

Höhere Mathematik für Physiker III

WS 2012/13

Protokoll Zentralübung

Mirko Rösner

In der Zentralübung wurden die folgenden Themen behandelt:

17.10.12 Motivation zu Differentialformen

- Wiederholung der Begriffe *Vektorfeld* (stetige Abbildung $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$) und *Skalarfeld* (stetige Abbildung $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$),
- Wiederholung der Differentialoperatoren div , rot und grad in $\mathbb{R}^3$. Man zeigt leicht: $\text{rot} \circ \text{grad} = 0$ und $\text{div} \circ \text{rot} = 0$ für zweimal stetig differenzierbare Felder.
- Wiederholung der Begriffe *Potentialfeld* und *konservatives Kraftfeld*
- Definition: Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt *sternförmig*, wenn es einen ausgezeichneten Punkt $x_0 \in U$ gibt, sodass für jedes $x \in U$ auch die Verbindungsstrecke $\overline{xx_0}$ in U liegt. Der Punkt x_0 darf dabei nicht von x abhängen. Dies ist ein Spezialfall für *einfach zusammenhängende Mengen*.
 - Es gibt ein *Skalarpotential* für rotationsfreie Felder $\mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf sternförmigen Mengen: $\text{rot } \mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \exists \phi$ sodass $\text{grad } \phi = \mathbf{E}$.
 - Es gibt ein *Vektorpotential* für divergenzfreie Felder $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf sternförmigen Mengen: $\text{div } \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sodass $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$.
- Eichfreiheit:
 - Obiges Skalarpotential ist nur eindeutig bis auf Transformationen $\phi \rightarrow \phi + c$ für eine Konstante c . Die reellen Zahlen bilden also die *Eichgruppe* des Skalarpotentials.
 - Obiges Vektorpotential ist nur eindeutig bis auf Transformationen $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \text{grad } (\psi)$ für ein Skalarfeld ψ . Die Skalarfelder (modulo Konstanten) bilden also die Eichgruppe des Vektorpotentials.

- Falls das Feld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein konservatives Kraftfeld ist (also falls $\text{rot } \mathbf{F} = 0$), dann beschreibt das zugehörige Potentialfeld die potentielle Energie. Das Vorzeichen in $-\text{grad } \phi = F$ ist Konvention. Im Allgemeinen müssen Potentialfelder nicht die Dimension einer Energie haben.
- Die obigen Aussagen lassen sich einheitlich in der Sprache der Differentialformen formulieren. Bitte lesen Sie dazu das Weissauer-Skript Abschnitt 4.12 Seiten 67/68. Wesentliche Begriffe sind: Raum der alternierenden Formen $\bigwedge^r(\mathbb{R}^n)$, Raum der Differentialformen $A^r(U)$ für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, Cartanableitung $d : A^r(U) \rightarrow A^{r+1}(U)$. Warum ist $\dim \bigwedge^r(\mathbb{R}^n) = 0$, falls $r > n$? Warum ist $d \circ d = 0$?

24.10.2012 Differentialformen

- 1. Korrektur zur Vorlesung: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein zusammenhängendes Gebiet (Gebiete sind per Definition immer zusammenhängend) und sei $f \in C^\infty(U)$ eine Funktion mit $df = 0$. Dann ist f konstant.

Für den Beweis kann man zum Beispiel den Mittelwertsatz benutzen.

- 2. Korrektur zur Vorlesung: Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann kann man $dx_1, \dots, dx_n$ als zugehörige Basis des Dualraums interpretieren, definiert durch $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$ (Kroneckerdelta). Man kann dann $dx_i \wedge dx_j$ definieren als alternierende Bilinearform: Für $v, u \in \mathbb{R}^n$ setzt man $dx_i \wedge dx_j(v, u) := dx_i(v)dx_j(u) - dx_i(u)dx_j(v) = \det \begin{pmatrix} dx_i(v) & dx_j(v) \\ dx_i(u) & dx_j(u) \end{pmatrix}$. Damit ist $dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit der Eigenschaft $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. Dies lässt sich auf höhere Stufen verallgemeinern und liefert eine konkrete Konstruktion der Räume $\bigwedge^r(\mathbb{R}^n)$.
- Der in der Zentralübung gewählte Einstieg beginnt dagegen damit, dx_i und die $dx_i \wedge dx_j$ als formale Symbole zu akzeptieren, die die gewünschten Relationen erfüllen: $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ (Antikommutativität) und $dx_i \wedge (dx_j + \lambda dx_k) = dx_i \wedge dx_j + \lambda dx_i \wedge dx_k$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ (Distributivität).
- Für $r \in \mathbb{N}_{>0}$ ist der Raum der alternierenden Multilinearformen r -ter Stufe

$$\bigwedge^r(\mathbb{R}^n) := \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \mathbb{R} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Er hat die Dimension $\dim \bigwedge^r(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Für uns ist das jetzt noch ein abstrakter Vektorraum, der von einer Basis aus formalen Symbolen aufgespannt wird. Formal setzt man $\bigwedge^0(\mathbb{R}^n) := \mathbb{R}$.

- Um Schreibarbeit zu sparen, benutzt man oft eine Kurznotation: Sei

$$I := \{i_1, \dots, i_r \mid i_1 < \dots < i_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

eine Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$ mit r verschiedenen Elementen. Dann setzt man $dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$. Die Reihenfolge der $i_1, \dots, i_r$ ist dabei durch die Ordnung festgelegt. Diese Notation wird im Skript benutzt und dort axiomatisch eingeführt. Dann ist

$$\bigwedge^r(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=r}} \mathbb{R} dx_I.$$

Hier bezeichnet $|I|$ die Anzahl der Elemente von I .

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer. Der Raum der *glatten Differentialformen r -ter Stufe* (auch kurz *r -Formen* genannt) ist

$$A^r(U) := \left\{ \omega : U \rightarrow \bigwedge^r(\mathbb{R}^n) \mid \omega \text{ ist } C^\infty\text{-differenzierbar} \right\}.$$

Eine Differentialform $\omega \in A^r(U)$ schreibt man gewöhnlich in Komponenten als $\omega(x) = \sum_{|I|=r} \omega_I(x) dx_I$. Dabei nennt man die $\omega_I \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ die Koeffizientenfunktionen. Das Element dx_I sollte man sich in diesem Kontext als “infinitesimales” orientiertes Volumenelement vorstellen; was “infinitesimal” bedeuten soll, können wir jedoch mit unseren Mitteln gar nicht formulieren.

Insbesondere ist $A^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$ der Raum der glatten Funktionen auf U .

- Die *Cartan-Ableitung* (auch *äußere Ableitung* genannt) ist eine lineare Abbildung

$$d : A^r(U) \rightarrow A^{r+1}(U),$$

definiert durch

$$d\omega(x) := \sum_{|I|=r} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_I.$$

- Die bekannten Differentialoperatoren grad, rot und div für $n = 3$ lassen sich durch die Cartanableitung ausdrücken. Sie entsprechen (in dieser Reihenfolge) den Abbildungen

$$A^0(U) \xrightarrow{d} A^1(U) \xrightarrow{d} A^2(U) \xrightarrow{d} A^3(U).$$

- Die Hintereinanderausführung $d \circ d : A^r(U) \rightarrow A^{r+2}(U)$ ergibt Null. Dies lässt sich elementar ausrechnen, man benutzt den Satz von Schwartz.
- Definition:
 - Eine Form $\omega \in A^r(U)$ heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$.
 - Eine Form $\omega \in A^r(U)$ heißt *exakt*, wenn es eine Form $\eta \in A^{r-1}(U)$ gibt, die $d\eta = \omega$ erfüllt.

Die Menge der geschlossenen r -Formen ist also der Kern von $d : A^r(U) \rightarrow A^{r+1}(U)$ und die Menge der exakten Formen ist das Bild von $d : A^{r-1}(U) \rightarrow A^r(U)$. Exakte 0-Formen kann es nach Definition nicht geben. Alle n -Formen sind geschlossen, da $A^{n+1}(U) = \{0\}$.

- Da $d \circ d = 0$, sind exakte Formen immer geschlossen.
- Das Poincaré-Lemma besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen auch die Umkehrung gilt:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Sterngebiet.

- Falls $r > 0$, dann ist eine Form $\omega \in A^r(U)$ geschlossen genau dann, wenn sie exakt ist.
- Eine Form $\omega \in A^0(U)$ ist geschlossen genau dann, wenn sie konstant ist.

Beweis: Siehe Skript Abschnitt 4.13.

- Zum Üben: Seien $\omega \in A^r(U)$ und $\eta \in A^s(U)$. Wie drückt man $\omega \wedge \eta \in A^{r+s}(U)$ in Komponenten aus und warum gilt $\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega$?

31.10.2012 Maxwell-Gleichungen in Differentialformen

Die Zentralübung kann hier nur grob die wesentlichen Begriffe anreißen. Den zukünftigen theoretischen Physikern rate ich, sich mit der Sprache der Differentialformen und ihrer Anwendung auf den Elektromagnetismus vertraut zu machen. Lesen Sie beispielsweise das Elektrodynamik-Skript von Martin Zirnbauer. Der Differentialformenkalkül ist auch in anderen Bereichen der Physik (wie Thermodynamik, ART, Yang-Mills-Theorie, ...) ein wesentliches Hilfsmittel. Ein ganz entscheidender Vorteil von Differentialformen ist die Beschreibung von Koordinatenwechseln durch Pullbacks, dazu sind wir heute leider nicht mehr gekommen.

Im Weissauer-Skript werden Maxwell-Gleichungen in Abschnitt 5.8 behandelt.

- Obwohl die Sprache der Differentialformen koordinateninvariant ist, fixieren wir zunächst ein Inertialsystem, das Laborsystem, und beginnen mit den Maxwellgleichungen, wie sie in der Experimentalphysik formuliert werden:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} &= \mathbf{j}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}$$

Dabei sind $\mathbf{D}$ und $\mathbf{B}$ die elektrische und magnetische Flussdichte, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ sind die elektrische und magnetische Feldstärke. Mit ρ wird die Ladungsdichte und mit $\mathbf{j}$ wird die Stromdichte bezeichnet.

- Wir stellen uns nun die Frage, ob das Magnetfeld statt als Vektorfeld vielleicht günstiger in der Sprache der Differentialformen beschrieben werden kann.
 - Dazu untersuchen wir zunächst die Vorzeichenänderung verschiedener Felder unter der Paritätstransformation P . Das ist ein Koordinatenwechsel¹, der nach Wahl eines Nullpunktes die Raumkoordinaten transformiert mit $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = -\mathbf{x}$. Dabei nehmen wir natürlich an, dass sich der (Orts-)Raum als $\mathbb{R}^3$ beschreiben lässt.
 - * Ein Kraftfeld ändert unter der Transformation P sein Vorzeichen, ist also ein Vektorfeld.
 - * Ebenso ändern Geschwindigkeitsfelder und elektrische Felder ihr Vorzeichen, es sind Vektorfelder.
 - * Magnetfelder und Drehimpulse ändern ihr Vorzeichen nicht, es sind sogenannte *Pseudo-* oder *axiale* Vektorfelder.

Dieses Transformationsverhalten lässt sich mit Differentialformen ausdrücken.²

¹Gestrichene Größen wie $\mathbf{x}'$ sind Größen im geänderten Koordinatensystem, der Strich hat nichts mit einer Ableitung zu tun.

²Zum Koordinatenwechsel von Differentialformen (Pullback) sind wir heute leider nicht mehr gekommen.

- Desweiteren ist die magnetische Flussdichte $\mathbf{B}$ keine Größe, die sich unmittelbar messen lässt.³ Messbar dagegen ist der magnetische Fluss $\Phi = \int_F \mathbf{B} d\mathbf{A}$ durch eine Fläche F . Die magnetische Flussdichte ist also eine Größe, die dazu da ist, über eine Fläche integriert zu werden. (Daher kommt auch der Name *Flussdichte*.)

Die obige Schreibweise fixiert allerdings ein Koordinatensystem. Genauso gut kann man auch schreiben $\Phi = \int_F \omega_B$, wenn man

$$\omega_B = B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2 \in A^2(\mathbb{R}^3)$$

definiert und Integration von Differentialformen einführt.⁴

- Wir können dann die Maxwellgleichungen in 3 Dimensionen mit Differentialformen formulieren:
 - Die Maxwellgleichung $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ist äquivalent zu $d\omega_B = 0$.
 - Die elektrische Feldstärke lässt sich durch $\omega_E := \sum_{i=1}^3 E_i dx_i \in A^1(\mathbb{R}^3)$ als 1-Form ausdrücken. Die Maxwellgleichung $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0$ lautet dann $d\omega_E + \frac{\partial}{\partial t} \omega_B = 0$.
 - Die inhomogenen Maxwellgleichungen lassen sich ebenfalls in Differentialformen angeben.

Dabei gewinnen wir jedoch nicht viel, noch immer sind Zeit- und Ortskoordinaten separiert. Die Spezielle Relativitätstheorie legt jedoch nahe, von einer vierdimensionalen Raumzeit auszugehen, dem *Minkowskiraum* M_4 . Dort sind Ort und Zeit in einem Vektorraum zusammengefasst.

- Doch zunächst ein kleines Gedankenexperiment: Stellen wir uns vor, im Laborsystem (ungestrichen) bewegt sich eine Punktladung q (z.B. ein Elektron) mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ durch den Raum. Nach dem Gesetz von Biot-Savart erzeugt sie dabei ein Magnetfeld $\mathbf{B} \neq 0$. Nun wechseln wir das Inertialsystem und betrachten das Ruhesystem (gestrichenes System) des geladenen Teilchens. In diesem System ist kein Magnetfeld vorhanden, da die Teilchengeschwindigkeit $\mathbf{v}' = 0$ in diesem System verschwindet, also $\mathbf{B}' = 0$. Naiv könnte man jetzt fragen: Gibt es nun ein Magnetfeld in diesem Raum oder nicht?

Die Antwort auf dieses scheinbare Paradoxon ist, dass sich Magnet- und elektrische Felder nicht getrennt behandeln lassen. Was im Ruhesystem des Teilchens sein elektrisches Feld $\mathbf{E}' \neq 0$ ist, ist aus der Sicht des Laborsystems ein elektrisches Feld $\mathbf{E} \neq 0$ und ein Magnetfeld $\mathbf{B} \neq 0$. Es gibt also nicht *das* Magnetfeld und *das* elektrische Feld, sondern nur *das elektromagnetische Feld*.⁵

³Es gibt keine punktförmigen Meßgeräte.

