

## 1 Verbandstheorie

**1. Aufgabe:** (a) Sei  $f \in C(\mathbb{R})$  eine stetige Funktion. Wenn  $\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx = 0$  für alle Testfunktionen  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  gilt, dann ist bereits  $f \equiv 0$ .

(b) Sei  $f \in C([a, b])$  stetig auf einem Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  für  $a < b$ . Wir nehmen an: Für alle Testfunktionen  $\varphi \in C^1([a, b])$  mit  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$  gilt  $\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = 0$ . Zeigen sie:  $f$  ist konstant.

**2. Aufgabe:** Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine nichtleere Teilmenge mit  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Zeigen Sie, dass  $C_c(X)$  die Axiome eines Verbandes erfüllt.

**3. Aufgabe:** Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 3.20 im Skript<sup>1</sup> durch einen expliziten Beweis der folgenden Aussagen:

(a) Die Definition  $I^+(g) := \sup I(g_n)$  für  $g_n \nearrow g$  hängt nicht von der konkreten Wahl der Folge  $(g_n)_n$  ab.

(b) Es gilt  $I^+(g) = I(g)$  für  $g \in B(X)$ .

(c)  $I^+ : B^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist semilinear.

(d) Seien  $g_{ij} \nearrow g_i$  monoton konvergente Funktionenfolgen in  $B(X)$  für festes  $i$  und  $j \rightarrow \infty$ . Zeigen Sie für  $F_n = \max_{i+j=n} g_{ij}$ , dass  $F_n \in B(X)$  und dass  $F_n \nearrow f$  monoton konvergiert.

**4. Aufgabe:** Zeigen Sie für eine beliebige Funktion  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ :

(a)  $f \in C_c(\mathbb{Z})$  genau dann, wenn  $f(n) = 0$  für alle bis auf endlich viele  $n \in \mathbb{Z}$ . [Sie sollen hier insbesondere zeigen, dass  $f$  immer stetig ist.]

(b)  $I(f) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$  ist ein abstraktes Integral auf  $C_c(\mathbb{Z})$ .

**5. Aufgabe:** Seien  $f_n, f \in C_c(\mathbb{R})$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  sodass  $f_n \nearrow f$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gibt es eine folgenkompakte Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{R}$  sodass  $f_n(x) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und alle  $x \in \mathbb{R} \setminus K$ .

**6. Aufgabe:** Für eine Funktion  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir eine Treppenfunktion  $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\bar{f}(x) = f(\lfloor x \rfloor)$ . Hier ist  $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$  die Gaußklammer. Zeigen Sie für  $f \in C_c(\mathbb{Z})$ :

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n).$$

<sup>1</sup>Lemma 3.21 in der gebundenen Version vom 15. April 2014.

## 2 Lebesgue-Integration

Wir betrachten das Lebesgue-Integral zum Standardintegral  $I$  auf  $B(\mathbb{R}) = C_c(\mathbb{R})$ .

**7. Aufgabe:** Zeigen Sie:

- (a) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x_i) = 1$  für endlich viele  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , und  $f(x) = 0$  für alle anderen  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ . Dann ist  $f \in L(\mathbb{R})$  mit  $I(f) = 0$ .
- (b) Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $g(x) = 1$  für  $x \in \mathbb{Q}$  und  $g(x) = 0$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dann ist  $g$  Lebesgue-integrierbar mit  $I(g) = 0$ .

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Beppo-Levi und beginnen Sie mit  $n = 1$ . Sie dürfen verwenden, dass  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist.

**8. Aufgabe:** Zeigen Sie: Für reelles  $\alpha < -1$  ist

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x < 1, \\ x^\alpha & x \geq 1 \end{cases}$$

Lebesgue-integrierbar. Berechnen Sie das Lebesgue-Integral  $I(f)$ .

**9. Aufgabe:** Der Grenzwert  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^m f(t) dt$  existiert in  $\mathbb{R}$  für  $m \in \mathbb{N}_{>0}$  und

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & t < 1, \\ (-1)^n/n & n \leq t < n+1 \text{ mit } n \in \mathbb{N}_{>0}, \end{cases}$$

aber  $f$  ist nicht Lebesgue-integrierbar über  $\mathbb{R}$ .

Hinweis: Wäre  $f$  Lebesgue-integrierbar, dann auch  $|f|$ .

**10. Aufgabe:** Für eine Funktion  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir eine Treppenfunktion  $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\bar{f}(x) = f(\lfloor x \rfloor)$ . Hier ist  $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$  die Gaußklammer. Zeigen Sie für  $f \in C_c(\mathbb{Z})$ :

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n).$$

**11. Aufgabe:** Zeigen Sie die Standardabschätzung  $I(|f|) \geq |I(f)|$  für jede Lebesgue-integrierbare Funktion  $f \in L(X)$ .

Hinweis: Betrachten Sie  $f^+(x) = \max(f(x), 0)$  und  $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ .

