1 Grundlagen

1. Aufgabe: Sei $(K,+,\cdot,0,1)$ ein Körper der Charakteristik 0. Für natürliche Zahlen $0 \leq k \leq n$ sind die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ definiert als Koeffizienten des folgenden Polynoms in $x, y \in K$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion

(a) die Rekursionsformel $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ für $0 \leq k < n$ und $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für $n \geq 0$,

(b) die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ sind ganze Zahlen,

(c) die Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, wobei $n! = \prod_{i=1}^{n} i$ die Fakultät ist.

Aufgabenvariante:
Sei $(K,+,\cdot,0,1)$ ein Körper der Charakteristik 0. Für natürliche Zahlen $0 \leq k \leq n$ sind die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ definiert durch die Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, wobei $n! = \prod_{i=1}^{n} i$ die Fakultät ist. Zeigen Sie

(a) die Rekursionsformel $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ für $0 \leq k < n$ und $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für $n \geq 0$,

(b) folgern Sie, dass die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ ganze Zahlen sind und

(c) zeigen Sie durch vollständige Induktion die Binomialformel

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

2. Aufgabe: Sei K ein Körper und sei $1 \neq q \in K$. Zeigen Sie für $N \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

2 Angeordnete Körper

In diesem Abschnitt sei $(K,+,\cdot,0,1,P)$ ein angeordneter Körper.

3. Aufgabe: Zeigen Sie mit Hilfe der Anordnungsaxiome:

(a) Jedes Quadrat in K ist nichtnegativ, das heißt: Für jedes $x \in K$ gilt

$$x^2 \in P \cup \{0\}.$$

(b) Für alle $x_1, \dots, x_n \in K$ gilt

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0.$$

Dabei gilt $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ genau dann, wenn $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

(c) Folgern Sie, dass K Charakteristik 0 hat, das heißt: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ Summanden}} \neq 0.$$

(d) Folgern Sie: Für beliebige $x, y \in K$ gilt:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Es gilt $x^2 + y^2 = 2xy$ genau dann, wenn $x = y$.

4. Aufgabe: Es seien $x, y, u, v \in K$. Folgern Sie aus den Anordnungsaxiomen:

(a) $x < y \iff -y < -x$

(b) $x > y$ und $u > v \implies x + u > y + v$

(c) $0 < x < y \implies \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

(d) Für $x, y > 0$ gilt: $x < y \iff x^2 < y^2$.

Geben Sie in (c) und (d) ein Gegenbeispiel im Fall $x < 0$.

5. Aufgabe: Für $a, b, c, d \in K$ mit $c, d > 0$ und $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ zeigen Sie:

$$\frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}.$$

6. Aufgabe: Für $x, y \in K$ definiert man

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y, \\ y & \text{falls } x < y \end{cases} \quad \text{und } \min(x,y) = \begin{cases} y & \text{falls } x \geq y, \\ x & \text{falls } x < y. \end{cases}$$

Der Betrag von $x \in K$ ist

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie für $x, y \in K$:

(a) $\min(x,y) = -\max(-x,-y)$,

(b) $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}|x-y|$,

(c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

7. Aufgabe: (a) Es sei $x \in K$ mit $x > -1$ und $x \neq 0$. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, die Ungleichung

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

(b) Es sei $(K, >)$ ein archimedischer Körper. Zeigen Sie, dass es für alle $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, eine natürliche Zahl $n \neq 0$ aus K gibt so, dass

$$0 < \frac{1}{n} < \epsilon.$$

8. Aufgabe: Zeigen Sie für $q \in K$ mit $q > 0$ die Ungleichung $q + \frac{1}{q} \geq 2$. Dabei gilt $q + \frac{1}{q} = 2$ genau dann wenn $q = 1$.

3 Normierte Räume

In diesem Abschnitt sei $(K, <)$ ein pythagoräischer angeordneter Körper.

