Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker II **Blatt 4**

Prof. Dr. R. Weissauer — Sommersemester 2014
Mirko Rösner — Abgabe bis 09.05.14 um 11:15 in INF 288.

---

1. Aufgabe: (3+2=5 Punkte)

(a) Sei (M, d) ein metrischer Raum, wobei die nichtleere Menge M nur endlich viele Elemente enthält. Zeigen Sie, dass (M, d) folgenkompakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass ein folgenkompakter metrischer Raum vollständig ist.

2. Aufgabe: (2+1=3 Punkte) Sei $m \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass für jedes reelle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < 1$ eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ existiert, sodass

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{m^{k+1}}.$$

Bemerkung: Insbesondere sollen Sie die Konvergenz in $\mathbb{R}$ zeigen.
Demonstrieren Sie an einem Beispiel, dass die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ nicht immer eindeutig bestimmt ist.

3. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Bestimmen Sie das Supremum folgender Teilmengen von $\mathbb{R}$:

(a) $A = \{\frac{n}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$,

(b) $B = \{\frac{n^2}{2^n} \,|\, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$. Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $n^2/2^n \leq 1$ für $n \geq 4$.

4. Aufgabe: (3 Punkte) Für nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sei $A + B := \{a + b \,|\, a \in A \text{ und } b \in B\}$. Zeigen Sie:

$$\sup(A) + \sup(B) = \sup(A + B).$$

5. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei K ein Körper, sei I_n die Einheitsmatrix der Stufe n und sei J die $2n \times 2n$-Matrix $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie, dass folgende Mengen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bilden:

(a) $O(n, K) = \left\{A \in GL(n, K) \,\middle|\, {}^tA\, I_n\, A = I_n\right\}$ (orthogonale Gruppe),

(b) $Sp(2n, K) = \left\{A \in GL(2n, K) \,\middle|\, {}^tA\, J_{2n}\, A = J_{2n}\right\}$ (symplektische Gruppe).