⁴Genaugenommen ist $\Phi = \int_F i^*(\omega_B)$ wobei $i: F \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Einbettung der Fläche F in den Raum $\mathbb{R}^3$ ist. Aber den Pullback i^* haben wir bis jetzt noch nicht behandelt, und Integration von Differentialformen führen wir auch erst später ein.

⁵Konsequenterweise muss man dann auch Coulombkraft $\mathbf{F}_c = q\mathbf{E}$ und klassische Lorentzkraft $\mathbf{F}_L = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ zur verallgemeinerten Lorentzkraft $\mathbf{F}_{L,rel} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_L$ zusammenfassen.

- Um die Maxwellgleichungen koordinateninvariant (man sagt besser *kovariant*) formulieren zu können, müssen wir also Ausdrücke finden, die sowohl das elektrische als auch das Magnetfeld beschreiben.

Sei zunächst M_4 der Minkowski-Raum, also der $\mathbb{R}^4$ mit dem Minkowski-Produkt⁶. Koordinaten werden bezeichnet durch $x = (x_1, x_2, x_3, t) \in M_4$. Oft setzt man auch $x_0 := ct$ um die physikalische Dimension einer Länge zu erhalten, dann notiert man einen Punkt in der Raumzeit als (x_1, x_2, x_3, x_0) .⁷

- Die sogenannte *Faraday-2-Form*⁸ $F \in A^2(M_4)$ wird definiert durch

$$F := B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2 \\ + E_1 dx_1 \wedge dt + E_2 dx_2 \wedge dt + E_3 dx_3 \wedge dt.$$

Durch konkretes Nachrechnen⁹ zeigt man, dass die Gleichung $dF = 0$ äquivalent ist zu den beiden Maxwellgleichungen $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ und $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0$. Im Gegensatz zur klassischen Formulierung der Maxwell-Gleichungen ist jedoch $dF = 0$ koordinateninvariant und behält in jedem Inertialsystem seine Gültigkeit.

Die physikalische Dimension von F ist $[F] = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ladung}}$.

Das Poincaré-Lemma liefert die Existenz einer 1-Form $\mathcal{A} \in A^1(M_4)$ mit $d\mathcal{A} = F$, genannt *Vierer-Potential*. Diese ist eindeutig bis auf Transformationen $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} + d\psi$ wobei $\psi \in A^0(M_4) = C^\infty(M_4)$. Die Wahl eines festen $\mathcal{A}$ entspricht einer Eichung. Verbreitet ist zum Beispiel die *Lorenz-Eichung* $\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0$, d.h. also $d * \mathcal{A} = 0$ (wobei $*$ der Hodgeoperator ist). Die Lorenzeichung legt allerdings $\mathcal{A}$ noch immer nicht eindeutig fest.

Die ersten drei Komponenten des Viererpotentials entsprechen klassisch dem Vektorpotential eines Magnetfeldes und die vierte Komponente $\mathcal{A}_0$ entspricht bis auf eine Konstante klassisch dem Skalarpotential ϕ des elektrischen Feldes.

- Die sogenannte *Maxwell-2-Form* $G \in A^2(M_4)$ wird definiert durch

$$G := D_1 dx_2 \wedge dx_3 + D_2 dx_3 \wedge dx_1 + D_3 dx_1 \wedge dx_2 \\ - (H_1 dx_1 \wedge dt + H_2 dx_2 \wedge dt + H_3 dx_3 \wedge dt).$$

Definiert man zusätzlich den Viererstrom $J \in A^3(M_4)$ durch

$$J := \rho dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - j_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt - j_2 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dt - j_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dt,$$

⁶Das Minkowski-Produkt ist definiert durch $\langle (\mathbf{x}, t), (\mathbf{y}, s) \rangle := x_i y_i - c^2 ts$ und entspricht der Lorentzmetrik $g = \operatorname{diag}(1, 1, 1, -c^2)$. Es ist kein Skalarprodukt, sondern nur eine symmetrische Bilinearform.

⁷Ob die Zeit t als erste oder letzte Koordinate notiert wird, ist eine Konventionsfrage. Der Index “0“ anstelle einer evtl. “4“ ist sinnvoll, um zu verdeutlichen, dass diese Koordinate keine raum- sondern eine zeitartige Größe beschreibt. In der Stringtheorie lässt man auch mehr als drei Ortskoordinaten zu, dann ist x_4 eine Ortskoordinate.

⁸In der theoretischen Physik wird anstelle der Faraday-2-Form der *elektromagnetische Feldtensor* $F^{\mu\nu}$ betrachtet. Die Theorie dahinter ist die gleiche, nur die Sprache ist eine andere.

⁹In der Zentralübung vorgeführt.

so lässt sich durch konkretes Nachrechnen¹⁰ zeigen, dass $dG = J$ den inhomogenen Maxwell-Gleichungen entspricht. Eine einfache Folgerung daraus ist $dJ = ddG = 0$, da ganz allgemein $d \circ d = 0$. Das heißt also $dJ = -(\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt$ verschwindet, dies entspricht der *Ladungserhaltung*.

Die physikalische Dimension von F und J ist $[F] = [J] = \text{Ladung}$.

Die Gleichungen $\boxed{dF = 0 \text{ und } dG = J}$ sind also äquivalent zu den bekannten vier Maxwell-Gleichungen der klassischen Elektrodynamik. Sie sind invariant unter Koordinatentransformationen.

- Um die *Materialgleichungen*

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (\text{im Vakuum})$$

in Differentialformen zu formulieren, benötigen wir den Hodge-Operator:

- Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ und einer fixierten Basis, bezüglich der q Diagonalgestalt hat (Spektralsatz). Der Hodge-Operator $* : \bigwedge^r(V) \rightarrow \bigwedge^{n-r}(V)$ ist eine lineare Isometrie, definiert durch $*dx_I := c_I dx_{\{1, \dots, n\} \setminus I}$. Die Konstante $c_I \in \mathbb{R}$ wird hierbei durch q und die Basis festgelegt; wer das genauer wissen möchte, liest es am besten selbst nach. Der Hodge-Operator ist unabhängig von der gewählten Basis von V .

Zum Beispiel erhält man $*(dx_1 \wedge dt) = -\frac{1}{c} dx_2 \wedge dx_3$ im Minkowskiraum.

- Der Hodge-Operator $* : A^r(M_4) \rightarrow A^{n-r}(M_4)$ auf Differentialformen ergibt sich durch lineare Fortsetzung. Er transformiert nur die Differentiale und lässt die Koordinatenfunktionen unverändert.
- Das Minkowski-Produkt geht nur hier in die Definition des Hodge-Operators ein. In den obigen Maxwell-Gleichungen wird es nicht benötigt.

- Die Materialgleichung lautet nun im Vakuum $\boxed{*F = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} G}$.

¹⁰Ebenfalls in der Zentralübung vorgeführt.

07.11.2012 Pullbacks und Funktionentheorie

In der ersten Dreiviertelstunde haben wir das Kapitel Differentialformen mit der Diskussion von Koordinatenwechseln vorerst abgeschlossen, obwohl es dazu noch eine Menge zu sagen gibt. Danach haben wir mit den Grundbegriffen der Funktionentheorie begonnen.

- Seien U, V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und sei $\Phi : U \rightarrow V$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Falls Φ bijektiv und falls Φ^{-1} ebenfalls stetig differenzierbar ist, so nennen wir Φ einen *Diffeomorphismus* oder *glatten Koordinatenwechsel*; wir benötigen hier aber nur die stetige Differenzierbarkeit von Φ .
- Beispiel: Sei $U := \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi)$ und $V := \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\})$, und sei $\Phi(r, \phi) := \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix}$, also der Übergang von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten. Die Funktion $\Phi : U \rightarrow V$ ist stetig differenzierbar und bijektiv, die Umkehrfunktion ist wieder stetig differenzierbar.
- Wir möchten nun eine sinnvolle Abbildung $\Phi^* : A^r(V) \rightarrow A^r(U)$ erklären, mit der wir Differentialformen in anderen Koordinaten ausdrücken können. Dazu fordern wir die folgenden Eigenschaften:
 - Φ^* sollte $\mathbb{R}$ -linear sein; (Vorsicht: Φ ist im Allgemeinen nicht linear)
 - Φ^* sollte mit dem $\wedge$ -Produkt vertauschen, das heißt $\Phi^*(\omega \wedge \eta) = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\eta)$ für Differentialformen ω, η auf V ;
 - Φ^* sollte mit der Cartanableitung vertauschen, also $d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega)$ für Differentialformen ω auf V , die Cartanableitung soll also koordinatenunabhängig sein;
 - Nullformen sollten so transformiert werden, wie man es intuitiv von Koordinatenwechseln erwartet: $\Phi^*f = f \circ \Phi$ für $f \in A^0(V)$.
- Definition: Sei $\Phi : U \rightarrow V$ stetig differenzierbar und sei $\omega \in A^r(V)$ eine Differentialform der Stufe r . In Koordinatenschreibweise ist also $\omega(x) = \sum_{|I|=r} \omega_I(x) dx_I$. Dann definiert man den Pullback von ω als:

$$\Phi^*\omega(y) := \sum_{|I|=r} \omega_I(\Phi(y)) d(\Phi_{i_1}(y)) \wedge \cdots \wedge d(\Phi_{i_r}(y))$$

Man kann sich davon überzeugen, dass wir aufgrund der geforderten Eigenschaften überhaupt keine andere Wahl bei der Definition haben, $\Phi^*\omega$ wird durch die obigen vier Eigenschaften eindeutig festgelegt, man nennt solche Eigenschaften daher auch *definierende Eigenschaften*.

- Jetzt muss man natürlich noch nachprüfen, dass die vier Eigenschaften tatsächlich erfüllt sind. Das verbleibt hier als Übungsaufgabe. Die einzige nichttriviale Eigenschaft ist die Vertauschbarkeit mit der Cartan-Ableitung.

- Achtung: Φ ging von U nach V , aber Φ^* geht von $A^r(V)$ nach $A^r(U)$, das heißt “die Richtung wird umgekehrt“. Daher spricht man hier vom *Zurückziehen* bzw. dem *Pullback* von Differentialformen.
- Beispiel: Sei $\omega \in A^2(\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\}))$ die Volumenform, die gegeben ist durch $\omega(x) := 1 \cdot dx_1 \wedge dx_2$. Wie drücken wir die Volumenform in Polarkoordinaten aus? Wir definieren zunächst $\Phi(r, \phi) := \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix}$ wie oben und berechnen dann

$$\begin{aligned}
\Phi^* \omega(r, \phi) &= 1 d(\Phi_1(r, \phi)) \wedge d(\Phi_2(r, \phi)) \\
&= 1 \cdot d(r \cos(\phi)) \wedge d(r \sin(\phi)) \\
&= 1 \cdot (\cos(\phi) dr - r \sin(\phi) d\phi) \wedge (\sin(\phi) dr + r \cos(\phi) d\phi) \\
&= 1 \cdot (r \cos^2(\phi) dr \wedge d\phi + r \sin^2(\phi) dr \wedge d\phi) \\
&= r dr d\phi.
\end{aligned}$$

Dies ist die bekannte Volumenform für Polarkoordinaten und r ist hier die Jacobi-determinante von Φ . Für sphärische Koordinaten bekommt man mit einer analogen Rechnung die Volumenform $r^2 \sin(\theta) dr d\phi d\theta$.

- Wir behandeln noch ein zweites Beispiel: Sei M_4 der Minkowskiraum, dessen Elemente sind Punkte $x = (x_1, x_2, x_3, t)$ in der Raumzeit. Wir betrachten eine Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned}
\Phi : M_4 &\longrightarrow M'_4, \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ t' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \gamma(x_1 - v_1 t) \\ x_2 \\ x_3 \\ \gamma(t - v_1 x_1 / c^2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Hier ist M'_4 natürlich immer noch der Minkowskiraum, nur im gestrichenen Koordinatensystem. Lorentztransformationen erhalten das Minkowski-Produkt, damit ist Φ also sogar eine Isometrie. Der Faktor γ ist gegeben durch $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Wir betrachten nun ein elektrisches Feld $\mathbf{E}'(x') = (0, E'_2(x'), 0)^t$ und ein Magnetfeld $\mathbf{B}'(x') = (0, B'_2(x'), 0)^t$ im gestrichenen System, die jeweils in x'_2 -Richtung orientiert sind.

Wie sehen nun $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ im ungestrichenen System aus?

Die Maxwell-2-Form ist $F' = E'_2 dx'_2 \wedge dt' + B'_2 dx'_3 \wedge dx'_1$, wir können nun den Pullback berechnen:

$$\begin{aligned}
F(x) &= (\Phi^* F')(x) \\
&= E'_2(\Phi(x)) d(\Phi_2(x)) \wedge d(\Phi_0(x)) + B'_2(\Phi(x)) d(\Phi_3(x)) \wedge d(\Phi_1(x)) \\
&= E'_2(x') \cdot dx_2 \wedge d(\gamma(t - v_1 x_1 / c^2)) + B'_2(x') \cdot dx_3 \wedge d(\gamma(x_1 - v_1 t)) \\
&= \gamma E'_2(x') \cdot dx_2 \wedge dt - \gamma \frac{v_1}{c^2} E'_2(x') \cdot dx_2 \wedge dx_1 \\
&\quad + \gamma B'_2(x') \cdot dx_3 \wedge dx_1 - \gamma v_1 B'_2(x') \cdot dx_3 \wedge dt.
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit der Faraday-2-Form im ungestrichenen System erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}
E_1(x) &= 0, \\
E_2(x) &= \gamma E'_2(x'), \\
E_3(x) &= -v_1 \gamma B'_2(x'), \\
B_1(x) &= 0, \\
B_2(x) &= \gamma B'_2(x'), \\
B_3(x) &= \frac{v_1}{c^2} \gamma E'_2(x').
\end{aligned}$$

Diese Transformationsregeln muss man natürlich experimentell begründen, die Felder transformieren sich tatsächlich so.

Es ist also nicht sinnvoll, zwischen elektrischen und magnetischen Feldern zu unterscheiden. Es gibt nur *ein elektromagnetisches Feld* mit sechs Komponenten, das sich unter Koordiantenwechseln wie eine *Zweiform* transformiert.