9. Aufgabe: Zu einer symmetrischen $n \times n$-Matrix $M = (M_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ (das heißt $M_{ij} = M_{ji} \in K$) definiert man eine quadratische Form durch die Abbildung

$$\begin{aligned} q_M : K^n \times K^n &\longrightarrow K, \\ (x,y) &\longmapsto q_M(x,y) = \sum_{i,j} x_i \, M_{ij} \, y_j. \end{aligned}$$

Die quadratische Form q_M heißt positiv definit, wenn $q_M(x,x) > 0$ für alle $0 \neq x \in K$ gilt. Zeigen Sie, dass für eine positiv definite quadratische Form q_M eine Norm auf K erklärt ist durch

$$\|x\|_M := \sqrt{q_M(x,x)},$$

indem Sie die Norm-Axiome nachweisen.

10. Aufgabe: Zu einer hermiteschen komplexen $n \times n$-Matrix $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ (das heißt $A_{ij} = \overline{A_{ji}} \in \mathbb{C}$) definiert man eine hermitesche Form durch die Abbildung[1]

$$\begin{aligned} q_A : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ (x,y) &\longmapsto q_A(x,y) = \sum_{i,j} \overline{x_i} \, A_{ij} \, y_j. \end{aligned}$$

[1] Hier ist q_A linear im zweiten Argument (Physikerkonvention).

Die hermitesche Form q_A heißt positiv definit, wenn $q_A(z,z) > 0$ für alle $0 \neq z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, dass durch q_A eine Norm auf $\mathbb{C}$ erklärt ist durch

$$\|z\|_A := \sqrt{q_A(z,z)},$$

indem Sie die Norm-Axiome nachweisen.
Bonusaufgabe: Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass aus $q_A(z,z) \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $0 \neq z \in \mathbb{C}^n$ bereits folgt, dass $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$. („Positiv definite komplexe Matrizen sind immer hermitesch.")

11. Aufgabe: Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ handelt:

(a) $\|x\| = \max_i |x_i|$,

(b) $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$,

(c) $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

12. Aufgabe: Auf $\mathbb{R}^n$ sind für reelles $1 \leq p < \infty$ die p-Normen definiert durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2.$$

Hinweis: Schwarz'sche Ungleichung.

4 Metrische Räume

In diesem Abschnitt sei $(K, <)$ ein archimedisch angeordneter Körper.

13. Aufgabe: Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie für $a, b, c \in M$, dass

$$|d(a,b) - d(b,c)| \leq d(a,c).$$

14. Aufgabe: Entscheiden Sie, ob folgende Beispiele für eine Menge M und eine Funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$ jeweils metrische Räume (M, d) definieren:

(a) Eine nichtleere Menge M mit $d(x,y) = 1$ für $x \neq y$ und $d(x,y) = 0$ für $x = y$.

(b) $M = \mathbb{R}^n$ mit $d(x,y) = \sum_{i=1}^n \sqrt{|x_i - y_i|}$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(c) $M = \mathbb{R}^n$ mit $d(x,y) = \|x-y\|$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig und $d(x,y) = \|x\|+\|y\|$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.

4.1 Konvergenz und Cauchy-Konvergenz in metrischen Räumen

15. Aufgabe: Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Eine Teilfolge einer Cauchyfolge in (M, d) ist wieder eine Cauchyfolge.

(b) Eine Teilfolge einer konvergenten Folge in (M, d) ist wieder eine konvergente Folge und hat den selben Grenzwert wie die ursprüngliche Folge.

(c) Eine Cauchyfolge mit einer konvergenten Teilfolge in (M, d) konvergiert selbst.

16. Aufgabe: Sei $C \in K$ mit $C > 1$ und sei $p \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq N$ gilt $C^n > p(n)$.

17. Aufgabe: Wir betrachten einen archimedisch angeordneten Körper K als metrischen Raum mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ für $x, y \in K$. Zeigen Sie, dass diese Folgen in K gegen Null konvergieren:

(a) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ mit $a_n = 1/n$.

(b) Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ mit $b_n = q^n \cdot n^k$ für eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ und ein festes $q \in K$ mit $|q| < 1$. Hinweis: Man finde eine Konstante $C > 1$ mit $|b_n/b_{n+1}| > C$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

(c) Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ mit $c_n = C^n/n!$ für ein beliebiges $C \in K$.

