

Sei $(K, <)$ ein archimedisch angeordneter Körper.

1. Aufgabe: (2+1+2=5 Punkte) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Mit $B_\epsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon\}$ bezeichnen wir die Kugel um ein $x \in M$ mit Radius $\epsilon > 0$. Eine Teilmenge $\mathcal{O} \subseteq M$ heißt *offen in M* , wenn zu jedem $x \in \mathcal{O}$ ein $\epsilon > 0, \epsilon \in K$ existiert, sodass $B(x, \epsilon) \subseteq \mathcal{O}$. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt *abgeschlossen in M* , wenn für jede in M konvergente Folge mit Folgengliedern in A gilt, dass auch der Grenzwert in A liegt. Zeigen Sie:

- (a) Ein $A \subseteq M$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $M \setminus A$ offen ist.
- (b) Geben Sie ein Beispiel für eine Teilmenge von M an, die offen und abgeschlossen ist.
- (c) Für jedes $\epsilon > 0$ und $z \in M$ ist die Kugel $B_\epsilon(z)$ offen in M .

Hinweis: Die leere Menge ist offen in M , da die Bedingung “zu jedem $x \in \emptyset \dots$ ” nicht nachgeprüft werden kann. Sie können außerdem annehmen, dass M nichtleer ist.

2. Aufgabe: (3 Punkte) Zeigen Sie:

Eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist selbst vollständig.

3. Aufgabe: (2+3+3=8 Punkte) Wir betrachten K als metrischen Raum mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ für $x, y \in K$. Zeigen Sie, dass diese Folgen in K gegen Null konvergieren:

- (a) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ mit $a_n = 1/n$.
- (b) Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ mit $b_n = q^n \cdot n^k$ für eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ und ein festes $q \in K$ mit $|q| < 1$. Hinweis: Man finde eine Konstante $0 < C < 1$ mit $|b_{n+1}/b_n| < C$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.
- (c) Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ mit $c_n = C^n/n!$ für ein beliebiges $C \in K$. Hinweis: Man fixiere ein n_0 mit $n_0 > C$ und betrachte $|c_n/c_{n_0}|$ für $n > n_0$.

Sie können verwenden, dass die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ für $q \in K$ mit $|q| < 1$ gegen Null konvergiert. Das wird am Mittwoch in der Vorlesung erläutert.

4. Aufgabe: (2+2=4 Punkte)

- (a) Für quadratische Matrizen A, B über einem Körper K ist der Kommutator erklärt durch $[A, B] = AB - BA$. Zeigen Sie die Jacobi-Identität:

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

- (b) Seien A, B schiefsymmetrische $n \times n$ -Matrizen über einem Körper K , das heißt ${}^tA = -A$ und ${}^tB = -B$. Zeigen Sie, dass auch $[A, B]$ schiefsymmetrisch ist. Bestimmen Sie die Diagonalelemente A_{ii} für $1 \leq i \leq n$.