Dass wir Felder betrachtet haben, die im gestrichenen System in x'_2 -Richtung weisen, diente nur der Bequemlichkeit in der Notation. Natürlich lassen sich beliebige elektromagnetische Felder entsprechend transformieren, die Transformationsregeln kann man in der physikalischen Literatur nachschlagen oder selbst herleiten. Man kann außerdem zeigen, dass die Feldkomponenten in $\mathbf{v}$ -Richtung unverändert bleiben.

Für die Faraday-2-Form F' gilt $dF' = 0$, das ist die homogene Maxwell-Gleichung. Unter Koordiantenwechseln folgt daraus $dF = d(\Phi^* F') = \Phi^*(dF') = 0$, die homogenen Maxwell-Gleichungen bleiben also erhalten. Hier wird benutzt, dass Φ^* mit d vertauscht. Entsprechend gilt für die Maxwell-2-Form G' und den Viererstrom J' die inhomogene Maxwell-Gleichung $dG' = J'$. Unter Koordiantenwechseln folgt daraus $dG = d(\Phi^* G') = \Phi^*(dG') = \Phi^* J' = J$, die inhomogene Maxwell-Gleichung bleibt also auch erhalten.

In der letzten Dreiviertelstunde sind wir zur Funktionentheorie übergegangen.

- Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen wird als bekannt vorausgesetzt. Als reeller Vektorraum ist $\mathbb{C}$ isomorph zu $\mathbb{R}^2$. Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird in üblicherweise in Realteil $\Re(z) = x$ und Imaginärteil $\Im(z) = y$ zerlegt.

- Satz: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer und sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbar. In Komponenten schreibt man $f(z) = u(z) + iv(z)$ mit reellwertigen Funktionen u und v . Dann sind für ein festes $z \in U$ die folgenden Eigenschaften äquivalent:
 - i) Es gilt $\partial_x u(z) = \partial_y v(z)$ und $\partial_x v(z) = -\partial_y u(z)$ (Cauchy-Riemann-DGLn)
 - ii) die Jacobi-Matrix von f in z hat die Form $Jf(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ -b(z) & a(z) \end{pmatrix}$,
 - iii) die Cartanableitung der komplexen Differentialform¹¹ $f(z)dz$ verschwindet in z , (hier ist $dz := dx + idy$)
 - iv) der Grenzwert $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^\times}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ existiert für komplexe h , die klein genug sind.

Dass die ersten drei Eigenschaften äquivalent sind, kann man konkret nachrechnen, für die Äquivalenz zur vierten konstruiert man sich geeignete Folgen h_n .¹²

- Definition: Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, die in z eine beliebige dieser Eigenschaften erfüllt, heißt *komplex differenzierbar in z* , ihre komplexe Ableitung ist dann gerade der Grenzwert aus iv). Man nennt eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ *holomorph*, wenn sie in jedem $z \in U$ komplex differenzierbar ist.
- Beispiele: Polynome, $\sin$, $\cos$ und $\exp$ sind holomorphe Funktionen auf ganz $\mathbb{C}$.
- Gegenbeispiele: Die Projektion auf den Realteil $z \mapsto \Re(z)$ ist nicht holomorph. Die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ ist nicht holomorph.
- Seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind $f + \lambda g$ und $f \cdot g$ wieder holomorph. Falls g keine Nullstelle hat, ist auch f/g holomorph. Das beweist man zum Beispiel mit Eigenschaft iv) wie im Reellen.
- Für holomorphe Funktionen $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : U \rightarrow V$ auf offenen Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{C}$ gilt die *Kettenregel*, das heißt, $f \circ g$ ist wieder holomorph und $\frac{d}{dz}(f \circ g)(z) = (f')(g(z)) \cdot g'(z)$.
- Bemerkung: Die Menge der holomorphen Funktionen auf U bezeichnet man mit $\mathcal{O}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ ist holomorph}\}$. Diese Menge ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum und ein kommutativer Ring, also eine kommutative $\mathbb{C}$ -Algebra.
- Cauchy-Integralsatz in der Homotopieversion: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein nichtleeres offenes Sterngebiet und sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow U$ zwei stetig differenzierbare Wege, deren Anfangs- und Endpunkte übereinstimmen, also $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Dann stimmen die Wegintegrale von f über diese Wege überein, das heißt $\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz}$.

¹¹Bei einer *komplexen Differentialform* erlaubt man, dass die Koeffizientenfunktionen komplexwertig sind. Dennoch sind dx und idy linear unabhängig.

¹²Wer das genauer wissen möchte, kann es zum Beispiel in "Funktionentheorie" von Reinhold Remmert nachlesen auf Seite 41.

Beweis. Sei wieder $f(z) = u(z) + iv(z)$ die übliche Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Da $f(z)dz$ nach iii) geschlossen ist, sind auch Real- und Imaginärteil von $f(z)dz$ geschlossen. Also gibt es nach dem Poincaré-Lemma ein $\phi \in A^0(U, \mathbb{C})$ mit $d\phi(z) = f(z)(dx + idy)$. Konkret bedeutet das $\frac{\partial}{\partial x}\phi(z) = f(z)$ und $\frac{\partial}{\partial y}\phi(z) = if(z)$, also ist die (reelle) Jacobimatrix $J(\phi)(z) = \begin{pmatrix} u(z) & -v(z) \\ v(z) & u(z) \end{pmatrix}$, insbesondere ist also ϕ wieder holomorph.¹³ Aber dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z)dz &:= \int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt \\ &= \int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_{1,x}'(t) + if(\gamma_1(t))\gamma_{1,y}'(t)dt \\ &= \int_0^1 J(\phi)(\gamma_1(t)) \begin{pmatrix} \gamma_{1,x}'(t) \\ \gamma_{1,y}'(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\phi(\gamma(t))dt \\ &= \phi(\gamma_1(1)) - \phi(\gamma_1(0)). \end{aligned}$$

Das Integral hängt also nur von den Anfangs- und Endpunkten ab. Analog zeigt man $\int_{\gamma_2} f(z)dz = \phi(\gamma_2(1)) - \phi(\gamma_2(0))$. Aber nach Voraussetzung waren Anfangs- und Endpunkte der Wege gleich. $\square$

¹³A priori muss ϕ nicht holomorph sein.

14.11.2012 Funktionentheorie Teil 2

Heute habe ich einen kurzen Überblick über einige der wichtigsten Sätze der Funktionentheorie gegeben. Um die Notation zu erleichtern, nehmen wir immer an, dass $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet ist. Von einem Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ nehmen wir immer an, dass er zumindest stückweise differenzierbar ist.

- Die *Cauchyintegralformel* besagt folgendes:

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei außerdem $B_r(z_0) \subseteq U$ eine Kreisscheibe mit Radius r um ein $z_0 \in U$, deren Abschluss $\overline{B_r(z_0)}$ noch in U enthalten ist. Sei $a \in B_r(z_0)$ beliebig. Dann gilt

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Das heißt also: Der Wert $f(a)$, den f im Punkt a annimmt, ist bereits durch die Werte auf dem Rand der Kreisscheibe vollkommen festgelegt. Holomorphe Funktionen sind in gewissen Sinne sehr "starre" Funktionen, Holomorphie ist also eine sehr starke Forderung. Der Kreis im Integralzeichen $\oint$ soll andeuten, dass es sich um einen geschlossenen Integrationsweg handelt. Anstatt den Weg konkret zu definieren schreibt man für den Integrationsbereich " $|z - z_0| = r$ ", damit meint man ein Integral über den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U, t \mapsto z_0 + r \exp(it)$. Man nimmt stillschweigend an, dass der Integrationsweg im mathematisch positiven Sinne (gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen wird und dass die Umlaufzahl $\chi(z_0, \gamma) = 1$ ist.

- Korollar (Notation wie zuvor): Die Funktion f ist unendlich oft komplex differenzierbar und die n -te Ableitung im Punkt $a \in U$ ist

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Dass aus der einmaligen komplexen Differenzierbarkeit insbesondere bereits die reelle C^∞ -Differenzierbarkeit folgt, ist überhaupt nicht offensichtlich! Man beachte, dass die entsprechende Aussage im Reellen falsch ist, da $f(x) := x|x|$ als reelle Funktion zwar einmal reell stetig differenzierbar ist, aber nicht zweimal.

Noch einmal: Jede beliebige holomorphe Funktion auf einem Gebiet ist bereits unendlich oft komplex differenzierbar!

Der Beweis benutzt vollständige Induktion: Der Induktionsanfang ist die Cauchy-Integralformel und im Integrationsschritt benutzt man die Leibnizregel (Satz 4.32 im Skript).

- Korollar (Notation wie oben): Eine holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich um $a \in U$ in eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

entwickeln, welche auf einem Kreisring $z \in B_r(a) \subset U$ mit $r > 0$ gegen $f(z)$ konvergiert. Der Konvergenzradius R ist dabei mindestens so groß wie der Radius r einer Kreisscheibe $B_r(U)$, die noch in U enthalten ist.

Dies erklärt die Sprechweise, eine holomorphe Funktion sei *analytisch*. Als analytisch bezeichnet man eine Funktion, wenn man sie lokal in eine Potenzreihe entwickeln kann.

- Damit haben wir (lokal) alle holomorphen Funktionen klassifiziert: Es sind genau die Grenzwerte von komplexen Potenzreihen. Aufgrund der lokal gleichmäßigen Konvergenz folgt: Komplexe Potenzreihen kann man innerhalb ihres Konvergenzkreises gliedweise differenzieren.
- Sei $a \in U$ und sei $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann nennt man a eine *Singularität* von f . Es gibt drei Typen von Singularitäten:

- Die Singularität a heißt *hebbbar*, wenn es eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f nach a gibt, wenn also $\tilde{f}(a) := \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ wohldefiniert ist. Man kann zeigen, dass dann $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ sogar holomorph in a ist. Die hebbaren Singularitäten sind die, die keine Probleme verursachen. Beispiel: Die Funktion $f(z) = \frac{z-a}{z-a}$ ist zwar in a nicht definiert, lässt sich aber fortsetzen.
- Die Singularität a ist ein *Pol*¹⁴ von f , wenn es ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt, sodass $z \mapsto f(z)(z-a)^m$ eine hebbare Singularität in a hat. Das kleinste solche m nennt man die *Polordnung* von f in a und bezeichnet es mit $\text{ord}_a(f)$. Man kann zeigen, dass f einen Pol in a hat genau dann, wenn $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$. Dies ist kein Grenzwert in Sinne der Konvergenz, sondern bedeutet, dass $|f(z)|$ für $z \rightarrow a$ über alle Schranken wächst.

Die Pole sind die Singularitäten, die uns interessieren.

Beispiel: $f(z) = \frac{42}{(z-a)^m}$ mit $m \in \mathbb{N}_{>0}$ hat in a einen Pol der Ordnung m .

- Die Singularität a heißt *wesentlich*, wenn sie nicht hebbbar und kein Pol ist. Über solche Singularitäten können wir mit unseren Mitteln noch nicht viel aussagen. Sie lassen sich zum Beispiel über den Satz von Casorati-Weierstraß¹⁵ charakterisieren: Für beliebig kleine $\epsilon > 0$ ist das Bild $f(B_\epsilon(a))$ einer Kreisscheibe um a dicht in $\mathbb{C}$. Es gibt also keinen Grenzwert von $f(z)$ für $z \rightarrow a$, weder eine komplexe Zahl noch ∞ .

Beispiel: $f(z) := \exp(\frac{1}{z-a})$ hat in a eine wesentliche Singularität. Das Bild einer Kreisscheibe $B_\epsilon(a)$ ist $f(B_\epsilon(a)) = \mathbb{C}^\times$.

- Angenommen, f hat in a einen Pol der Ordnung $m = \text{ord}_a(f)$. Dann lässt sich f in einer punktierten Kreisscheibe $B_r(a) \setminus \{a\}$ in eine *Laurentreihe* entwickeln. Das

¹⁴Statt Pol sagt man manchmal auch *außerwesentliche Singularität*.

¹⁵Überhaupt nicht relevant für die Klausur! Noch stärker ist der Satz von Picard: Das Bild $f(B_\epsilon(a))$ ist entweder ganz $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}$ ohne einen Punkt.

bedeutet, es gibt ein $r > 0$, sodass

$$f(z) = \sum_{\nu=-m}^{\infty} c_{\nu}(z-a)^{\nu} \quad 0 \neq z \in B_r(a).$$

Tatsächlich kann man $r > 0$ beliebig groß wählen, solange $B_r(a) \subseteq U$ erfüllt ist.

Eine Laurentreihe ist also eine verallgemeinerte “Potenzreihe“, bei der man auch negative Exponenten zulässt.

- Anwendung: Sei $f(z) = \sum_{\nu=-m}^{\infty} c_{\nu}(z-a)^{\nu}$ eine Laurentreihe mit Koeffizienten $c_{\nu} \in \mathbb{C}$, die in $B_r(a) \setminus \{a\}$ konvergiert, dann kann man $f(z)$ zerlegen in

$$f(z) = c_{-1}(z-a)^{-1} + \underbrace{\sum_{\substack{\nu=-m \\ \nu \neq -1}}^{\infty} c_{\nu}(z-a)^{\nu}}_{=:h(z)}.$$

Der rechte Summand $h(z)$ hat dabei in $B_r(a) \setminus \{a\}$ eine Stammfunktion, die gegeben ist durch $H(z) = \sum_{\substack{\nu=-m \\ \nu \neq -1}}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{\nu+1}(z-a)^{\nu+1}$. Man kann zeigen, dass der Konvergenzradius

von H wieder mindestens r ist. Betrachten wir nun einen Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$, gegeben durch $\gamma(t) := a + \epsilon \exp(it)$, der a mit Radius $\epsilon > 0$ umläuft. Hier sei $\epsilon < r$ so gewählt, dass $B_{\epsilon}(a)$ echt in der Konvergenzkreisscheibe enthalten ist. Dann ist

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z) dz &= \oint_{\gamma} \frac{c_{-1}}{z-a} dz + \oint_{\gamma} h(z) dz \\ &= c_{-1} \oint_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz + \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} H(\gamma(t)) dt \\ &= c_{-1} 2\pi i + H(\gamma(2\pi)) - H(\gamma(0)) = c_{-1} 2\pi i. \end{aligned}$$

Der Wert des Integrals hängt also nur vom Koeffizienten c_{-1} ab. Man nennt c_{-1} das *Residuum* von f bei a , kurz $\text{res}_a(f)$. Um das geschlossene Wegintegral von f längs γ zu berechnen, benötigt man also nur das Residuum $\text{res}_a(f)$.