4.2 Topologie eines metrischen Raumes

18. Aufgabe: Sei (M, d) ein metrischer Raum. Mit $B_\epsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n | d(x, y) < \epsilon\}$ bezeichnen wir die Kugel um ein $x \in M$ mit Radius $\epsilon > 0$. Eine Teilmenge $\mathcal{O} \subseteq M$ heißt *offen in M*, wenn zu jedem $x \in \mathcal{O}$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $B_\epsilon(x) \subseteq \mathcal{O}$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen in M*, wenn für jede in M konvergente Folge mit Folgengliedern in A gilt, dass auch der Grenzwert in A liegt. Zeigen Sie:

(a) Ein $A \subseteq M$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $M \backslash A$ offen ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Teilmenge von M an, die offen und abgeschlossen ist.

(c) Für jedes $\epsilon > 0$ und $z \in M$ ist die Kugel $B_\epsilon(z)$ offen in M.

(d) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine abzählbare Familie offener Teilmengen von M. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i=1}^\infty X_i$ offen ist. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i=1}^N X_i$ offen ist für jedes natürliche $N \in \mathbb{N}$.

(e) Sei nun $M = \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$. Geben Sie ein Beispiel an für offene $X_1, X_2, \ldots$ in $\mathbb{R}$ sodass $\bigcap_{i=1}^\infty X_i$ nicht offen ist.

19. Aufgabe: Zeigen Sie:

(a) Ein folgenkompakter metrischer Raum ist vollständig.

(b) Eine abgeschlossene Teilmenge eines folgenkompakten metrischen Raumes ist folgenkompakt.

(c) Eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist selbst vollständig.

20. Aufgabe: Sei (M, d) ein metrischer Raum, wobei die nichtleere Menge M nur endlich viele Elemente enthält. Zeigen Sie, dass (M, d) folgenkompakt ist.

21. Aufgabe: (Satz 1.29 im Skript) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des euklidischen Raums. Zeigen Sie, dass A genau dann folgenkompakt ist, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

5 Algebra und Gruppentheorie

22. Aufgabe: Sei K ein Körper und sei I_n die Einheitsmatrix der Stufe n. Sei J die $2n \times 2n$-Matrix $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Zeigen Sie, dass $O(n, K) = \left\{A \in GL(n, K) \mid {}^tA\, I_n\, A = I_n\right\}$ eine Gruppe definiert (orthogonale Gruppe).

(b) Zeigen Sie, dass $Sp(2n, K) = \left\{A \in GL(2n, K) \mid {}^tA\, J_{2n}\, A = J_{2n}\right\}$ eine Gruppe definiert (symplektische Gruppe).

23. Aufgabe: Für quadratische $n \times n$-Matrizen A, B über einem Körper K ist der Kommutator erklärt durch $[A, B] = AB - BA$. Zeigen Sie die Jacobi-Identität:

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0. \tag{1}$$

Seien A, B schiefsymmetrische $n \times n$ Matrizen über einem Körper K, das heißt ${}^tA = -A$ und ${}^tB = -B$. Zeigen Sie, dass dann auch $[A, B]$ schiefsymmetrisch ist. Bestimmen Sie die Diagonalelemente A_{ii} für $1 \leq i \leq n$.

24. Aufgabe: (1+2=3 Punkte) Bestimmen Sie die K-Dimension der folgenden K-Vektorräume, indem Sie eine Basis angeben.

(a) Der Raum $K[X]_{\leq n}$ der Polynome in X mit Grad $\leq n$.

(b) Der Raum $K[X, Y]_{\leq n}$ der Polynome in X und Y mit Totalgrad $\leq n$. Hinweis: Der Totalgrad eines Polynomes $f(X, Y) = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j \neq 0$ in zwei Variablen X und Y ist $\text{grad} f := \max\{i + j \mid a_{ij} \neq 0\}$.

(c) Der Raum $K[\theta_1, \ldots, \theta_n]$ der Polynome in n antikommutierenden Variablen θ_i. Antikommutierend heißt $\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i$ für $1 \leq i, j \leq n$. Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\theta_i \theta_i = 0$.

25. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Sei $R^\bullet = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} R^i$ ein $\mathbb{N}_0$-graduierter Ring. Eine Derivation $D : R^\bullet \to R^\bullet$ (bzw. Superderivation $A : R^\bullet \to R^\bullet$) ist eine graderhaltende additive Abbildung, die

$$D(r\cdot s) = D(r)\cdot s + r\cdot D(s) \qquad (\text{bzw. } A(r\cdot s) = A(r)\cdot s + (-1)^{ij} r\cdot A(s))$$

für $r \in R^i, s \in R^j$ erfüllt. Zeigen Sie für Derivationen D_1, D_2 und Superderivationen A_1, A_2:

(a) $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ ist eine Derivation,

(b) $[A_1, A_2] = A_1 \circ A_2 - A_2 \circ A_1$ ist eine Derivation,

(c) $[A_1, D_2] = A_1 \circ D_2 - D_2 \circ A_1$ ist eine Superderivation.

6 Reelle Zahlen

26. Aufgabe: Sei $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

27. Aufgabe: Sei $m \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass für jedes reelle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < 1$ eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ existiert, sodass

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{m^{k+1}}.$$

Bemerkung: Insbesondere sollen Sie die Konvergenz in $\mathbb{R}$ zeigen.
Demonstrieren Sie an einem Beispiel, dass die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ nicht immer eindeutig bestimmt ist.

7 Infimum und Supremum

28. Aufgabe: Bestimmen Sie Supremum und Infimum folgender Teilmengen von $\mathbb{R}$:

(a) $A = \{\frac{n}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$,

(b) $B = \{\frac{n^2}{2^n} \,|\, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$, (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $n^2/2^n \leq 1$ für $n \geq 4$.)

(c) $C = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \leq 2\}$.

29. Aufgabe: (3 Punkte) Für nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sei $A + B := \{a + b \,|\, a \in A \text{ und } b \in B\}$. Zeigen Sie:

$$\sup(A) + \sup(B) = \sup(A + B).$$

8 Stetigkeit

30. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie:

(a) Die Summe $f + g$ ist stetig,

(b) das Produkt fg ist stetig.

Folgern Sie daraus, dass jede Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ stetig ist.

31. Aufgabe: (4 Punkte) Seien (M, d) und (N, d) metrische Räume und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) f ist stetig im Sinne von Definition 2.1 im Skript,

(b) für alle abgeschlossenen $A \subseteq N$ ist das Urbild $f^{-1}(A) = \{m \in M \mid f(m) \in A\}$ abgeschlossen in M.

32. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie, dass das Bild $f([a, b])$ des folgenkompakten Intervalls $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ wieder ein folgenkompaktes Intervall $[c, d] = f([a, b])$ ist.
Hinweis: Setzen Sie $c = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ und $d = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$. Zeigen Sie zunächst, dass c und d in $f([a, b])$ enthalten sind. Folgern Sie dann, dass auch jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $c < y < d$ in $f([a, b])$ liegt.

33. Aufgabe: (2 Punkte) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

34. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Zeigen Sie mit dem ϵ-δ-Kriterium, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$$

stetig ist. Zeigen Sie außerdem, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.

35. Aufgabe: (2+3=5 Punkte) Sei (M, d) ein metrischer Raum und $N \subseteq M$ eine nichtleere Teilmenge. Man definiert den Abstand eines Punktes $x \in M$ zu N als $d(x, N) = \inf_{y \in N} d(x, y)$. Zeigen Sie:

(a) Für abgeschlossenes A gilt: $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.

(b) Die Distanzfunktion $M \to \mathbb{R},\ x \mapsto d(x, N)$ ist Lipschitz-stetig.

36. Aufgabe: (1+1+2+2=6 Punkte) Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $A \subseteq M$ eine abgeschlossene Teilmenge und sei $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $f_n(x) = (\max\{0, (1 - d(x, A))\})^n \cdot f(x)$ ist stetig für $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ ist monoton fallend, das heißt $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $x \in M$.

