

1. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Betrachten Sie auf $C^\infty(\mathbb{R})$ den linearen Operator

$$A_- : f(x) \mapsto \partial_x f(x) + 2\pi x \cdot f(x).$$

Zeigen Sie:

(a) $A_- = e^{-\pi x^2} \partial_x e^{\pi x^2},$

(b) $\ker A_- = \mathbb{R} \cdot e^{-\pi x^2}.$

2. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$ im Schwartz-Raum. Zeigen Sie:

(a) $\frac{1}{2\pi i} \partial_{y_j} (\mathcal{F}f(x))(y) = \mathcal{F}(x_j f(x))(y),$

(b) $-y_j (\mathcal{F}f(x))(y) = \mathcal{F}(\frac{1}{2\pi i} \partial_{x_j} f(x))(y).$

3. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Auf $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ sind die Drehimpulsoperatoren

$$L_1 = x_3 \partial_2 - x_2 \partial_3, \quad L_2 = x_1 \partial_3 - x_3 \partial_1, \quad L_3 = x_2 \partial_1 - x_1 \partial_2,$$

und $L_\pm = L_2 \mp iL_3$ sowie $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$.

(a) Berechnen Sie zwei der Kommutatoren:

$$[L_i, \Delta], [L_2, L_3], [L_i, L^2], [L_+, L_-], [L_+, L_1].$$

(b) Zeigen Sie $L^2 = -(iL_1)^2 + (iL_1) + L_- L_+.$

4. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Hermite-Polynome $H_n \in \mathbb{R}[x]$

$$H_n(x) = c(n) \cdot e^{2\pi x^2} \partial_x^n (e^{-2\pi x^2}),$$

mit Konstanten $c(n) \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) H_n ist ein Polynom vom Grad n ,

(b) die Funktionen $f_n(x) = H_n(x) \cdot e^{-\pi x^2}$ sind orthogonal in $L^2(\mathbb{R})$,

(c) bestimmen Sie $c(n)$ mit $\|f_n\|_{L^2} = 1$.

5. Aufgabe: (4 Bonuspunkte) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, $n \geq 1$ im Schwartzraum eine Lösung der Wellengleichung

$$\square f = 0.$$

Zeigen Sie: Dann ist $f = 0$. Hinweis: Fouriertransformation und Aufgabe 2.

6. Aufgabe: (2+2+3+2=9 Bonuspunkte) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\text{loc}}(M)$ mit

$$\Delta F_{u \, dx} = 0.$$

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass $F_{u \, dx}$ glatt ist. Sei dazu $\xi \in M$ ein fester Punkt und sei $N = B_r(\xi)$, $r > 0$, eine offene Kugel um ξ mit $B_{2r}(\xi) \subseteq M$. Dann gibt es ein $f \in C_c^\infty(M)$ mit $f|_N \equiv 1$ und Träger in $B_{2r}(\xi)$ (Satz über die Partitionen der Eins). Die Fundamentallösung der Poisson-Gleichung sei $E : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Für $(x, y) \in N \times M$ mit $x \neq y$ setzen wir

$$w(x, y) = \Delta_y ((1 - f(y))E(x - y)).$$

Zeigen Sie:

- (a) Für $y \in N$ ist $w(x, y) = 0$, also gibt es eine glatte Fortsetzung $w \in C^\infty(N \times M)$.
- (b) $v_N(x) = \int_M u(y)w(x, y)dy$ definiert eine glatte Funktion $v_N \in C^\infty(N)$.
- (c) Es gilt $\int_M v_N(x)g(x)dx = \int_M u(x)g(x)dx$ für alle $g \in C_c^\infty(N)$.
- (d) Es gibt ein $v \in C^\infty(M)$ mit $F_{v \, dx} = F_{u \, dx}$.

Hinweise: (b) Vertauschungssatz 4.32 (c) Satz von Fubini (d) Verheften der lokal eindeutig definierten Funktionen v_N .

Frohe Weihnachten!