- Im Residuensatz lässt man nun mehrere Pole zu:

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und seien $a_1, \dots, a_n \in U$ Punkte in U und sei $f : U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ eine holomorphe Funktion, die in $a_1, \dots, a_n$ Pole¹⁶ hat. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ ein stückweise differenzierbarer Weg, der die Pole nicht trifft. Dann gilt

¹⁶Der Residuensatz gilt auch für wesentliche Singularitäten, das haben wir nicht diskutiert. Der Satz über die Entwicklung in Laurentreihen ist dann etwas schwerer zu beweisen.

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \chi(\gamma, a_j) \operatorname{res}_{a_j}(f).$$

Hier ist $\chi(\gamma, a_j)$ die Umlaufzahl von γ um a_j , die auf dem zweiten Übungsblatt definiert wurde.

Die Beweisidee besteht darin, den Weg γ so zu deformieren, dass man eine Summe von Kreisintegralen um die einzelnen Pole erhält.¹⁷ Bei diesen Deformationen darf sich die Umlaufzahl nicht ändern. Man erhält

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^n \chi(\gamma, a_j) \oint_{|z-a_j|=\epsilon} f(z)dz$$

und benutzt das Ergebnis von oben.

¹⁷Wie in der Zentralübung skizziert.

21.11.2012 Residuensatz und Standardintegral in $\mathbb{R}^n$

Nach einem kurzen Nachtrag zum Residuensatz haben wir heute das n -dimensionale Standardintegral eingeführt. Die zusätzlich zum HöMa-Skript verwendeten Quellen sind [Forster: Analysis 3] und das Analysis-Skript von Prof. Weissauer.

- Nachtrag zum Residuensatz: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, sei $a \in U$ und sei $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Wir nehmen an, die Funktion f hat in a einen Pol der Ordnung $m = \text{ord}_a(f) \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann lässt sich das Residuum konkret berechnen mit der Formel

$$\text{res}_a(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} ((z-a)^m f(z)).$$

Falls $m = 1$, dann vereinfacht sich diese Formel zu $\text{res}_a(f) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$.

Beweis. Man verwendet die Laurententwicklung $f(z) = \sum_{\nu=-m}^{\infty} c_{\nu}(z-a)^{\nu}$ von f um a und zeigt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} ((z-a)^m f(z)) &= \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} \left(\sum_{\nu=-m}^{\infty} c_{\nu}(z-a)^{\nu+m} \right) \\ &= \sum_{\nu=-m}^{\infty} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} c_{\nu}(z-a)^{\nu+m} \\ &= \sum_{\nu=-1}^{\infty} \frac{(m+\nu)!}{(1+\nu)!} c_{\nu}(z-a)^{\nu+1} \xrightarrow{z \rightarrow a} (m-1)! \cdot c_{-1}. \end{aligned}$$

Hier wird zweimal die lokal gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihe ausgenutzt. Der Koeffizient c_{-1} ist nach unserer Definition gerade das Residuum von f bei a . Man teilt nun durch $(m-1)!$. $\square$

(Siehe Freitag/Busam: Funktionentheorie 1 S. 165 Satz 6.4(i))

- Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 3\} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $f(z) := \frac{\sin(z)}{z(z-1)(z-3)}$ und den Weg $\gamma(t) := 2 \exp(it)$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. Wie berechnet man nun $\oint_{\gamma} f(z) dz$?

Man sucht zunächst die Singularitäten:

- Die Singularität bei $a = 0$ ist hebbar, da $\frac{\sin(z)}{z} \rightarrow 1$ für $z \rightarrow 0$.
- Die Singularität bei $a = 3$ ist ein Pol der Ordnung $\text{ord}_3(f) = 1$, allerdings ist hier die Umlaufzahl $\chi(3, \gamma) = 0$, diese Singularität trägt also nichts bei.
- Die verbleibende Singularität bei $a = 1$ ist ein Pol der Ordnung $\text{ord}_1(f) = 1$ mit Umlaufzahl $\chi(1, \gamma) = 1$. Das Residuum ist nach obiger Formel $\text{res}_1(f) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin(z)}{z(z-3)} = \frac{\sin(1)}{1(1-3)} = \frac{\sin(1)}{-2}$.

Das Integral ist nach dem Residuensatz also $\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \cdot \text{res}_1(f) \cdot \chi(1, \gamma) = 2\pi i \cdot \frac{\sin(1)}{-2} \cdot 1 = -\pi i \sin(1)$.

- Im vergangenen Semester haben wir das Regelintegral zur Integration reeller Funktionen von einer reellen Variablen eingeführt. Nun erweitern wir den Integrationsbegriff zunächst auf stetige Funktionen von mehreren Variablen.

Unser Ziel ist dabei das Lebesgue-Integral; um dieses definieren zu können, gibt es im Wesentlichen zwei verbreitete Zugänge. Man kann Maßtheorie verwenden oder man benutzt ein bereits vorhandenes Daniell-Integral. Da wir Maßtheorie nicht eingeführt haben, wählen wir (dem Skript folgend) den letzteren Zugang.

- Sei $Q_n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $a_i < b_i$ (also nichtentartet) und sei $f : Q_n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir möchten ein Integral über f definieren.

– Falls $n > 1$, so sei eine Hilfsfunktion $\tilde{f}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{f} : Q_{n-1} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{x} &\longmapsto \int_{a_n}^{b_n} f(\tilde{x}, x_n) dx_n. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass $\tilde{f}$ eine stetige Funktion ist:

Beweis. Da Q kompakt, ist f gleichmäßig stetig. Also existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass insbesondere

$$\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\mathbb{R}^{n-1}} < \delta \Rightarrow |f(\tilde{x}, x_n) - f(\tilde{y}, x_n)| < \frac{\epsilon}{b_n - a_n},$$

aber daraus folgt

$$|\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{y})| \leq \int_{a_n}^{b_n} |f(\tilde{x}, x_n) - f(\tilde{y}, x_n)| dx_n \leq \int_{a_n}^{b_n} \frac{\epsilon}{b_n - a_n} dx_n = \epsilon.$$

Daraus folgt, dass $\tilde{f}$ gleichmäßig stetig ist, also auch stetig. $\square$

– Wir definieren nun rekursiv:

Falls der Quader eindimensional ist (also Q_1 für $n = 1$), so sei $\int_{Q_1} f(x_1) dx_1 := \int_{a_1}^{b_1} f(x_1) dx_1$ das bekannte Regelintegral.

Wir nehmen an, dass $n > 1$ und dass das Integral einer stetigen Funktion über Q_{n-1} schon definiert ist. Dann setzen wir

$$\int_{Q_n} f(x) d^n x := \int_{Q_{n-1}} \tilde{f}(\tilde{x}) d^{n-1} \tilde{x}.$$

Konkret bedeutet das:

$$\int_{Q_n} f(x) d^n x = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1.$$

Diesen Zugang zum n -dimensionalen Integral kann man bei [Forster: Analysis 3, §1, S. 1-11] nachlesen.

- Man sollte beachten, dass wir bei dieser Definition des Integrals a priori eine Reihenfolge der Variablen $x_1, \dots, x_n$ fixiert haben. Tatsächlich hängt das Integral nicht von dieser Reihenfolge ab. Das folgt aus dem Satz von Fubini, den wir oBdA für $n = 2$ formulieren:

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2.$$

Einen Beweis kann man bei [Forster: Analysis 3, §42 Satz 5, S. 42] nachlesen.

- Für dieses Integral über einen Quader Q gelten wieder die fundamentalen Eigenschaften. Seien $f, g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gelten
 - Linearität: $\int_Q f(x) + \lambda g(x) d^n x = \int_Q f(x) d^n x + \lambda \int_Q g(x) d^n x$,
 - Monotonie: $f \leq g \Rightarrow \int_Q f(x) d^n x \leq \int_Q g(x) d^n x$ und die
 - Standardabschätzung: $\left| \int_Q f(x) d^n x \right| \leq \int_Q |f(x)| d^n x$.

Diese folgert man leicht aus den entsprechenden Eigenschaften des Regelintegrals über einer Variablen durch Induktion.

- Bis jetzt haben wir einen konkreten Quader fixiert, davon würden wir uns gerne lösen.
- Definition: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion (irgendeine!). Dann ist der *Träger* von f definiert durch

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}}.$$

Der Querstrich bedeutet dabei, dass wir den Abschluss bilden, der Träger soll also immer eine abgeschlossene Menge sein. Außerhalb des Trägers ist die Funktion f konstant Null.

- Beispiele:
 - Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x$, dann ist $\text{supp}(f) = \mathbb{R}$. Die Null gehört dazu, da wir den Abschluss gebildet haben.
 - Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 0$, dann ist $\text{supp}(f) = \emptyset$ die leere Menge.

- Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Zackenfunktion

$$f(x) := \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Träger von f ist $\text{supp}(f) = [0, 2]$. Man beachte, dass dennoch $f(0) = f(2) = 0$, die Punkte 0 und 2 gehören wegen der Abschlussbildung zum Träger.

- Definition: Der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger ist

$$C_c(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ stetig und } \text{supp}(f) \text{ kompakt}\}.$$

In diesem Raum liegt zum Beispiel die oben definierte Zackenfunktion.

Außerdem gilt für $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, dass auch $f + \lambda g, f \cdot g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, also ist $C_c(\mathbb{R}^n)$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und sogar eine $\mathbb{R}$ -Algebra. Auf $C_c(\mathbb{R}^n)$ ist die Supremumsnorm wohldefiniert, der Raum ist mit dieser Norm aber nicht vollständig.

Weiterhin gilt für Funktionen $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, dass auch $\min(f, g)$ und $\max(f, g)$ in $C_c(\mathbb{R}^n)$ liegen. Damit ist $C_c(\mathbb{R}^n)$ ein sogenannter *Verband* von Funktionen.

- Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, dann gibt es einen Quader $Q_f \subset \mathbb{R}^n$, sodass $\text{supp}(f) \subseteq Q_f$. Der Grund dafür ist einfach: $\text{supp}(f)$ ist kompakt, also beschränkt; man wählt Q_f entsprechend groß genug. Dieser Quader Q_f ist natürlich nicht eindeutig. Man kann nun ein Integral von f definieren durch

$$I(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \int_{Q_f} f(x) dx.$$

Da die Funktion f außerhalb des Trägers Null ist, kommt es nicht auf die konkrete Wahl von Q_f an.

- Man erhält so ein Integral $I : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, das wieder die bekannten universellen Eigenschaften erfüllt:
 - Linearität: $I(f + \lambda g) = I(f) + \lambda I(g)$,
 - Monotonie: $f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$ und die
 - Standardabschätzung: $|I(f)| \leq I(|f|)$.

Wir nennen I das *n-dimensionale Standardintegral*.

Dieses Integral ist aus technischen Gründen sehr wichtig, für die Praxis genügt es aber nicht. Die Annahmen an integrierbare Funktionen sind immer noch zu stark. Um später das Lebesgue-Integral wie im Skript zu konstruieren, müssen wir nachweisen, dass das Standardintegral die Daniell-Eigenschaft erfüllt. Dazu benötigen wir:

- Satz von Dini: Sei X kompakter metrischer Raum und seien $f_k, f \in C(X)$ Funktionen für $k \in \mathbb{N}$ sodass die Funktionenfolge $f_k \nearrow f$ punktweise monoton wachsend konvergiert.¹⁸ Dann konvergiert $f_k \rightrightarrows f$ gleichmäßig. Für eine punktweise monoton fallende Funktionenfolge gilt die analoge Aussage.

Beweis: Siehe Skript: Satz 2.26.

- Lemma: Das Standardintegral erfüllt die folgende *Daniell-Eigenschaft*.

Für beliebige Funktionen $g_k, f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $g_k \leq g_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \sup_k g_k(x) \right) \Rightarrow I(f) \leq \sup_k I(g_k).$$

Das ist nicht ganz das gleiche wie Monotonie, da wir von $\sup_k g_k$ nicht angenommen haben, dass es integrierbar ist.

Beweis. Nehmen wir an, $f(x) \leq \sup_k g_k(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Schritt 1:

Zunächst gilt $\min(f, g_k) \leq g_k$, also $I(\min(f, g_k)) \leq I(g_k)$ wegen der Monotonie von I . Aber daraus folgt $\sup_k I(\min(f, g_k)) \leq \sup_k I(g_k)$.

Nun bleibt also zu zeigen, dass $\sup_k I(\min(f, g_k)) \stackrel{!}{=} I(f)$, dann lässt sich daraus unmittelbar die behauptete Aussage folgern.

Schritt 2:

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader mit der Eigenschaft¹⁹ $\text{supp}(f) \subseteq Q$ und $\text{supp}(\min(f, g_1)) \subseteq Q$. Da nun aber $\min(f, g_1) \leq \min(f, g_k) \leq f$ für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt, folgt²⁰

$$\text{supp}(\min(g_k, f)) \subseteq Q \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Die Funktionenfolge $(\min(f, g_k))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise monoton²¹ gegen f .

Da Q kompakt ist und alle beteiligten Funktionen Träger in Q haben, besagt der Satz von Dini nun, dass dann die Funktionenfolge $(\min(f, g_k))_{k \in \mathbb{N}}$ schon gleichmäßig gegen f konvergiert. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq N$ gilt $\sup_x |f - \min(f, g_k)(x)| < \epsilon$. Mit der Standardabschätzung folgt für alle

¹⁸Das bedeutet $f_k(x) \rightarrow f(x)$ für jedes feste x und $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ für alle x, k .

¹⁹Ein solcher Quader existiert, da sowohl f als auch $\min(f, g_1)$ in $C_c(\mathbb{R}^n)$ liegen. Man wählt Q groß genug.

²⁰Außerhalb von Q sind sowohl f als auch $\min(g_k, f)$ konstant Null, damit ist außerhalb von Q aber auch $\min(g_k, f)$ Null wegen obiger Abschätzung.