(c) Für jedes $x \in M$ existiert der Grenzwert $g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ und es gilt

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

(d) Demonstrieren Sie an einem Beispiel, dass g nicht notwendig stetig ist.

37. Aufgabe: (1+2+2=5 Punkte) Sei $I = [-C, C] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $C > 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Zeigen Sie:

(a) f_n ist stetig und beschränkt, liegt also in $C(I)$.

(b) Die Folge $(f_n)_n$ ist eine Cauchyfolge in $C(I)$ bezüglich der Supremumsnorm. Der gleichmäßige Grenzwert $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ existiert daher in $C(I)$.

(c) Der punktweise Grenzwert $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ existiert für beliebige $x \in \mathbb{R}$. Dies definiert eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

38. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

(a) Zeigen Sie für eine beliebige Nullfolge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}$ mit $x_n \neq 0$, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existiert.

(b) Zeigen Sie, dass der Grenzwert unabhängig ist von der konkreten Wahl der Nullfolge $(x_n)_n$.

Man kann also f eindeutig zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}$ fortsetzen.

39. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nehmen an, es gibt Funktionenfolgen $(g_n)_n$ und $(h_n)_n$ mit $g_n, h_n \in C([0,1])$, sodass $g_n \searrow f$ monoton fallend und $h_n \nearrow f$ monoton steigend jeweils punktweise gegen f konvergieren. Zeigen Sie: Dann ist f stetig. Folgern Sie:

$$C([0,1]) = C([0,1])^+ \cap C([0,1])^-.$$

9 Integration

40. Aufgabe: Für einen metrischen Raum (M, d) und eine Teilmenge $N \subseteq M$ sei die charakteristische Funktion $\chi_N : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\chi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in N, \\ 0 & \text{für } x \in M\backslash N. \end{cases}$$

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie, dass $\chi_{[a,b]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht stetig ist.

(b) Zeigen Sie für $N_1, N_2 \subseteq M$, dass $\chi_{N_1} + \chi_{N_2} = \chi_{N_1\cup N_2} + \chi_{N_1\cap N_2}$.

(c) Zeigen Sie für $N_1, N_2 \subseteq M$, dass $\chi_{N_1}\chi_{N_2} = \chi_{N_1 \cap N_2}$.

41. Aufgabe: Sei $T(\mathbb{R}^n)$ die Menge der Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $T(\mathbb{R}^n)$ mit punktweiser Addition und Multiplikation eine Algebra bildet.

42. Aufgabe: Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert man $x^\alpha := \exp(\alpha \log(x))$. Zeigen Sie die Potenzgesetze:

(a) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(b) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

43. Aufgabe: Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert man $\log_a(b) := \frac{\log(b)}{\log(a)}$. Zeigen Sie:

(a) $\log_a(b_1 b_2) = \log_a(b_1) + \log_a(b_2)$ für $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_{>0}$,

(b) $\log_a(b)\log_b(c) = \log_a(c)$ für $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$.

44. Aufgabe: Seien $Q_1, Q_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader. Zeigen Sie: $Q_1 \cap Q_2$ ist Quader.

45. Aufgabe: Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie für das Euklidische Standardintegral die Translationsinvarianz:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + x_0)\mathrm{d}x.$$

46. Aufgabe: (Landau-Notation) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ zulässig, sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in Q$ und sei $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Wir schreiben formal:

$$f(x) = o(\|x - a\|^\alpha) \quad \text{(für } x \to a\text{)},$$

falls für jede in Q konvergente Folge $(x_n)_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n \neq a$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{\|x_n - a\|^\alpha} = 0.$$

(Vorsicht: Die Notation suggeriert nur eine Gleichheit.) Zeigen Sie:

(a) Falls $f(x) = o(\|x-a\|^\alpha)$ (für $x \to a$) für ein $\alpha \in \mathbb{N}_0$, dann auch $f(x) = o(\|x-a\|^\beta)$ (für $x \to a$) für jedes $\beta \in \mathbb{N}_0$ mit $\beta < \alpha$.

