

1. Aufgabe: (2+2+1+2=7 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die totale Ableitung Df der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (\cos(y) \exp(x), \sin(y) \exp(x)).$$

- (b) Zeigen Sie, dass es zu jedem $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung $\xi_0 \in V \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Umgebung $f(\xi_0) \in W \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt, sodass $f|_V : V \rightarrow W$ bijektiv ist mit differenzierbarer Umkehrfunktion $(f|_V)^{-1} : W \rightarrow V$. [Sie brauchen V und W nicht konkret angeben.]
- (c) Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist.
- (d) Geben Sie eine differenzierbare bijektive Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, deren Umkehrfunktion nicht überall differenzierbar ist. [Mit Begründung.]

2. Aufgabe: (2+2+2+1=7 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ betrachten wir die Differentialform $\sigma_{n-1} \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, gegeben durch

$$\sigma_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x_k dx_{\{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x_k dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

[Dabei wird jeweils der Term dx_k weggelassen.]

- (a) Berechnen Sie die Cartanableitung $d\sigma_{n-1}$,
- (b) bestimmen Sie das (nichtlokale) dynamische System $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zum Drehfeld $L_{12} = x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1$,
- (c) zeigen Sie $\varphi_t^*(\sigma_{n-1}) = \sigma_{n-1}$ für obiges φ_t ,
- (d) berechnen Sie die Lie-Ableitung $L_X(\sigma_{n-1})$ für das Feld $X = L_{12}$.

3. Aufgabe: (6 Punkte) Sei $R^\bullet = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} R^i$ ein $\mathbb{N}_0$ -graduierter Ring. Eine Superderivation D auf $R^\bullet$ vom Grad $m \in \mathbb{N}_0$ ist eine additive Abbildung

$$D : R^\bullet \rightarrow R^\bullet$$

mit $D(R^i) \subseteq R^{i+m}$ für alle i und mit

$$D(r \cdot s) = D(r) \cdot s + (-1)^{mi} r \cdot D(s)$$

für $r \in R^i, s \in R^j$. Der Superkommutator von zwei Superderivationen D_1 und D_2 vom Grad m_1 bzw. m_2 ist

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - (-1)^{m_1 m_2} D_2 \circ D_1.$$

Zeigen Sie, dass $[D_1, D_2]$ eine Superderivation vom Grad $m_1 + m_2$ ist.

Die Übungsblätter sind erhältlich unter

<http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/MathPhys2SoSe14/>