Begriffs- und Verständnisfragen zur HöMaII

Im Folgenden ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jeweils eine offene nichtleere Teilmenge. Sie brauchen nicht erklären, wie man $\mathrm{d}x_i$ und $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ definiert. Diese Objekte haben wir als formale Symbole behandelt.

1. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_n$ eine Folge mit $x_n \in M$, die gegen ein $x \in M$ und gegen ein $y \in M$ konvergiert. Zeigen Sie $x = y$.

2. Formulieren Sie die Schwarz'sche Ungleichung.

3. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

   (a) Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge in (X, d) eine Cauchyfolge ist.

   (b) Geben Sie ein Beispiel für einen metrischen Raum (X, d) und eine Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d) an, sodass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d) <u>nicht</u> konvergiert.

4. Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte:

   (a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n}{n+2012}$;

   (b) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$;

5. Zeigen Sie: Falls $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$, dann konvergiert die Folge $(\sum_{k=0}^{n} q^k)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}$.

6. Der periodische Dualbruch $0,\overline{01}_2 = 0,010101\ldots_2$ stellt eine rationale Zahl dar. Welche?

7. Warum ist ein abgeschlossener Teilraum eines vollständigen metrischen Raumes wieder vollständig?

8. Für welche $q \in \mathbb{R}$ genau konvergiert die geometrische Folge $(q^n)_n$? Was ist dann der Grenzwert?

9. Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz und zeigen Sie, dass der Fixpunkt eindeutig bestimmt ist.

10. Zeigen Sie, dass ein abgeschlossener Teilraum eines folgenkompakten metrischen Raumes selbst wieder folgenkompakt ist.

11. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Formulieren Sie das ϵ-δ-Kriterium für Stetigkeit von f und zeigen Sie, dass daraus die Folgenstetigkeit von f folgt.

12. Zeigen Sie mit dem ϵ-δ-Kriterium: Die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig.

13. Zeigen Sie: Zu jeder positiven Zahl $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und jedem $k \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x^k = a$. Tipp: Betrachten Sie die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^k - a$ an den Stellen $x = 0$ und $x = a + 1$ und verwenden Sie den Zwischenwertsatz.

14. (a) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $f(M)$ dann immer auch ein Intervall oder gibt es Gegenbeispiele?

    (b) Geben Sie ein Beispiel für M und f an, bei dem M ein offenes und $f(M)$ ein abgeschlossenes Intervall ist.

    (c) Welche Eigenschaft hat $f(M)$, falls $M = [a, b]$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall ist?

15. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

16. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

    (a) Wie ist die Supremumsnorm $\|f\|_\infty$ definiert?

    (b) Formulieren Sie die drei Normaxiome.

    (c) Wie lautet das Cauchy-Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von beschränkten Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$?

17. (a) Formulieren Sie die Definition der Eigenschaft "stückweise stetig" für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

    (b) Sei $CT(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stückweise stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Wie ist das Integral

    $$\begin{aligned} I : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto I(f) := \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

    definiert und welche vier definierenden Eigenschaften legen das Integral eindeutig fest?

18. Welche drei Eigenschaften hat ein abstraktes Intergral auf einem Halbverband?

19. Formulieren Sie den Mittelwertsatz für eine total differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$.

20. Formulieren Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit allen Teilaussagen.

21. (a) Wann heißt eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ in $\xi \in U$ total differenzierbar? (Formulieren Sie die Definition.)

    (b) Was versteht man unter der Jacobi-Matrix $J(f; \xi)$ von f in ξ? (Formulieren Sie die Definition.)

(c) Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und $c \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax+c$ in jedem Punkt $\xi \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und berechnen Sie das (totale) Differential $Df(\xi)$.

22. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (total) differenzierbar im Punkt $\xi \in \mathbb{R}^n$ und sei $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ (total) differenzierbar im Punkt $f(\xi) \in \mathbb{R}^m$. Welche Aussage macht die Kettenregel über die Differenzierbarkeit der Funktion $g \circ f$?

23. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Falls $\xi \in U$ eine lokale Extremstelle von f ist, dann gilt $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$.

24. Formulieren Sie den Umkehrsatz mit allen Voraussetzungen.

25. Formulieren Sie den Transformationssatz mit allen Voraussetzungen.

26. Ist eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ auch total differenzierbar? Ist sie stetig total differenzierbar?

27. Wie ist der Raum der Differentialformen $A^r(U)$ mit $r \in \{0, \dots, n\}$ definiert?

28. Wie ist die Cartanableitung $\mathrm{d} : A^r(U) \to A^{r+1}(U)$ definiert?

29. Sei $\omega \in A^r(U)$ eine Differentialform. Welchen Wert hat $\mathrm{dd}\omega$?

30. Wann nennt man eine Differentialform geschlossen und wann nennt man sie exakt? Warum ist jedes $\omega \in A^n(U)$ geschlossen?

31. Formulieren Sie das Poincaré-Lemma und zeigen Sie, dass für sternförmiges U die Cartanableitung $d : A^{n-1}(U) \to A^n(U)$ für $n \geq 1$ surjektiv ist.

32. Beschreiben Sie die geschlossenen Nullformen $f \in A^0(U)$.

33. Wann ist U sternförmig?

34. Sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine glatte Kurve und sei $\omega \in A^1(U)$ eine 1-Form. Wie ist das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega$ definiert?

35. Geben Sie einen Vektorraumisomorphismus zwischen dem Raum der glatten Vektorfelder $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und dem Raum der glatten 1-Formen $A^1(\mathbb{R}^n)$ an.

36. Sei $\omega \in A^2(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$ gegeben durch $\omega(x) = \frac{x_2 \mathrm{d}x_1 - x_1 \mathrm{d}x_2}{x^2+y^2}$. Berechnen Sie $\mathrm{d}\omega$ und den Pullback $\varphi^*\omega$ entlang $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, $t \mapsto (2\cos(t), 2\sin(t))$.

37. Durch welche Eigenschaften ist die Cartan-Ableitung eindeutig festgelegt?

38. Sei $\omega \in A^2(U)$ nichtentartet und geschlossen. Wie ist die Poisson-Klammer $\{f, g\}$ für $f, g \in C^\infty(U)$ definiert? Wie lautet die zugehörige Jacobi-Identität?

39. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld mit kompaktem Träger. Durch welche Eigenschaften ist das zugehörige dynamische System $\phi_t : U \to U$ festgelegt?

40. Folgern Sie die Funktionalgleichung $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ für reelle $x, y > 0$ des natürlichen Logarithmus aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

41. Berechnen Sie folgende Integrale mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

    (a) $\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x$,

    (b) $\int_0^1 x\exp(x^2)\mathrm{d}x$ und

    (c) $\int_1^b \ln(x)\mathrm{d}x$.

42. Zeigen Sie $(\partial_1^2 + \partial_2^2)u = 0$ für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x_1, x_2) := \exp(x_1)\cos(x_2)$.