(b) Falls $f_1(x) = o(\|x - a\|^\alpha)$ und $f_2(x) = o(\|x - a\|^\beta)$ (für $x \to a$), dann $(f_1 f_2)(x) = o(\|x - a\|^{\alpha+\beta})$ (für $x \to a$).

47. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Zeigen Sie für stückweise stetige $f \in CT(\mathbb{R}^n)$:

(a) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x + x_0)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$ für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

(b) $\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_2, x_1)\,\mathrm{d}x$ für $n = 2$.

Hinweis: Zeigen Sie dies zunächst für Treppenfunktionen.

48. Aufgabe: (5 Punkte) Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ stetig mit kompaktem Träger und sei $L \in GL(n, \mathbb{R})$ ein linearer Automorphismus. Zeigen Sie die Substitutionsformel

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathrm{d}y = |\det L| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(Lx)\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Formel zunächst für Elementarmatrizen und verwenden Sie die Aussagen der vorigen Aufgabe. Sie können dann aus der Linearen Algebra die Aussage verwenden, dass jedes $L \in GL(n, \mathbb{R})$ ein Produkt von Elementarmatrizen ist.

10 Differentiation

49. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Für $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definiert man die vektorwertige Funktion $(f, g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x \mapsto (f(x), g(x))$.

(a) Bestimmen Sie die totale Ableitung $D(m)$ von $m \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $m(a, b) = a \cdot b$.

(b) Wenden Sie die Kettenregel auf $fg = m \circ (f, g) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ an, um die Produktregel $D(fg) = gDf + fDg$ zu zeigen.

50. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $(\frac{\partial}{\partial x}h)(0, y) = -y$ und $(\frac{\partial}{\partial y}h)(x, 0) = x$,

(b) $(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}h)(0, 0) = -1$ und $(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}h)(0, 0) = 1$.

Bemerkung: Die partiellen Ableitungen sind hier also nicht vertauschbar.

51. Aufgabe: Zeigen Sie für $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dass $D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg$ und $D(fg) = g(Df) + fDg$.

52. Aufgabe: Zeigen Sie $D(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ für alle $\alpha \in \mathbb{Z}$. Hinweis: benutzen Sie die vorherige Aufgabe und reduzieren Sie auf den Fall $\alpha = -1, 0, 1$.

53. Aufgabe: Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie $D(1/f)(\xi) = -(Df)(\xi)/(f^2(\xi))$ im Fall $f(\xi) \neq 0$. Hinweis: Kettenregel

54. Aufgabe: Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$ differenzierbar im Punkt $\xi = (0, 0)$?

55. Aufgabe: Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0) = 0$ und $f(t) = \exp(-\frac{1}{t})$ für $t > 0$. Zeigen sie: f ist unendlich oft differenzierbar in $t = 0$ mit Ableitungen $f^{(\nu)}(0) = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$. Hinweis: Benutze Sie ohne Beweis, dass $g(x) = \exp(x)$ differenzierbar ist mit $\exp(x)' = \exp(x)$.

56. Aufgabe: Berechnen Sie $\int_1^x \log(x)dx$.

57. Aufgabe: Berechnen Sie $D(x^\alpha)$ und Δr^α für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ unter der Annahme dass exp diffbar ist mit $\exp(x)' = \exp(x)$.

58. Aufgabe: Zeigen Sie, dass es eine eindeutige differenzierbare Funktion $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft $e' = e$ und $e(0) = 1$. Zeigen Sie, dass exp mit der Umkehrfunktion des Logarithmus übereinstimmt.

Sie können ab jetzt die Produkt- und Kettenregel als bekannt voraussetzen.

59. Aufgabe: Man zeige: Die Menge $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der stetig differenzierbaren Funktionen bildet einen reellen Vektorraum, aber keinen Verband.

60. Aufgabe: (3 Punkte) Bestimmen Sie mit Beweis die Ableitung der Monomfunktion $p_n : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl ist. Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Ableitungen für $n = -1, 0, 1$ und verwenden Sie dann die Produktregel.

