Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker II **Blatt 2**

Prof. Dr. R. Weissauer Sommersemester 2014

Mirko Rösner Abgabe bis 28.04.14 um 11:15, in INF 288 rechts neben HS2.

Sei $(K, <)$ ein angeordneter pythagoräischer Körper.

1. Aufgabe: (1+1+2=4 Punkte) Für natürliche Zahlen $0 \leq k \leq n$ sind die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ definiert als Koeffizienten des folgenden Polynoms:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion

(a) die Rekursionsformel $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ für $0 \leq k < n$ und $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für $n \geq 0$,

(b) die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ sind ganze Zahlen,

(c) die Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, wobei $n! = \prod_{i=1}^{n} i$ die Fakultät ist.

2. Aufgabe: (2 Punkte) Sei $1 \neq q \in K$. Zeigen Sie für $N \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

3. Aufgabe: (4 Punkte) Zu einer symmetrischen $n \times n$-Matrix M mit $M_{ij} = M_{ji} \in K$ definiert man eine quadratische Form durch die Abbildung

$$\begin{aligned} q_M : K^n \times K^n &\longrightarrow K, \\ (x,y) &\longmapsto \sum\nolimits_{i,j} x_i \, M_{ij} \, y_j. \end{aligned}$$

Die quadratische Form q_M heißt positiv definit, wenn $q_M(x,x) > 0$ für alle $0 \neq x \in K^n$ gilt. Zeigen Sie durch Nachweis der Normaxiome, dass für eine positiv definite quadratische Form q_M eine Norm auf K^n erklärt ist durch

$$\|x\|_M := \sqrt{q_M(x,x)}.$$

4. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Auf K^n sind für $p = 1$ und $p = 2$ die p-Normen definiert durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad \text{für } x \in K^n.$$

Zeigen Sie für alle $x \in K^n$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Schwarz'sche Ungleichung. Bemerkung: Für $K = \mathbb{R}$ definiert man analoge p-Normen für reelle $1 \leq p < \infty$.

5. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei (M, d) ein nichtleerer metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Eine Teilfolge einer Cauchyfolge in (M, d) ist wieder eine Cauchyfolge.

(b) Eine Teilfolge einer konvergenten Folge in (M, d) ist wieder eine konvergente Folge und hat den selben Grenzwert wie die ursprüngliche Folge.
