

1. Aufgabe: (2+2+1=5 Punkte)

- (a) Seien $u, v \in C^1([a, b])$ für reelle $a < b$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\int_a^b uv' \, dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b vu' \, dx.$$

- (b) Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^n \exp(-t) dt$ für $n \in \mathbb{N}$. Sie dürfen verwenden, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n \exp(-t) = 0$.
- (c) Bestimmen Sie $\int_1^x \log(t) dt$ für $x \in \mathbb{R}_{>1}$.

2. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0) = 0$ und $f(t) = \exp(-\frac{1}{t})$ für $t > 0$. Zeigen sie: f ist unendlich oft differenzierbar in $t = 0$ mit Ableitungen $f^{(\nu)}(0) = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$.

3. Aufgabe: (2 Punkte) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega$ zur 1-Form

$$\omega \in A^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}), \quad \omega(x, y) = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

entlang $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4b vom letzten Blatt.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^{2n}$ bezeichnet man die Koordinaten auch durch $(x_1, \dots, x_{2n}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. Zeigen Sie für die Liouville-2-Form $\omega = \sum_{\nu=1}^n dq_\nu \wedge dp_\nu$ die Gleichung

$$\frac{1}{n!} \omega^n = dq_1 \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dq_n \wedge dp_n.$$

Dabei ist $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ das n -fache $\wedge$ -Produkt.

5. Aufgabe: (2+3=5 Punkte) Die geschlossene Differentialform

$$\omega \in A^2(\mathbb{R}^n), \quad \omega(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$$

sei nicht entartet; das bedeutet, die Inverse $(\omega^{ij}(x))_{i,j} = (\omega_{ij}(x))_{i,j}^{-1}$ der antisymmetrischen ergänzten Koeffizientenmatrix existiert für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Zeigen Sie für $1 \leq \nu, i, j \leq n$ die Formel

$$\partial_\nu \omega^{ij} = - \sum_{a,b=1}^n \omega^{ia} \partial_\nu (\omega_{ab}) \omega^{bj}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $\partial_\nu (\sum_{a=1}^n \omega^{ia} \omega_{ab})$.

- (b) Die Poissonklammer von $f, g \in C^\infty(U)$ ist $\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^n (\partial_i f) \omega^{ij} (\partial_j g)$. Zeigen Sie für $f, g, h \in C^\infty(U)$ die Jacobi-Identität

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$