²¹Monotonie ist klar wegen $g_k \leq g_{k+1}$ und punktweise Konvergenz folgt, da wir angenommen haben, dass $f(x) \leq \sup_k g_k(x)$. In der Tat, entweder gilt $f(x) \leq g_k(x)$ für große k (dann $\min(f, g_k)(x) = f(x)$ für solche k) oder $g_k(x) < f(x)$ für alle k . Im letzteren Fall muss aber $\min(f, g_k)(x) = g_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sup_k(g_k(x)) = f(x)$ gelten.

$k \geq N$, dass $|I(f) - I(\min(f, g_k))| \leq I(|f - \min(f, g_k)|) \leq I(\epsilon) = \epsilon \text{vol}(Q)$. Das bedeutet $\lim_{k \rightarrow \infty} I(\min(f, g_k)) = I(f)$, mit der Monotonie also $\sup_k I(\min(f, g_k)) \stackrel{!}{=} I(f)$. $\square$

Diesen Beweis kann man auch im Analysis-Skript von Prof. Weissauer in §23.6 nachlesen.

28.11.2012 Das Lebesgue-Integral

Das Thema heute war das Lebesgue-Integral. Im Skript wird das Lebesgue-Integral in Kapitel 6.1 eingeführt.²² Der Nutzen des Lebesgue-Integrals liegt zunächst in den starken Konvergenzsätzen; man hat zum Beispiel den Satz von der monotonen Konvergenz (Beppo-Levi) und den Satz von der majorisierten Konvergenz (Lebesgue). Die Anwendung auf die Physik besteht in der Konstruktion der L^2 -Räume, die in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle spielen.

Wir erweitern das Standardintegral I in zwei Schritten. Zunächst konstruieren wir Integrale I^+ und I^- auf sogenannten "monotonen Einhüllenden" Räumen B^+ und B^- , danach benutzen wir I^+ und I^- , um das Lebesgue-Integral I_L einzuführen. Die Konstruktion des Lebesgue-Integrals ist zunächst technisch und es ist schwierig, allein mithilfe der Definition interessante Beispiele zu behandeln. In der Praxis berechnet man das Lebesgue-Integral gewöhnlich, indem man sich eine Folge von Hilfsfunktionen konstruiert, deren Integral man bereits kennt und dann einen der oben erwähnten Konvergenzsätze anwendet.

Zur Literatur: Das Lebesgue-Integral wird in nahezu jedem Werk zur Analysis eingeführt, beispielsweise in [Forster: Analysis 3, 3. Auflage, §4 und §6].

- Erinnerung:

In der letzten Woche haben wir den Raum $C_c(\mathbb{R}^k)$ der stetigen Funktionen mit kompakten Träger eingeführt.²³

Man kann leicht zeigen: Falls $f, g \in C_c(\mathbb{R}^k)$, dann sind auch $f + \lambda g$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ und $|f|$ wieder in $C_c(\mathbb{R}^k)$ enthalten. Daher ist also $C_c(\mathbb{R}^k)$ ein Verband²⁴.

Danach haben wir das Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ behandelt, also ein Funktional

$$I : C_c(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$$

konstruiert, das die folgenden Eigenschaften²⁵ erfüllt:

- Linearität: $I(f + \lambda g) = I(f) + \lambda I(g)$,
- Monotonie: $f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$,
- Standardabschätzung: $|I(f)| \leq I(|f|)$,

²²Den Begriff der *monotonen Hülle* mussten wir jedoch aus Abschnitt 3.2 im Skript nachholen.

²³Das n im Exponenten von $\mathbb{R}^n$ wird hier durch ein k ersetzt um die Variable n als Folgenindex verfügbar zu haben. Wir nehmen stillschweigend immer $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ an, da man auf dem Raum $\mathbb{R}^0$ keine Integrationstheorie benötigt.

²⁴Ein Verband ist ein Raum von Funktionen, der gerade diese Eigenschaften erfüllt.

²⁵Diese Eigenschaften sind redundant; die Monotonie folgt zum Beispiel direkt aus der Daniell-Eigenschaft, indem man $g_n := g$ wählt.

- und die Daniell-Eigenschaft: Für Funktionen $g_n, f \in C_c(\mathbb{R}^k)$ mit $g_n \leq g_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also monoton wachsend, gilt:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^k : f(x) \leq \sup_n g_n(x) \right) \Rightarrow I(f) \leq \sup_n (I(g_n)).$$

Hier sind jeweils $f, g \in C_c(\mathbb{R}^k)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Im Folgenden benötigen wir nur diese vier Eigenschaften.

- Wir beginnen mit der Konstruktion der *monotonen Hüllen*. Um die Lesbarkeit zu erleichtern und um uns enger am Skript zu orientieren, definieren wir $B := C_c(\mathbb{R}^k)$ für den Verband der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^k$ mit kompakten Träger. Das Standardintegral einer Funktion $f \in B$ wird im folgenden immer mit $I(f) := \int_{\mathbb{R}^k} f(x) dx$ bezeichnet.
- Definition: Sei die obere monotone Einhüllende gegeben durch

$$B^+ := \{ f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mid \exists \text{ Folge } f_n \in B \text{ mit } f_n \nearrow f \text{ punktweise} \}.$$

In Worten: Dies ist also der Raum aller Funktionen auf $\mathbb{R}^k$, die den Wert $+\infty$ annehmen dürfen und von denen man verlangt, dass es eine Folge stetiger Funktionen mit kompakten Träger $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die punktweise monoton steigend gegen f konvergiert.

- Beispiel: Sei

$$\begin{aligned} \chi_{(-1,1)} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

die charakteristische Funktion des offenen Intervalls $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Diese Funktion liegt in B^+ , denn man kann eine Folge von Funktionen $f_n \in B$ konkret konstruieren, die punktweise monoton gegen $\chi_{(-1,1)}$ konvergiert. Man wählt sich zum Beispiel $f_n \in C_c(\mathbb{R}^k)$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ so:

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(1 - |x|) & 1 - \frac{1}{n} < |x| \leq 1 \\ 0 & 1 < |x|. \end{cases}$$

Man kann nun elementar nachrechnen, dass diese Folge f_n die verlangten Eigenschaften erfüllt. Daher gilt $\chi_{(-1,1)} \in B^+$. Das heißt insbesondere, dass Funktionen in B^+ nicht mehr notwendig stetig sein müssen.

- Für eine Funktion $f \in B^+$ definiert man ein Integral $I^+(f)$ durch

$$I^+(f) := \sup_n I(f_n) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

wobei $f_n \in B$ eine Funktionenfolge ist, die punktweise monoton wachsend gegen f konvergiert, also $f_n \nearrow f$. Dass eine solche Folge f_n existiert, folgt aus der Definition von B^+ .

Um die Eindeutigkeit dieser Definition von I^+ zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass sie nicht von der Wahl der Folge f_n abhängt.

Beweis. Nehmen wir also an, dass $g_m \in B$ eine zweite Folge mit $g_m \nearrow f$ ist. Dann folgt für festes $m \in \mathbb{N}$, dass $g_m(x) \leq f(x) = \sup_n (f_n)(x)$, also impliziert die Daniell-Eigenschaft $I(g_m) \leq \sup_n I(f_n)$. Bildet man nun das Supremum über m , so folgt $\sup_m I(g_m) \leq \sup_n I(f_n)$.

Vertauscht man nun die Rollen von f_n und g_m , so liefert das analoge Argument $\sup_n I(f_n) \leq \sup_m I(g_m)$, insgesamt also $\sup_m I(g_m) = \sup_n I(f_n)$. Damit ist $I^+(f)$ wohldefiniert. $\square$

- Vorsicht: Der Raum B^+ enthält einige “pathologische” Funktionen, zum Beispiel die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mit $\tilde{f}(x) = \infty$, die überall den Wert ∞ annimmt.²⁶ Tatsächlich kann man $\tilde{f}$ von unten punktweise annähern durch eine Folge $\tilde{f}_n \in B$, gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} n & |x| < n, \\ 2n - |x| & n \leq |x| < 2n, \\ 0 & 2n \leq |x|. \end{cases} \end{aligned}$$

Man zeigt leicht, dass $\tilde{f}_n \in B$ und dass $I(\tilde{f}_n) = 3n^2$. Das Integral von $\tilde{f}$ berechnet sich nun wie folgt: $I^+(\tilde{f}) = \sup_n I(\tilde{f}_n) = \sup_n 3n^2 = \infty$. Das I^+ -Integral über die konstante ∞ -Funktion ist also ∞ .

- Analog zur oberen Einhüllenden gibt es auch die untere Einhüllende, die man entsprechend definieren kann. Kürzer ist es jedoch, wenn man

$$B^- := \{f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \mid -f \in B^+\}$$

schreibt. Genauso gibt es auch ein Integral $I^- : B^- \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, das man durch Bilden eines Infimums definieren kann oder indem man $I^-(f) := -I^+(-f)$ schreibt.

²⁶Diese Funktion wird in der Quantenfeldtheorie benutzt und integriert. Siehe zum Beispiel Peskin/Schröder: Introduction to Quantum Field Theory, Seite 21, Formel (2.31).

- Lemma:²⁷ Falls $g \in B^+$ und $h \in B^-$ mit $g \geq h$, dann $I^+(g) \geq I^-(h)$.
- Wir können nun endlich erklären, was eine Lebesgue-integrierbare Funktion ist:
Sei $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ irgendeine Funktion. Dann nennen wir f *Lebesgue-integrierbar*, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ Funktionen $g \in B^+$ und $h \in B^-$ gibt, die $h \leq f \leq g$ erfüllen und für die gilt, dass $I^+(g) - I^-(h) < \epsilon$.
In Worten: Das bedeutet, dass man die Funktion f von oben durch Funktionen g und von unten durch Funktionen h so annähern kann, dass die Integrale $I^-(h)$ und $I^+(g)$ gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren.
- Um das Lebesgue-Integral einer solchen Funktion f einzuführen, betrachten wir zwei Hilfsgrößen. Sei $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ Lebesgue-integrierbar, dann definiert man
 - $I^\#(f) := \inf \{I^+(g) | g \in B^+, f \leq g\}$,
 - $I^b(f) := \sup \{I^-(h) | h \in B^-, h \leq f\}$.
 Durch $I^\#(f)$ approximiert man das gesuchte Integral also von oben und durch $I^b(f)$ approximiert man von unten. Beide Größen sind reelle Zahlen.
- Lemma: $I^\#(f) = I^b(f)$ für jede Lebesgue-integrierbare Funktion f .²⁸
Man kann auch umgekehrt schließen: Wenn $I^\#(f) = I^b(f) \neq \pm\infty$, dann ist f Lebesgue-integrierbar.
- Definition: Sei $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ Lebesgue-integrierbar, dann ist das Lebesgue-Integral von f gegeben durch

$$I_L(f) := I^\#(f) = I^b(f).$$

Insbesondere ist $I_L(f)$ immer eine reelle Zahl. Die Werte $\pm\infty$ sind für das Lebesgue-Integral nicht zugelassen.

- Bemerkung: Das Lebesgue-Integral ist eine Fortsetzung des Standard-Integrals im folgenden Sinne. Falls $f \in B = C_c(\mathbb{R}^k)$, dann ist f auch Lebesgue-integrierbar und das Lebesgue-Integral $I_L(f)$ stimmt mit dem Standardintegral $I(f)$ überein. Das sieht man leicht, wenn man in der obigen Konstruktion jeweils $g := h := f$ setzt. Es führt also nicht zu Missverständnissen, wenn man das Lebesgue-Integral wieder wie im Skript mit I bezeichnet. Natürlich ist auch die Schreibweise $\int_{\mathbb{R}^k} f(x) dx := I_L(f)$ gebräuchlich.
- Den Raum der $\mathbb{R}$ -wertigen Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^k$ bezeichnet man mit

$$L(\mathbb{R}^k) := \{f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ ist Lebesgue-integrierbar}\}.$$

²⁷Das ist Lemma 3.10 im Skript. Den Beweis kann man dort nachlesen, in der Übung habe ich ihn vorgeführt.

²⁸Siehe Skript, Lemma 6.2. In der Übung vorgeführt.

Man kann zeigen, dass dieser Raum wieder die Verbandseigenschaften erfüllt. (Siehe Skript, Satz 6.5)

- In der Praxis verwendet man selten die Definition des Lebesgue-Integrals, um ein Integral konkret auszurechnen. Praktischer ist es, die Konvergenzsätze von Beppo-Levi und Lebesgue auszunutzen, indem man sich geeignete Folgen von Hilfsfunktionen konstruiert.

05.12.2012 Lebesgue-Integral (Teil 2): Anwendungen

Heute haben wir die wichtigsten Sätze diskutiert, die einem erlauben, das Lebesgue-Integral konkret auszurechnen. Auf Beweise habe ich dabei bewusst verzichtet, um stattdessen eine Reihe Beispiele behandeln zu können. Die Beweise kann man im Skript nachlesen, wir haben alle dazu nötigen Begriffe kennengelernt.

- Zur Notation: Die Räume B^+ und B^- aus dem Skript heißen in der Vorlesung $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^k)$ beziehungsweise $\mathcal{H}^-(\mathbb{R}^k)$. Das ist die Notation, wie sie in [Forster, O: Analysis 3, 1.-5. Auflage, §4] verwendet wird.
- Der Raum B^+ ist ein *Halbverband*, das heißt für alle f und g aus B^+ gilt:
 - Die Nullfunktion 0 liegt in B^+ ,
 - $f + \lambda g \in B^+$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 - $\max(f, g) \in B^+$,
 - $\min(f, g) \in B^+$.

Achtung: B^+ ist kein Vektorraum, da Skalarmultiplikation im Allgemeinen nur mit nichtnegativen λ möglich ist.