**12. Aufgabe:** Seien  $X \subseteq \mathbb{R}$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}^k$  nichtentartete folgenkompakte Quader. Sei  $f(x, y) : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig oft stetig partiell differenzierbar nach  $x$  [das bedeutet  $(\partial_x)^n f$  existiert und ist stetig auf  $X \times Y$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ ]. Zeigen Sie:

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_Y f(x, y) dy$$

ist beliebig oft stetig partiell differenzierbar nach  $x$  und es gilt

$$(\partial_x)^n F(x) = \int_Y (\partial_x)^n f(x, y) dy.$$

Hinweis: Insbesondere ist  $f$  stetig und hat kompakten Träger. Verwenden Sie vollständige Induktion über  $n$ .

**13. Aufgabe:** Der Grenzwert  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-m}^m f(x) dx$  existiert in  $\mathbb{R}$  für  $m \in \mathbb{N}_{>0}$  und

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & x = 0, \\ \sin(2\pi x)/(2\pi x) & x \neq 0, \end{cases}$$

aber  $f$  ist nicht Lebesgue-integrierbar über  $\mathbb{R}$ . Hinweis:  $f$  ist stetig.

**14. Aufgabe:** Zeigen Sie:

- (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \exp(-x^2)$  ist Lebesgue-integrierbar mit  $I(f) > 0$ ,
- (b) berechnen Sie  $(I(f))^2 = \pi$  in Polarkoordinaten.

### 3 Reihen

Auf  $f \in C_c(\mathbb{N}_0)$  ist ein abstraktes Integral über die endliche Summe  $I(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} f(n)$  definiert. Für  $C_c(\mathbb{Z})$  ist analog das abstrakte Integral  $I$  gegeben durch  $I(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$ .

**15. Aufgabe:** Zeigen Sie für  $B = C_c(\mathbb{Z})$ :

- (a) Die monotone Hülle  $B^+$  ist die Menge aller Funktionen  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  mit  $f(n) \geq 0$  für alle bis auf endlich viele  $n \in \mathbb{Z}$ .
- (b) Die Fortsetzung  $I^+$  ist für  $f \in B^+$  gegeben durch  $I^+(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \in \mathbb{R}^+$ .

Definition: Für das zugehörige Lebesgue-Integral von  $f \in L(\mathbb{N}_0)$  schreiben wir symbolisch

$$I(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Statt “ $f$  ist Lebesgue-integrierbar” sagen wir auch “ $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$  ist absolut konvergent”. [Für  $\mathbb{Z}$  statt  $\mathbb{N}_0$  gilt das entsprechende.]

**16. Aufgabe:** Für  $q \in \mathbb{R}$  mit  $0 < q < 1$  ist  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  absolut konvergent mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Hinweis: Geometrische Summenformel und Satz von Beppo-Levi.

**17. Aufgabe:** Zeigen Sie: Jede Funktion  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  ist messbar. Folgern Sie mit Satz 6.19.6: Falls  $|f(n)| \leq F(n)$  für ein  $F \in L(\mathbb{N}_0)$ , dann ist  $f \in L(\mathbb{N}_0)$ .

**18. Aufgabe:**

Ein beliebiges  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  ist Lebesgue-integrierbar bezüglich  $I$  genau dann, wenn die Partialsummenfolge  $s_n = \sum_{k=0}^n |f(k)|$  für  $n \rightarrow \infty$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert.

**19. Aufgabe:** Sei  $(a_n)_n$  eine Folge reeller Zahlen mit  $|a_n| \leq C \cdot r^{-n}$  für feste reelle  $C, r > 0$ . Wir vereinbaren  $0^0 = 1$ . Zeigen Sie:

- (a)  $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  ist absolut konvergent für festes  $x \in (-r, r) \subseteq \mathbb{R}$ .
- (b) Sei  $0 < r' < r$  fest. Dann gibt es ein  $F \in L(\mathbb{N}_0)$  mit  $|a_n \cdot n \cdot x^{n-1}| \leq F(n)$  für alle  $x \in [-r', r']$ . Hinweis: Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es eine reelles  $C' > 0$  mit  $n \leq C' \cdot (1 + \epsilon)^n$  nach Aufgabe 3b von Blatt 3 aus dem letzten Semester (warum?).
- (c) Die Funktion  $g(x)$  ist differenzierbar in  $x \in (-r, r)$  mit der Ableitung<sup>2</sup>

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}.$$

Hinweis: Für jedes  $x \in (-r, r)$  gibt es ein  $r' < r$  mit  $|x| < r' < r$ . Verwenden Sie Satz 4.32 für  $f : [-r', r'] \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}, (x, n) \mapsto a_n \cdot x^n$ .

## 4 Nullmengen und Messbare Funktionen

Wir betrachten hier das Lebesgue-Integral zum Standardintegral  $I$  auf  $B(\mathbb{R}) = C_c(\mathbb{R})$ .

**20. Aufgabe:** Zeigen Sie: Die konstante 1-Funktion  $f(x) \equiv 1$  ist messbar auf  $X = \mathbb{R}^n$ .

**21. Aufgabe:** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer reellwertiger Funktionen in  $M(X)$  mit

$$\forall x \in X : f(x) := \sup_n f_n(x) < \infty.$$

Zeigen Sie: Dies definiert eine messbare Funktion  $f \in M(X)$ .