61. Aufgabe: (2+2+1=5 Punkte)

(a) Seien $u, v \in C^1([a,b])$ für reelle $a < b$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\int_a^b u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^n \exp(-t)\mathrm{d}t$ für $n \in \mathbb{N}$. Sie dürfen verwenden, dass $\exp' = \exp$ und dass $\lim_{t\to\infty} t^n \exp(-t) = 0$.

(c) Bestimmen Sie $\int_1^x \log(t)\mathrm{d}t$.

62. Aufgabe: (2+2=4 Punkte)

(a) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $Df = 0$ in Q. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(b) Zeigen Sie damit $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

63. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Bestimmen Sie mit Beweis die Ableitungen von

(a) $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$,

(b) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$.

Verwenden Sie die Definitionen von log und exp aus der Vorlesung.

64. Aufgabe: (4 Punkte) Für die euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ schreiben wir $r := \|x\|$. Bestimmen Sie mit Beweis die totale Ableitung von $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto r^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

65. Aufgabe: (4 Punkte) Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf einer zulässigen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $g(\xi) \neq 0$ für ein $\xi \in U$. Beweisen Sie die Quotientenregel:

$$D(f/g)(\xi) = \frac{g(\xi)Df(\xi) - f(\xi)Dg(\xi)}{g^2(\xi)}.$$

66. Aufgabe: (2+2+1+2=7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die totale Ableitung Df der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (\cos(y)\exp(x), \sin(y)\exp(x)).$$

(b) Zeigen Sie, dass es zu jedem $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung $\xi_0 \in V \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Umgebung $f(\xi_0) \in W \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt, sodass $f|_V : V \to W$ bijektiv ist mit differenzierbarer Umkehrfunktion. [Sie brauchen V und W nicht konkret angeben.]

(c) Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist.

(d) Geben Sie eine differenzierbare bijektive Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, deren Umkehrfunktion nicht überall differenzierbar ist. [Mit Begründung.]

11 Differentialformen

67. Aufgabe: (4 Punkte) Berechnen Sie den Pullback $\phi^*(\omega) \in A^1(\mathbb{R}^3)$ der Differentialform $\omega \in A^1(\mathbb{R}^2)$, $\omega(y) = y_1 \mathrm{d}y_2 - y_2 \mathrm{d}y_1$ entlang

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_3).$$

68. Aufgabe: (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Cartan-Ableitung $\mathrm{d}\omega$ der Differentialform

$$\omega \in A^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}),\ \omega(x_1, x_2) = \frac{x_1 \mathrm{d}x_2 - x_2 \mathrm{d}x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

(b) Berechnen Sie $\varphi^*\omega$ entlang $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $t \mapsto (\cos(t + t_0), \sin(t + t_0))$ für festes $t_0 \in \mathbb{R}$.

69. Aufgabe: (4 Punkte) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ von

$$\omega \in A^1(\mathbb{R}^n),\ \omega(x) = \sum_{i=1}^n x_i \mathrm{d}x_i$$

entlang des Weges $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $t \to (t^1, t^2, \ldots, t^n)$.

70. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie, dass das Gebiet

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^3 < y^2\} \quad \text{bzw.} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < x^2 + y^2 < 2\}$$

in $\mathbb{R}^2$ sternförmig ist. Hinweis: Machen Sie sich eine Skizze.

71. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ betrachten wir die Differentialform $\sigma_{n-1} \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, gegeben durch

$$\sigma_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x_k \, \mathrm{d}x_{\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x_k \, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{\mathrm{d}x_k} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

[Dabei wird jeweils der Term $\mathrm{d}x_k$ weggelassen.]

(a) Berechnen Sie $\mathrm{d}\sigma_{n-1}$,

(b) bestimmen Sie das (nichtlokale) dynamische System $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zum Drehfeld $L_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1$,

(c) zeigen Sie $\varphi_t^*(\sigma_{n-1}) = \sigma_{n-1}$ für obiges φ_t,

(d) berechnen Sie die Lie-Ableitung $L_X(\sigma_{n-1})$ für das Feld $X = L_{12}$.