- Analog ist auch B^- ein Halbverband.
- Der Raum der reellwertigen²⁹ Lebesgue-integrierbaren Funktionen $L(\mathbb{R}^k)$ ist ein *Verband*, das heißt $L(\mathbb{R}^k)$ ist ein Halbverband und für alle $f \in L(\mathbb{R}^k)$ liegt auch λf wieder in $L(\mathbb{R}^k)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $L(\mathbb{R}^k)$ also ein Vektorraum. Für alle $f \in L(\mathbb{R}^k)$ liegt auch $|f|$ wieder in $L(\mathbb{R}^k)$.³⁰
- Das Lebesgue-Integral $I_L : L(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Eigenschaften eines Integrals:
 - Linearität
 - Monotonie
 - Standardabschätzung $|I_L(f)| \leq I_L(|f|)$ und zusätzlich wieder
 - Daniell-Eigenschaft (Lemma 6.7 im Skript)

Das Lebesgue-Integral ist also auch ein Daniell-Integral. Der Daniell-Prozess, mit dem wir in der letzten Woche das Standardintegral zum Lebesgue-Integral verallgemeinert haben, lässt sich im Prinzip auch wieder auf das Lebesgue-Integral anwenden. Man kann zeigen, dass man dabei aber keine Verallgemeinerung mehr erreicht: Das aus dem Lebesgue-Integral durch den Daniell-Prozess konstruierte Integral ist genau wieder das Lebesgue-Integral.

²⁹Dass $L(\mathbb{R}^k)$ nur reell-wertige Funktionen enthält bedeutet keine wesentliche Einschränkung, wie wir später sehen werden. Wir müssen das fordern, weil wir im Raum $L(\mathbb{R}^k)$ addieren und subtrahieren wollen.

³⁰Siehe Übungsblatt 7, Aufgabe 1.

- Beispiel zum Lebesgue-Integral: Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_a(a) = 1$ und $f_a(x) = 0$ falls $x \neq a$. Um das Lebesgue-Integral³¹ $I_L(f_a)$ zu bestimmen, konstruiert man zunächst für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionfolge $f_{n,a} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_{n,a}(x) := \begin{cases} 1 - n|x - a| & \text{falls } |x - a| < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann zeigt man leicht, dass $f_{n,a} \in C_c(\mathbb{R}) \subsetneq B^+$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist und dass das Standardintegral $I(f_{n,a}) = \frac{1}{n}$ ist. Außerdem konvergiert $f_{n,a} \searrow f_a$ punktweise monoton.

Beachtet man nun, dass $f_a \geq 0$, dann folgt

$$0 = I^-(0) \leq \sup_{\substack{h \in B^+ \\ h \leq f}} I^-(h) = I^b(f_a) \leq I^\#(f_a) \leq I^+(f_{n,a}) = \frac{1}{n}.$$

Da n beliebig ist, folgt: f_a ist Lebesgue-integrierbar mit Integral $I_L(f_a) = 0$.

- Sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$ eine beliebige Teilmenge, dann definiert man die *Indikatorfunktion* oder *charakteristische Funktion* $\chi_M : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ von M durch

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & x \in M, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^k \setminus M. \end{cases}$$

Falls χ_M Lebesgue-integrierbar ist, so definiert man das k -dimensionale *Volumen* von M durch $\text{vol}_k(M) := I_L(\chi_M)$.

- Falls $M \subset \mathbb{R}^k$ endlich ist, so folgt $I_L(\chi_M) = I_L(\sum_{a \in M} f_a) = \sum_{a \in M} I_L(f_a) = \sum_{a \in M} 0 = 0$. Also gilt $\text{vol}_k(M) = 0$ für alle endlichen Mengen.
- Der *Satz von Beppo-Levi* oder *Satz von der monotonen Konvergenz* besagt:
Sei $(f_n)_n$ eine monoton wachsende Funktionenfolge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f_n : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, das heißt $f_n \leq f_{n+1}$ für alle n . Falls $\sup_n I_L(f_n) < \infty$, so ist auch $f(x) := \sup_n f_n(x)$ wieder Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$I_L(f) = \sup_n I_L(f_n).$$

Der Beweis steht im Skript (Satz 6.8).

- Beispiel: Sei $f_n := \chi_{\{1, \dots, n\}}$ die Indikatorfunktion der ersten n natürlichen Zahlen. Dann wächst $f_n \nearrow \chi_{\mathbb{N}}$ punktweise monoton. Da $\{1, \dots, n\}$ endlich ist, ist f_n Lebesgue-integrierbar. Da $\sup_n I_L(f_n) = 0$, folgt $I_L(\chi_{\mathbb{N}}) = 0$ also

$$\text{vol}_1(\mathbb{N}) = 0.$$

³¹Natürlich ist f_a eine Treppenfunktion und man kann hier das Regelintegral anwenden. Wir möchten aber f_a mit dem Lebesgue-Integral integrieren.

- Genauso argumentiert man für beliebige abzählbare Teilmengen wie zum Beispiel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$:

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, gibt es eine Bijektion $\phi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$. Nun definiert man

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \phi(x) \in \{1, \dots, n\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wiederum folgt $f_n \nearrow \chi_{\mathbb{Q}}$ punktweise monoton, daher gilt nach Beppo-Levi, dass $I_L(\chi_{\mathbb{Q}}) = \sup_n I_L(f_n) = 0$, also

$$\boxed{\text{vol}_1(\mathbb{Q}) = 0.}$$

Die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man auch *Dirichlet-Funktion*. Da sie von keiner Folge von Treppenfunktionen gleichmäßig approximiert wird, ist $\chi_{\mathbb{Q}}$ auf keinem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ Regelfunktion. Das Lebesgue-Integral ist also stärker als das Riemann-Integral; man kann mehr Funktionen damit integrieren. Analog zeigt man, dass jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ das Volumen Null hat.

- Der nächste wichtige Satz ist der *Satz von Lebesgue* oder *Satz von der dominierten Konvergenz*:

Sei $(f_n)_n$ eine punktweise konvergente Funktionenfolge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f_n : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ und nehmen wir an, es gibt eine Lebesgue-integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|f_n| \leq g$. Dann ist auch $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ wieder Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$I_L(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_L(f_n).$$

Dieser Satz erlaubt also, die Grenzwertbildung mit dem Integral zu vertauschen, wenn man eine genügend große integrierbare Funktion g findet.

Der Beweis steht im Skript (Satz 6.9).

- Beispiel: Wir möchten zeigen, dass die Funktion $f(x) := \exp(-x^2)$ auf $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist. Da man keine Stammfunktion von f unmittelbar hinschreiben kann, ist das nicht offensichtlich.

Seien $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \begin{cases} \exp(-x^2) & |x| \leq n, \\ \exp(-n^2)(n+1-|x|) & n < |x| \leq n+1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) := \begin{cases} 1 & |x| \leq 1, \\ \exp(1-|x|) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun kann man nachrechnen, dass $g(x) \geq |f_n(x)|$ für alle x und alle n , man benutzt dabei die Monotonie von $\exp$. Da f_n stetig ist und Träger in $[-n-1, n+1]$ hat, ist $f_n \in C_c(\mathbb{R})$, also insbesondere Lebesgue-integrierbar.

Bleibt zu zeigen, dass g Lebesgue-integrierbar ist. Offensichtlich ist $g_m := g \cdot \chi_{[-m,m]}$ für $m \in \mathbb{N}$ Lebesgue-integrierbar; wegen $\sup_m I(g_m) = \sup_m 2 \cdot \int_0^m g(x) dx = \sup_m 2(1 + [-\exp(1-x)]_1^m) = 4$ folgt die Lebesgue-Integrierbarkeit von g aus dem Satz von Beppo-Levi.

Mit dem Satz von Lebesgue folgt, dass $f(x) = \exp(-x^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ Lebesgue-integrierbar ist.

Zusätzlich gilt $I_L(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_L(f_n)$, aber das hilft uns nicht bei der Berechnung von $I_L(f)$, da wir auch $I_L(f_n)$ nicht kennen.³²

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und sei die Nullfortsetzung $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in U \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man sagt „ f ist auf U Lebesgue-integrierbar“, wenn $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}^k$ Lebesgue-integrierbar ist. Dann definiert man $\int_U f(x) dx := I_L(\tilde{f})$.

Damit haben wir also das Lebesgue-Integral auf einer offenen Menge U erklärt.³³

- Der *Transformationssatz* oder *Substitutionssatz* besagt: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, sei $\Phi : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus³⁴ und sei $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar.

Dann ist auch $(f \circ \Phi) \cdot |\det J\Phi|$ auf U Lebesgue-integrierbar und es gilt:

$$\boxed{\int_V f(x) dx = \int_U f(\Phi(y)) \cdot |\det J(\Phi)(y)| dy.}$$

Der Beweis für $C_c(\mathbb{R}^k)$ steht im Skript in Kapitel 4.11 und die Verallgemeinerung auf Lebesgue-Integrale steht zum Beispiel in [Forster, O.: Analysis 3, §13, Satz 2].

- Anwendung:

Wir möchten das Gauß'sche Fehlerintegral $G = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx$ berechnen. Dazu bietet sich der Poisson-Trick an, dabei berechnet man zunächst G^2 mithilfe des Transformationssatzes. Sei $U := (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}_{>0}$ und sei $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(\phi, r) = (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$ der Koordinatenwechsel von Polar- zu kartesischen Koordinaten. Sei $V := \Phi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\})$. Dann folgt³⁵

³²Tatsächlich lässt sich $I_L(f_n)$ nur numerisch bestimmen. Die „Stufe“ $\exp(-n^2)(n+1-|x|)$ kann man dabei natürlich ignorieren, diese diente nur der Stetigkeit von f_n .

³³Vergleiche [Forster, O.: Analysis 3, 5. Auflage, Seite 64 oben].

³⁴Das heißt, Φ ist bijektiv und sowohl Φ als auch Φ^{-1} sind stetig partiell differenzierbar.

³⁵Der Schritt von der zweiten zur dritten Zeile benutzt, dass $\text{vol}_2(\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\}) = 0$. Der Schritt von der vierten zur fünften Zeile ist der Satz von Beppo-Levi und es wird benutzt, dass die Jacobideterminante $|\det J\Phi| = r$ ist.

$$\begin{aligned}
G^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx \right)^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x_1^2 - x_2^2) d^2x \\
&= \int_V \exp(-x_1^2 - x_2^2) d^2x \\
&= \int_U \exp(-(r \cos(\phi))^2 - (r \sin(\phi))^2) |\det J\Phi| dr d\phi \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^m \exp(-r^2) r dr d\phi \\
&= 2\pi \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \exp(-r^2) \right]_0^m \\
&= 2\pi \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-m^2) \right) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $G = \sqrt{\pi}$.

12.12.12 Nullmengen und Meßbare Funktionen

Heute haben wir Lebesgue-meßbare Mengen, speziell Nullmengen, diskutiert und dann die wichtigsten Eigenschaften meßbarer Funktionen charakterisiert. Dies sind technische Begriffe, die wir benötigen, um später den Hilbertraum $L^2(X, \mathbb{C})$ einzuführen.

Die Diskussion von Nullmengen ist nur vom mathematischen Standpunkt³⁶ her wichtig, da man eine positiv definites Skalarprodukt auf $L^2(X, \mathbb{C})$ definieren möchte. Da jede physikalische Messung (einer kontinuierlichen Größe) im Prinzip eine Integration beinhaltet (es gibt keine perfekten Messgeräte, die punktweise Messungen vornehmen), lässt sich physikalisch überhaupt nicht sinnvoll aussagen, was auf einer Nullmenge im Raum passiert.

- Zunächst einige technische Verfeinerungen in der Notation:
 - Der Raum der reellwertigen Lebesgue-integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ bezeichnet. Die Notation mit dem geschwungenen “ $\mathcal{L}$ ” wird erst im nächsten Kapitel wichtig werden. Wir hätten besser gleich zu Anfang den Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen so bezeichnen sollen.
 - Wenn man den Verband $B := C_c(\mathbb{R}^k)$ betrachtet und die monotonen Hüllen $B^+ = \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^k)$ bildet, dann gibt es eine innere Charakterisierung dieser monotonen Hülle. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gehört genau dann zu $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^k)$, wenn sie unterhalbstetig ist und außerhalb einer kompakten Menge nur nichtnegative Werte annimmt. Siehe dazu auch [Forster, O.: Analysis 3, 3. Auflage, §4 Satz 2, S. 40f]. Diese Charakterisierung erlaubt es, schneller nachzuprüfen, ob eine Funktion in $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^k)$ liegt.
Für $B^- = \mathcal{H}^-(\mathbb{R}^k)$ gilt natürlich eine analoge Aussage.
 - Jede Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$ ist Lebesgue-integrierbar und das Standardintegral stimmt mit dem Lebesgue-Integral überein: $I_L(f) = I(f)$. Es führt daher nicht zu Missverständnissen, wenn wir in Zukunft das Lebesgueintegral über $\mathbb{R}^k$ mit I statt I_L bezeichnen. In Zukunft werden alle Integrale ohne weiteren Kommentar immer Lebesgueintegrale sein.
 - Zu jeder reellwertigen Funktion auf einer Menge X kann man die Funktionen $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- = -\min(f, 0)$ bilden, dann gilt $f = f^+ - f^-$. Dies wird es später erlauben, in einigen Beweisen ”Sei ObdA $f \geq 0$.” zu schreiben. Unter Ausnutzung der Verbandseigenschaften zeigt man dann eine Aussage für f^+ und für f^- und schließt dann, dass sie auch für f gilt. Dass das tatsächlich möglich ist, muss man natürlich in jedem Einzelfall konkret nachprüfen.
 - Sei $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Man sagt, f sei Lebesgue-integrierbar, wenn Realteil $\Re(f)$ und Imaginärteil $\Im(f)$ Lebesgue-integrierbar

³⁶Die physikalische Motivation ist hier schwierig. Man kann an diesem Punkt auch einfach akzeptieren, dass sich die Mathematiker manchmal das Leben etwas schwer machen. Unter dieses Motto könnte man die ganze Übung heute stellen.

sind. Man definiert dann das Lebesgueintegral von f durch

$$I(f) := I(\Re(f)) + iI(\Im(f)).$$

Der Raum der komplexwertigen³⁷ Lebesgue-integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$ bezeichnet. Dies ist kein Verband mehr, da es nicht möglich ist, Maxima und Minima zu bilden.

- Sei $X \subseteq \mathbb{R}^k$ eine nichtleere Teilmenge. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Lebesgue-integrierbar auf X* , wenn die Nullfortsetzung

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in X \\ 0 & x \notin X. \end{cases} \end{aligned}$$

über $\mathbb{R}^k$ Lebesgue-integrierbar ist. Der Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf X heißt $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$. Das Integral definiert man dann durch $\int_X f(x) dx := I(\tilde{f})$.

