k} \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^3)$ für $l = 1$ und $k = -1, 0, 1$. Hinweis: §§5.10, 5.11 im Skript und $\mathcal{H}_1 = \mathcal{P}_1$.
- (b) Zeigen Sie: $\langle P_{1,k}, P_{1,k'} \rangle_{L^2(S^{n-1})} = 0$ für $k \neq k'$.
- (c) Zeigen Sie: $\langle P_{1,k}, 1 \rangle_{L^2(S^{n-1})} = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.

4. Aufgabe: (4 Bonuspunkte) Berechnen Sie $\langle x_1, x_1 \rangle_{S^{n-1}}$.