1. Aufgabe: (2+2+1+2=7 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die totale Ableitung
- Df
- der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (\cos(y) \exp(x), \sin(y) \exp(x)).$$

- (b) Zeigen Sie, dass es zu jedem $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung $\xi_0 \in V \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Umgebung $f(\xi_0) \in W \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt, sodass $f|_V : V \rightarrow W$ bijektiv ist mit differenzierbarer Umkehrfunktion $(f|_V)^{-1} : W \rightarrow V$. [Sie brauchen V und W nicht konkret angeben.]
- (c) Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist.
- (d) Geben Sie eine differenzierbare bijektive Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, deren Umkehrfunktion nicht überall differenzierbar ist. [Mit Begründung.]

Antwort:

- (a) Die totale Ableitung in
- $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
- ist gegeben durch die Jacobimatrix

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \cos(y_0) \exp(x_0) & -\sin(y_0) \exp(x_0) \\ \sin(y_0) \exp(x_0) & \cos(y_0) \exp(x_0) \end{pmatrix}$$

- (b) Die Jacobideterminante ist $\det Df(x_0, y_0) = \exp(x_0)^2 \neq 0$, also ist die Jacobimatrix im Punkt $\xi_0 = (x_0, y_0)$ invertierbar. Der Umkehrsatz liefert jetzt die Existenz von V und W mit den geforderten Eigenschaften. Alternativ kann man konkret $V = \mathbb{R} \times (y_0 - \pi, y_0 + \pi)$ und $W = f(V)$ wählen.
- (c) Die Funktion ist nicht injektiv, da $f(0, 0) = f(0, 2\pi)$.
- (d) Die Funktion $g(x) = x^3$ hat die erforderlichen Eigenschaften. Differenzierbarkeit von g ist klar (da Polynom), Injektivität folgt aus der strengen Monotonie. Zur Surjektivität: Erstens wächst g über alle Schranken [Bernoulli-Ungleichung: $g(1+C) \geq 1 + 3C \geq C$ für alle $C > 0$] und zweitens wird nach dem Zwischenwertsatz jedes $y \in [0, g(1+C)]$ angenommen. Das Bild enthält also $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Aufgrund der Punktsymmetrie enthält das Bild auch $\mathbb{R}_{\leq 0}$ und damit ist g surjektiv. Wäre g^{-1} überall differenzierbar, dann wäre $(g^{-1})'(g(0)) \cdot g'(0) = \text{id}'(0) = 1$ nach Kettenregel. Aber es gilt $g'(0) = 0$.

2. Aufgabe: (2+2+2+1=7 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ betrachten wir die Differentialform $\sigma_{n-1} \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, gegeben durch

$$\sigma_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x_k dx_{\{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x_k dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \wedge \dots \wedge dx_n.$$

[Dabei wird jeweils der Term dx_k weggelassen.]

- (a) Berechnen Sie die Cartanableitung $d\sigma_{n-1}$,
- (b) bestimmen Sie das (nichtlokale) dynamische System $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zum Drehfeld $L_{12} = x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1$,

- (c) zeigen Sie $\varphi_t^*(\sigma_{n-1}) = \sigma_{n-1}$ für obiges φ_t ,
 (d) berechnen Sie die Lie-Ableitung $L_X(\sigma_{n-1})$ für das Feld $X = L_{12}$.

Antwort:

- (a) Es gilt $d\sigma_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} dx_k \wedge dx_{\{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} = nd_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.
 (b) Man definiert $\phi_t(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\cos(t)x_1 - \sin(t)x_2, \sin(t)x_1 + \cos(t)x_2, x_3, \dots)$ und rechnet die geforderten Eigenschaften nach. [Tun Sie das.]
 (c) Das kann man im Prinzip direkt ausrechnen. Alternativ benutzt man, dass der Pullback mit dem Euklidischen Stern-Operator (siehe Lemma 9.4 im Skript vom 04.07.) und der Cartan-Ableitung vertauscht:

$$\phi_t^*(\sigma_{n-1})(x) = \phi_t^*\left(\sum_{k=1}^n x_k dx_k\right) = \phi_t^*\left(\frac{1}{2}d\|x\|^2\right) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}d\|\phi_t(x)\|^2 = \frac{1}{2}d\|x\|^2 = \sigma_{n-1}(x).$$

- (d) Die Lieableitung ist $L_X(\sigma_{n-1}) = \frac{d}{dt}\phi_t^*(\sigma_{n-1})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\sigma_{n-1})|_{t=0} = 0$. Alternativ kann man die Cartan-Formel $L_X(\sigma_{n-1}) = (d\iota_X + \iota_X d)\sigma$ verwenden.

3. Aufgabe: (6 Punkte) Sei $R^\bullet = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} R^i$ ein $\mathbb{N}_0$ -graduierter Ring. Eine Superderivation D auf $R^\bullet$ vom Grad $m \in \mathbb{N}_0$ ist eine additive Abbildung

$$D : R^\bullet \rightarrow R^\bullet$$

mit $D(R^i) \subseteq R^{i+m}$ für alle i und mit

$$D(r \cdot s) = D(r) \cdot s + (-1)^{m_i} r \cdot D(s)$$

für $r \in R^i, s \in R^j$. Der Superkommutator von zwei Superderivationen D_1 und D_2 vom Grad m_1 bzw. m_2 ist

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - (-1)^{m_1 m_2} D_2 \circ D_1.$$

Zeigen Sie, dass $[D_1, D_2]$ eine Superderivation vom Grad $m_1 + m_2$ ist.

Antwort:

Sei $x \in R^i$ ein homogenes Element, dann ist $D_1(D_2(x)) \in R^{i+m_1+m_2}$ und analog $D_2(D_1(x)) \in R^{i+m_1+m_2}$, also $[D_1, D_2](x) \in R^{i+m_1+m_2}$. Für $r \in R^i$ und $s \in R^j$ gilt:

$$\begin{aligned} & D_1(D_2(r \cdot s)) \\ &= D_1(D_2(r)s + (-1)^{im_2} r D_2(s)) \\ &= D_1(D_2(r)s) + (-1)^{im_2} D_1(r D_2(s)) \\ &= D_1(D_2(r)) \cdot s + (-1)^{m_1(i+m_2)} D_2(r) \cdot D_1(s) \\ &\quad + (-1)^{im_2} (D_1(r) \cdot D_2(s)) + (-1)^{i(m_1+m_2)} r \cdot D_1(D_2(s)) \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned} & D_2(D_1(r \cdot s)) \\ &= D_2(D_1(r)) \cdot s + (-1)^{m_2(i+m_1)} D_1(r) \cdot D_2(s) \\ &\quad + (-1)^{im_1} (D_2(r) \cdot D_1(s)) + (-1)^{i(m_1+m_2)} r \cdot D_2(D_1(s)) \end{aligned}$$

Nach Kürzen der mittleren Terme erhält man:

$$[D_1, D_2](r \cdot s) = [D_1, D_2](r) \cdot s + (-1)^{i(m_1+m_2)} r \cdot [D_1, D_2](s).$$

Also ist $[D_1, D_2]$ ein Superkommutator vom Grad $m_1 + m_2$.