

1. Aufgabe: (1+1+1=3 Punkte) Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq 1$ setzt man $\log_a(b) := \frac{\log(b)}{\log(a)}$. Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert man $x^\alpha := \exp(\alpha \log(x))$. Zeigen Sie:

- (a) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- (b) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$,
- (c) $\log_a(b) \log_b(c) = \log_a(c)$ für $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$, $a, b \neq 1$.

2. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nehmen an, es gibt Funktionenfolgen $(g_n)_n$ und $(h_n)_n$ mit $g_n, h_n \in C([0, 1])$, sodass $g_n \searrow f$ monoton fallend und $h_n \nearrow f$ monoton steigend jeweils punktweise gegen f konvergieren. Zeigen Sie: Dann ist f stetig. Folgern Sie:

$$C([0, 1]) = C([0, 1])^+ \cap C([0, 1])^-.$$

3. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei K ein Körper der Charakteristik $\text{char } K \neq 2$, das heißt $1+1 \neq 0$. Bestimmen Sie die Dimension der folgenden K -Vektorräume von homogenen Polynomen, indem Sie eine Basis angeben.

- (a) Der Raum $K[X, Y]_n$ besteht aus den homogenen Polynomen in zwei kommutierenden Variablen vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$.
- (b) Der Raum $K[\theta_1, \dots, \theta_m]$ besteht aus den Polynomen in $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ antikommutierenden Variablen $\theta_1, \dots, \theta_m$. (Antikommutierend heißt $\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i$ für alle i, j). Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\theta_i \theta_i = 0$. Wenn Sie die Polynome konkret hinschreiben möchten, dürfen Sie $m \leq 4$ annehmen.

4. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Zeigen Sie für stückweise stetige $f \in CT(\mathbb{R}^n)$:

- (a) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x + x_0) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}^n$,
- (b) $\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_2, x_1) dx$ für $n = 2$.

Hinweis: Zeigen Sie dies zunächst für Treppenfunktionen.

5. Aufgabe: (5 Punkte) Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ stetig mit kompaktem Träger und sei $L \in GL(n, \mathbb{R})$ ein linearer Automorphismus. Zeigen Sie die Substitutionsformel

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = |\det L| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(Lx) dx.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Formel zunächst für Elementarmatrizen und verwenden Sie die Aussagen der vorigen Aufgabe. Sie können dann aus der Linearen Algebra die Aussage verwenden, dass jedes $L \in GL(n, \mathbb{R})$ ein Produkt von Elementarmatrizen ist.