Nach dieser langen Vorrede können wir mit den eigentlichen Themen³⁸ anfangen:

- Sei $A \subseteq \mathbb{R}^k$ eine beliebige Teilmenge. Wir interessieren uns für die Frage, ob wir A in sinnvoller Weise ein Volumen³⁹ zuordnen können. "Sinnvoll" bedeutet hier, dass eine solche hypothetische Volumenfunktion $A \mapsto \text{vol}(A)$ einige Eigenschaften erfüllen sollte:
 - $\text{vol}_k(A) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, das Volumen sollte also keine negative Größe sein.
 - $\text{vol}_k([0, 1]^k) = 1$, der Einheitswürfel hat also Volumen 1. (Normiertheit)
 - $\text{vol}_k(A) = \text{vol}_k(T(A))$, wenn $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Kongruenztransformation (also Hintereinanderausführung von Translationen, Rotationen und Spiegelungen) im Raum ist.
 - $\text{vol}_k(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}_k(A_n)$, falls die Folge von Teilmengen $A_n \subseteq \mathbb{R}^k$ paarweise disjunkt ist. Hier ist eine eventuelle Divergenz der Reihe zugelassen. Das nennt man σ -Additivität.
 - $\text{vol}_k(\emptyset) = 0$, die leere Menge hat Volumen Null.
 - $A \subseteq B \Rightarrow \text{vol}_k(A) \leq \text{vol}_k(B)$ (Monotonie)

Die Frage, ob ein solches Volumen für jede Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ existiert, nennt man das *Maßproblem*.⁴⁰ Es ergibt sich, dass das Maßproblem nicht lösbar ist, es gibt

³⁷Der Funktionswert ∞ ist nicht zugelassen.

³⁸Auch der folgende kurze Ausflug in die Maßtheorie ist für Physiker nicht so sehr wichtig.

³⁹Ein Mathematiker sagt "Maß" statt "Volumen".

⁴⁰Erstmals formuliert wurde die Frage 1902 von Lebesgue in seiner Dissertation, er konnte sie aber nicht beantworten. Giuseppe Vitali konnte 1904 zeigen, dass es nicht möglich ist, ein Volumen für alle Teilmengen von $\mathbb{R}^k$ zu definieren. Tatsächlich kann man die Unmessbarkeit bestimmter Teilmengen ausnutzen, um beispielsweise das Banach-Tarski-Paradoxon zu formulieren. Das ist kein echtes Paradoxon, es heißt nur so. Der Wikipedia-Artikel "Maßproblem" ist gar nicht schlecht.

sogenannte *unmessbare Mengen* $A \subseteq \mathbb{R}$. Wir müssen den Volumenbegriff also auf *messbare* Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^k$ beschränken.

- Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt *endlich Lebesgue-messbar* oder kurz *endlich messbar*, wenn die charakteristische Funktion $\chi_A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist. Man definiert dann $\text{vol}(A) := I(\chi_A) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Falls eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ messbare Teilmengen $A_n \subset A$ mit $\text{vol}_k(A_n) > n$ enthält, also beliebig große Volumina, dann sagt man, A hat Volumen $\text{vol}_k(A) = \infty$. Das Volumen von $A = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ ist zum Beispiel unendlich groß.

Man kann zeigen, dass die obigen Eigenschaften dann alle erfüllt sind.

- Beispiel: Der Quader $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k]$ ist messbar und hat das Volumen $\text{vol}_k(Q) = \prod_{i=1}^k |b_i - a_i|$. Der Kegel mit Grundflächenradius R und Höhe h in $\mathbb{R}^3$ hat Volumen $\frac{1}{3}\pi R^2 h$. Zahlreiche entsprechende Formeln sind aus der Schule bekannt.

Kompakte, offene und abgeschlossene Mengen sind messbar.

- Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt *Lebesgue-Nullmenge*, falls sie endlich messbar ist und falls $\text{vol}_k(N) = 0$.

Ein Punktmenge $\{x\} \subseteq \mathbb{R}^k$ hat das Volumen $\text{vol}_k(\{x\}) = 0$. Endliche Mengen als Vereinigungen von Punktfolgen haben das Volumen Null. Mit dem Satz von Beppo-Levi zeigt man, dass abzählbare Mengen wie $\mathbb{Q}^k \subseteq \mathbb{R}^k$ auch das Volumen Null haben.

Die Menge $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist auch eine Nullmenge, da sie von Nullmengen ausgeschöpft wird. Im Detail bedeutet das: Die Folge von charakteristischen Funktionen $\chi_{[-n,n] \times \{0\}} \nearrow \chi_{\mathbb{R} \times \{0\}}$ konvergiert punktweise monoton und für $[-n,n] \times \{0\}$ kann man relativ leicht zeigen, dass $\text{vol}_2([-n,n] \times \{0\}) = 0$. Nach Beppo-Levi ist dann auch $\chi_{\mathbb{R} \times \{0\}}$ Lebesgue-integrierbar und $\text{vol}_2(\{0\} \times \mathbb{R}) = 0$.

- Falls $N \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Nullmenge ist, dann ist auch jede Teilmenge $M \subseteq N$ eine Nullmenge. In der Tat:

$$0 \leq I^b(\chi_M) \leq I^\#(\chi_M) \leq I^\#(\chi_N) = I(\chi_N) = \text{vol}_k(N) = 0.$$

Also sind alle vorkommenden Ausdrücke Null, insbesondere $I^b(\chi_M) = I^\#(\chi_M)$. Damit ist χ_M Lebesgue-integrierbar, also M messbar und eine Nullmenge.

- Falls $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Nullmengen $N_n \subseteq \mathbb{R}^k$ ist, so ist auch die Vereinigung $N = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n$ wieder eine Nullmenge. Man betrachtet dazu die Funktionenfolge $f_n = \max_{1 \leq j \leq n} (\chi_{N_j})$, welche punktweise monoton steigend gegen χ_N konvergiert und wendet den Satz von Beppo-Levi an.
- Auf dem achten Übungsblatt war unter anderem zu zeigen: Falls $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion ist und falls $\{x \in \mathbb{R}^k; f(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge ist, dann ist $I(f) = 0$. Daraus folgt sofort für integrierbare f_1 und f_2 , dass $I(f_1) = I(f_2)$, falls sich die Funktionswerte von f_1 und f_2 nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Bei

der Integration kann man also die Werte, die eine Funktion auf einer Nullmenge annimmt, vernachlässigen.

- Im Skript (Lemma 6.14) wird der Satz bewiesen, dass für eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ die Menge der Punkte, an denen der Wert ∞ angenommen wird, eine Nullmenge ist. Da man diese Punkte bei der Integration ignorieren kann, bedeutet es also keine wesentliche Einschränkung, wenn wir in Zukunft nur noch reellwertige Lebesgue-integrierbare Funktionen betrachten. Diese sind alle in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ enthalten.

Achtung! Bitte beachten:

In der Vorlesung wird eine andere Definition⁴¹ von Meßbarkeit als im Weissauer-Skript eingeführt werden, welche dann auch klausurrelevant ist. Diese kann man nachlesen in Abschnitt VII.10 im Analysis-II-Skript von Prof. Freitag auf Seite 140f⁴². Die Definition aus dem Weissauer-Skript brauchen Sie also nicht zu lernen.

- Der nächste wichtige Begriff ist der einer messbaren Funktion $X \rightarrow \mathbb{C}$.⁴³

Erinnerung: Der abgeschlossene Ball im $\mathbb{R}^k$ mit Radius $m \in \mathbb{N}$ ist

$$\bar{B}_m(0) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leq m\}.$$

Wir schreiben kurz $\bar{B}_m := \bar{B}_m(0)$ um Platz zu sparen.

- Definition:

1. Sei $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine beliebige Funktion. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ definiert man die *Stauchung* $[f]_m : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ durch $[f]_m := \max(\min(f, m\chi_{\bar{B}_m}), -m\chi_{\bar{B}_m})$,

⁴¹Die Definitionen sind äquivalent, aber wir haben nicht die Zeit um das zu zeigen. Eine Richtung geht so: Sei $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ messbar im Sinne der Definition im Weissauer-Skript. Dann gibt es eine Folge $f_n \in C_c(\mathbb{R}^k)$, die punktweise fast überall gegen f konvergiert. Dann konvergiert aber auch $[f_n]_m$ für $n \rightarrow \infty$ punktweise fast überall gegen $[f]_m$ und wird durch $m\chi_{\bar{B}_m}$ majorisiert. Nach den Verbandseigenschaften ist $[f_n]_m$ Lebesgue-integrierbar und nach Satz von Lebesgue ist dann auch $[f]_m$ Lebesgue-integrierbar. Also ist f messbar im Sinne der Definition im Freitag-Skript (also unserer Definition).

⁴²Vorsicht: Hinter Definition 10.1 steht “Es gilt offenbar ...”; die darauf folgende Aussage ist unsere Definition. Das ist nicht ganz das gleiche, aber äquivalent zur Definition in Freitag-Skript, wie man anhand der konstanten Funktion $f(x) = k + 1$ sieht.

⁴³Der Name wird verständlich, wenn man den maßtheoretischen Zugang zum Lebesgue-Integral wählt, was wir nicht getan haben. Wir benötigen messbare Funktionen nur an einer Stelle, bei der Definition des Hilbertraumes $L^2(X)$. Der Lebesgue-Integrierbarkeit einer Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ stehen im Allgemeinen zwei Hindernisse im Weg. Sie könnte zu stark wachsen oder fallen, das kann man durch eine integrierbare Majorante ausschliessen. Sie könnte aber auch zu stark “im Kleinen” oszillieren, das können wir durch die Messbarkeit kontrollieren.

oder elementar hingeschrieben durch:

$$[f]_m(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } \|x\| \leq m \text{ und } -m \leq f(x) \leq m, \\ m & \text{falls } \|x\| \leq m \text{ und } f(x) > m, \\ -m & \text{falls } \|x\| \leq m \text{ und } f(x) < -m, \\ 0 & \text{falls } \|x\| > m. \end{cases}$$

Der Graph von $[f]_m$ liegt also in einem Zylinder mit Radius m und Höhe $2m$. Außerhalb des Zylinders ist $[f]_m$ Null.

2. Man sagt, $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ist *messbar*, wenn die Stauchungen $[f]_m$ Lebesgue-integrierbar sind.

Die Menge der messbaren reellwertigen Funktionen $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet man mit $M(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ messbar}\}$.

- Beispiele: Alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ sind messbar. Alle Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ sind messbar. Das folgt aus den Verbands-eigenschaften der Verbände $C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ und $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$.
- Satz.⁴⁴ (Stabilität der Menge $M(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$)
 - Seien $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen. Dann sind auch $f + \lambda g$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ und $|f|$ wieder messbare Funktionen.

Beweis. Seien $f, g \in M(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ und sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig und fest. Dann folgt aus den Verbands-eigenschaften, dass

$$h_n := \max(\min([f]_n + \lambda[g]_n, m\chi_{\bar{B}_m}), -m\chi_{\bar{B}_m})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-integrierbar ist. Da diese Funktion durch $|h_n| \leq m\chi_{\bar{B}_m}$ majorisiert wird, lässt sich der Satz von der dominierten Konvergenz anwenden. Also ist der punktweise(!) Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \max(\min(f + \lambda g, m\chi_{\bar{B}_m}), -m\chi_{\bar{B}_m}) = [f + \lambda g]_m$$

wieder Lebesgue-integrierbar.

Da m beliebig war, ist $f + \lambda g$ messbar.

Der Beweis für $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ verläuft analog. Damit ist auch $|f| = \max(f, 0) - \max(-f, 0)$ messbar. $\square$

- Falls $f_n : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ messbare Funktionen sind und falls die Folge $(f_n)_n$ punktweise fast überall (außerhalb einer Nullmenge N) gegen eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvergiert, dann ist auch f wieder messbar.

⁴⁴Vergleiche Satz 10.4 in Kapitel VII im Freitag-Skript. Die Beweise wurden in der Übung nur angedeutet.

Beweis. OBdA kann man annehmen, dass $f \geq 0$ und $f_n \geq 0$ für alle n , sonst zerlegt man $f = f^+ - f^-$ und benutzt, dass dann auch f_n^+ punktweise fast überall gegen f^+ und f_n^- punktweise fast überall f^- konvergiert.

Wenn $f_n \geq 0$ punktweise fast überall gegen $f \geq 0$ konvergiert, dann konvergiert auch $[f_n]_m = \min(f_n, m\chi_{\bar{B}_m})$ für $n \rightarrow \infty$ punktweise fast überall gegen $[f]_m = \min(f, m\chi_{\bar{B}_m})$. Wegen $|[f]_m| \leq m\chi_{\bar{B}_m}$ lässt sich der Satz von der dominierten Konvergenz (Satz von Lebesgue) anwenden, also ist auch $[f]_m = \min(f, m\chi_{\bar{B}_m})$ Lebesgue-integrierbar.

Da m beliebig war ist somit f messbar. $\square$

- Falls $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen sind für $n \in \mathbb{N}$ und falls $f(x) := \sup_n (f_n)(x)$ ist, dann ist auch f messbar.

Beweis. Das zeigt man, indem man ausnutzt, dass $g_n(x) := \max_{1 \leq j \leq n} f_j(x)$ messbar ist und $g_n(x) \rightarrow f(x)$ punktweise fast überall konvergiert. $\square$

Mit dem analogen Argument zeigt man, dass auch $\inf_n (f_n(x))$ messbar ist.

- Falls $f, g \in M(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ messbar, dann ist auch das Produkt $f \cdot g$ messbar. Damit ist $M(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ also sogar eine $\mathbb{R}$ -Algebra.

Beweis. Hier ist es günstiger, die Definition aus dem Weissauer-Skript zu verwenden. Wenn f und g messbar sind, dann gibt es Folgen $f_n, g_n \in C_c(\mathbb{R}^k)$, sodass $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für alle⁴⁵ $x \in \mathbb{R}^k \setminus N_f$ und $g_n(x) \rightarrow g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus N_g$. Aber dann konvergiert $f_n g_n(x) \rightarrow f g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus (N_f \cup N_g)$. Da $f_n g_n \in C_c(\mathbb{R}^k)$, ist $f g$ messbar. $\square$

Die Menge der messbaren reellwertigen Funktionen ist also sehr stabil, sie ist ein Verband und eine $\mathbb{R}$ -Algebra. Durch Standardoperationen kann man sie nicht verlassen. Es ist schwer und war einige Zeit ein ungelöstes Problem, eine nichtmessbare Funktion zu konstruieren.