**22. Aufgabe:** Zeigen Sie: Für reelles  $\alpha < k$  ist

$$f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad x \mapsto \|x\|^{-\alpha}$$

in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^k)$ , also lokal Lebesgue-integrierbar.

**23. Aufgabe:** Zeigen Sie:  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ist Nullmenge in  $\mathbb{R}^2$ .

**24. Aufgabe:** Sei  $f \in L(X)$  mit  $\int_X |f(x)| dx = 0$ . Zeigen Sie:

---

<sup>2</sup>Für  $n = 0$  setzen wir dabei formal  $a_0 \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0$  für alle  $x$ .

- (a)  $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| > 1/n\}$  ist Nullmenge in  $X$  für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ,  
 (b)  $A = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$  ist Nullmenge in  $X$ .

**25. Aufgabe:** Zeigen Sie: Jede stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist lokal  $L^1$ -integrierbar.  
 Hinweis: Zeigen Sie zunächst  $\chi_K \cdot f \in L(\mathbb{R})$  für  $f \geq 0$  und ein kompaktes Intervall  $K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ .

## 5 Distributionen

**26. Aufgabe:** Für  $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$  ist die Faltung

$$g * f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^k} g(x - y)f(y) \, dy.$$

Zeigen Sie:

- (a)  $g * f = f * g$ ,  
 (b)  $g * f$  hat kompakten Träger,  
 (c)  $f * (g * h) = (f * g) * h$  für  $f, g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ .

Bemerkung: Die Differenzierbarkeit von  $g * f$  folgt aus Aufgabe 12. Wegen (b) hat  $g * f$  kompakten Träger, also ist der Ausdruck in (c) wohldefiniert.

Interpretation: Mit dem Faltungsprodukt wird  $(C_c^\infty(\mathbb{R}^k), *)$  zu einem Ring (ohne Eins).

**27. Aufgabe:** Betrachten Sie die Funktion

$$K : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto t^{-k/2} \exp(-\pi \frac{\|x\|^2}{t}).$$

- (a) Zeigen Sie  $\int_{\mathbb{R}^k} K(t, x) dx = 1$  für alle  $t > 0$ .  
 (b) Zeigen Sie  $4\pi \cdot \partial_t K(t, x) = \Delta_x K(t, x)$  für den Laplace-Operator bezüglich  $x$ .

**28. Aufgabe:** Sei  $f = \chi_{[0, \infty)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die charakteristische Funktion der nichtnegativen reellen Zahlen. Zeigen Sie:

- (a)  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , d.h.  $f$  ist lokal  $L^1$ -integrierbar, definiert also ein Funktional

$$F = F_{f dx} : C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

- (b) Bestimmen Sie die Ableitung  $\partial_x F$ .

**29. Aufgabe:** Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |x|$  und die Dirac-Distribution  $\delta_0 : \varphi \mapsto \varphi(0)$  gibt es eine reelle Konstante  $a_0 \in \mathbb{R}$  mit

$$\Delta F_{f dx} = a_0 \cdot \delta_0.$$

Berechnen Sie  $a_0 \in \mathbb{R}$ , ohne das Volumen der Einheitssphäre  $S^0 \subseteq \mathbb{R}$  zu verwenden.  
 Hinweis: Passen Sie den Beweis von Lemma 7.7 an.

**30. Aufgabe:** Die Distributionen  $\mathcal{F}(M)$  bilden einen Untervektorraum von  $\mathcal{F}_{\text{gen}}(M)$ .

**31. Aufgabe:** Für ein Funktional  $F$  auf  $C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$  und ein  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$  sei

$$(F * f)(y) := F(h_y), \quad h_y(x) = f(y - x).$$

Zeigen Sie: Falls  $F * f = 0$  für alle  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , dann ist  $F = 0$ .

**32. Aufgabe:** Zeigen Sie:

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  ist eigentlich,

(b)  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist nicht eigentlich.

**33. Aufgabe:** Zeigen Sie:  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(|x|)$  liegt in  $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ .

**34. Aufgabe:** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(\|x\|)$ . Zeigen Sie:

(a)  $(\Delta f)(x) = 0$  für  $x \neq 0$ .

(b) Die lokale Ordnung in  $\xi = 0$  des zugehörigen Funktionals ist  $d_0(F_{f \, dx}) \geq 2$ . Bemerkung: Nach Korollar 7.4 gibt es also ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $\Delta F_{f \, dx} = a \cdot \delta_0$ .

(c) Bestimmen Sie die reelle Konstante  $a$ .

Hinweis: Hier ist  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm. Zeigen Sie  $d_0(F_{f \, dx}) \geq 2 - \epsilon$  für alle  $\epsilon > 0$ .

## 6 Hilberträume

**35. Aufgabe:** Zeigen Sie für alle reellen  $a, b \in \mathbb{R}$  die Ungleichungen:

(a)  $2 \cdot |ab| \leq a^2 + b^2$ ,

(b)  $|a + b|^2 \leq 4 \cdot \max(a^2, b^2)$ .