- Sei $X \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Teilmenge und $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion. Dann heißt f messbar, wenn die Nullfortsetzung $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ messbar ist. Eine komplexwertige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt messbar, wenn Real- und Imaginärteil messbar sind. Die Menge der komplexwertigen messbaren Funktionen auf X nennt man $M(X, \mathbb{C})$; das ist zwar noch eine $\mathbb{C}$ -Algebra, aber kein Verband mehr.

Falls $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, dann ist natürlich auch die zu f komplex konjugierte Funktion $\bar{f} = \Re(f) - i\Im(f)$ messbar.

Was kann man nun mit einer messbaren Funktion anfangen?

⁴⁵Hier sind N_f und N_g natürlich Nullmengen.

- Falls $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar ist und falls eine Lebesgue-integrierbare Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert mit $g(x) \geq |f(x)|$ für fast alle x , dann ist auch f Lebesgue-integrierbar.

Der Beweis dazu steht im Weissauer-Skript relativ ausführlich (Satz 6.16).⁴⁶ Wenn man dagegen die Definition für messbare Funktionen aus dem Freitag-Skript verwendet, dann argumentiert man so:

Beweis. Sei $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, also $[f]_m$ Lebesgue-integrierbar für $m \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $[f]_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$ punktweise und wird durch g majorisiert. Nach dem Satz von Lebesgue ist also auch f Lebesgue-integrierbar. $\square$

Der Begriff des Hilbertraumes, den ich in den letzten fünf Minuten noch erläutert habe, gehört zu Kapitel 7. Dazu nächste Woche mehr.

⁴⁶In der Übung vorgeführt.

19.12.2012 Hilberträume

Der Begriff des Hilbertraumes ist eines der zentralen Konzepte in der Quantenmechanik. Hilberträume bilden das Fundament für nahezu jede Theorie, die auch nur ansatzweise mit Quantenmechanik zu tun hat.

Ohne weiteren Kommentar ist hier $X \subseteq \mathbb{R}^k$ eine nichtleere messbare Teilmenge. Mit X beschreibt man später die Geometrie eines konkreten Versuchsaufbaus.

- Ein *Hilbertraum* ist
 1. ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum H ,
 2. mit einem Skalarprodukt $H \times H \rightarrow \mathbb{C}$,
 3. welches eine Norm $\|v\|_H := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ induziert, sodass
 4. H mit der Metrik $d(v, w) := \|v - w\|_H$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

Ein Skalarprodukt auf H ist eine Abbildung $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$, die folgende drei Eigenschaften erfüllt:

1. $\langle v, w_1 + \lambda w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \lambda \langle v, w_2 \rangle$ (linear in der zweiten⁴⁷ Variablen),
2. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (antisymmetrisch),
3. $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$ für $v \neq 0$ (positiv definit).

Die Antilinearität in der ersten Variablen folgt aus 1. und 2., dass $\langle 0, 0 \rangle = 0$ folgt aus 1. und dass $\langle v, v \rangle$ immer reell ist, folgt schon aus 2.

- Beispiel: Der Vektorraum $\mathbb{C}^k$ mit dem Skalarprodukt $\langle v, w \rangle := \sum_{j=1}^k \overline{v_j} w_j$ ist ein Hilbertraum. Dieser Hilbertraum wird verwendet, um "diskrete" Phänomene wie den Spin eines Elektrons (dann $k = 2$) zu beschreiben, die nur k verschiedene⁴⁸ Zustände annehmen können.
- Das nächste wichtige Beispiel ist der Raum $L^2(X, \mathbb{C})$, den wir nun konstruieren möchten. Dazu braucht es etwas Vorarbeit.
- Sei $X \subseteq \mathbb{R}^k$ eine messbare Teilmenge. Wir beginnen mit

$$\mathcal{L}^2(X, \mathbb{C}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und } |f|^2 \text{ integrierbar}\}.$$

Dieser Raum der quadratintegrierbaren messbaren Funktionen hat *fast(!)* die Eigenschaften eines Hilbertraumes:

- Satz: $\mathcal{L}^2(X, \mathbb{C})$ ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

Beweis. Vorüberlegung: Seien $a, b \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Dann gilt

⁴⁷Das ist die Konvention in der Physik. In der Mathematik ist ein Skalarprodukt linear in der erste Variablen.

⁴⁸Gemeint ist hier, dass man bei einer konkreten Messung nur k verschiedene Eigenwerte des Messoperators erhält.

*) $|\bar{a}b| \leq \max(|a|^2, |b|^2)$ und

**) $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$.⁴⁹

Nun zum eigentlichen Beweis:

Seien $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mathbb{C})$ beliebig und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann ist nach Satz 6.16 auch $f + \lambda g$ eine messbare Funktion und $|f + \lambda g|^2$ ist ebenfalls messbar.

Außerdem gilt die Abschätzung $|f + \lambda g|^2 \stackrel{(**)}{\leq} 2|f|^2 + 2|\lambda|^2|g|^2$ und die rechte Seite ist nach Annahme und Verbandseigenschaften Lebesgue-integrierbar. Nach Satz 6.16 aus dem Skript ist dann auch $|f + \lambda g|^2$ Lebesgue-integrierbar, also ist $f + \lambda g \in \mathcal{L}^2(X, \mathbb{C})$.

Außerdem ist $\mathcal{L}^2(X, \mathbb{C})$ nichtleer, da die konstante Nullfunktion enthalten ist. Als Unterraum des Vektorraumes aller Abbildungen von X nach $\mathbb{C}$ ist $\mathcal{L}^2(X, \mathbb{C})$ also selbst ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum. $\square$

– Das Integral $\langle f, g \rangle = \int_X \overline{f(x)}g(x)dx$ ist wohldefiniert.

Beweis. Zunächst ist $\bar{f}g$ messbar nach Satz 6.16. Außerdem hat man die Abschätzung $|\bar{f}g| \stackrel{(*)}{\leq} \max(|f|^2, |g|^2)$ und die rechte Seite ist Lebesgue-integrierbar nach Annahme und Verbandseigenschaften. Nach Satz 6.16 ist dann auch $\bar{f}g$ Lebesgue-integrierbar, also ist $\langle f, g \rangle \in \mathbb{C}$ wohldefiniert. $\square$

Dass $\langle f, g \rangle$ eine antisymmetrische Sesquilinearform ist, kann man elementar nachprüfen. Außerdem ist relativ klar, dass $\int_X |f|^2 dx \geq 0$ für alle $f \in \mathcal{L}^2(X, \mathbb{C})$, da $|f|^2 \geq 0$. Bei der positiven Definitheit bekommt man jedoch Schwierigkeiten:

Sei $N \subseteq X$ eine nichtleere Nullmenge. Dann ist $0 \neq \chi_N \in \mathcal{L}^2(X, \mathbb{C})$, aber $\langle \chi_N, \chi_N \rangle = \int_X |\chi_N|^2 dx = 0$. Also ist die Sesquilinearform nur *positiv semidefinit*.

Dieses Problem kann man nur “mit Gewalt“ lösen. Welche Funktionen machen überhaupt Schwierigkeiten?

- Satz: Sei $f \in \mathcal{L}^2(X, \mathbb{C})$ beliebig. Dann gilt $\langle f, f \rangle = 0$ genau dann, wenn $N_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge ist.⁵⁰

Beweis. Angenommen, es gilt $\langle f, f \rangle = 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man eine Hilfsmenge durch $N_n := \{x \in X \mid |f(x)|^2 \geq 1/n\}$. Dann folgt $0 \leq \frac{1}{n}\chi_{N_n} \leq |f|^2$, also ist $I(\frac{1}{n}\chi_{N_n}) = 0$ und somit N_n eine Nullmenge. Dann ist auch die abzählbare Vereinigung $N_f = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n$ eine Nullmenge. Die andere Richtung ist klar nach Blatt 8 Aufgabe 3. $\square$

⁴⁹Die letzte Ungleichung folgt aus $|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| = (|a| - |b|)^2 \geq 0$.

⁵⁰Vergleiche Lemma 7.2 im Skript.

Sei $\mathcal{L}_N^2(X, \mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{L}^2(X, \mathbb{C}) \mid N_f \text{ ist Nullmenge}\}$ der Raum der sogenannten *Nullfunktionen*, dies ist ein $\mathbb{C}$ -Untervektorraum von $\mathcal{L}^2(X, \mathbb{C})$ (zeigen!). Um die positive Definitheit der Sesquilinearform zu erzwingen, bilden wir den Quotientenraum:

$$L^2(X, \mathbb{C}) := \mathcal{L}^2(X, \mathbb{C}) / \mathcal{L}_N^2(X, \mathbb{C}).$$

Man identifiziert also Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden: $f \sim g$ genau dann, wenn $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge ist. Der Raum $L^2(X, \mathbb{C})$ besteht nun aus Äquivalenzklassen $[f]$ von Funktionen. Für solche Äquivalenzklassen definiert man

$$\langle [f], [g] \rangle := \langle f, g \rangle = \int_X \bar{f}(x)g(x)dx.$$

Dies ist wohldefiniert, da das Integral sich nicht ändert, wenn man einige Funktionswerte auf einer Nullmenge abändert. Die Sesquilinearität und die Antisymmetrie übertragen sich, die positive Semidefinitheit bleibt auch erhalten. Nehmen wir nun an, dass $\langle [f], [f] \rangle = 0$, dann folgt $\int_X |f|^2 dx = 0$, also ist die "Nichtnullstellenmenge" N_f eine Nullmenge. Aber damit ist $f \sim 0$, also äquivalent zur Nullfunktion, mithin ist $[f] = [0]$. Die positive Definitheit ist also auch gewährleistet.

Es verbleibt nur noch zu zeigen, dass $L^2(X, \mathbb{C})$ mit der Norm $\|[f]\|_{L^2} := \sqrt{\langle [f], [f] \rangle}$ ein vollständiger metrischer Raum ist. Die Metrik ist gegeben durch $d([f], [g]) := \|[f] - [g]\|_{L^2}$. Die Vollständigkeit von $L^2(X, \mathbb{C})$ wird durch den Satz von Fischer-Riesz sichergestellt. Den Beweis kann man im Skript in Abschnitt 7.3 nachlesen.

- Notation: Um Schreibarbeit zu sparen, schreibt man kurz f für die Äquivalenzklasse $[f]$ und vereinbart stillschweigend, dass damit die Äquivalenzklasse gemeint ist. Man muss allerdings beachten, dass dann f keine Funktion mehr ist, die man an einer Stelle "auswerten" kann, das heißt " $f(x)$ " für festes x ist nicht mehr definiert, da man ja f auf der Nullmenge $\{x\}$ beliebig abändern kann. Trotzdem nennt man ein Element von $L^2(X, \mathbb{C})$ eine *L^2 -Funktion*. Vorsicht!

Das ist für die Physik kein Problem, da man ohnehin nicht sinnvoll sagen kann, was auf einer Nullmenge passiert. Eine physikalische Messung einer ortsabhängigen Größe beinhaltet prinzipiell immer eine Integration, da es keine punktförmigen Messgeräte gibt.

- Wir besprechen mindestens zwei physikalische Anwendungen von $L^2(X, \mathbb{C})$:
 - Man verwendet L^2 -Funktionen, um quantenmechanische Zustände zu beschreiben. Ein quantenmechanischer Zustand eines Teilchens entspricht⁵¹ (in der Ortsraumdarstellung des Schrödingerbildes) einem $\psi \in L^2(X, \mathbb{C})$. Dabei fordert man die zusätzliche Normierung $\|\psi\|_{L^2} = 1$. In der Physik nennt man dann ψ auch einen *ket*-Vektor und schreibt $|\psi\rangle$ statt ψ . Der Grund dafür wird später klar.

⁵¹Es gibt später noch Details wie Spin und Isospin.

– Der Raum $L^2(X, \mathbb{C})$ ist auch der angemessene Rahmen, um Fouriertransformationen zu erklären.

- Beispiel: Sei $\psi \in L^2(X, \mathbb{C})$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude für ein Elektron in der Ortsraumdarstellung, das sich im Raum X befindet. Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem Teilraum $V \subseteq X$ zu messen, ist dann $P(e \text{ in } V) = \int_V |\psi|^2 dx$. Falls $V = X$, dann muss das Elektron irgendwo in X zu messen sein, also $P(e, X) = \int_V |\psi|^2 dx = 1$. Das erklärt die Normierung.⁵²
- Man hat eine kanonische Einbettung $C_c(X, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(X, \mathbb{C})$, die Hintereinanderschaltung der beiden Abbildung liefert eine Injektion $C_c(X, \mathbb{C}) \hookrightarrow L^2(X, \mathbb{C})$. Injektivität gilt, da jede Äquivalenzklasse $[f] \in L^2(X, \mathbb{C})$ höchstens einen stetigen Vertreter enthält ($X \setminus N$ ist dicht in X für jede Nullmenge N).⁵³ Man sagt dann (Schreibweise):

$$C_c(X, \mathbb{C}) \subseteq L^2(X, \mathbb{C}),$$

wobei man jedes $f \in C_c(X, \mathbb{C})$ mit seinem Bild identifiziert.

- Wir kehren jetzt zurück zur Situation am Anfang und betrachten einen beliebigen Hilbertraum H .

In jedem Hilbertraum H gelten die Schwartzungleichung $|\langle v, w \rangle_H| \leq \|v\|_H \|w\|_H$ (Beweis wie in der linearen Algebra) und damit auch die Dreiecksungleichung $\|v + w\|_H \leq \|v\|_H + \|w\|_H$, wie sich das für eine anständige Norm gehört.⁵⁴

- Wie jeder Vektorraum hat auch H einen Dualraum. Der algebraische Dualraum ist $H^* : \{v : H \rightarrow \mathbb{C} \text{ linear}\}$. Dieser Raum ist allerdings zu groß, nicht jede lineare Abbildung $v : H \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig. Als wir gezeigt haben, dass lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig sind, da haben wir die Raumdimension in der Abschätzung als Konstante verwendet. Ein Hilbertraum muss nicht endlichdimensional sein.
- Eine lineare Abbildung $v : H \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig genau dann, wenn $\sup_{h \neq 0} \frac{|v(h)|}{\|h\|_H} < \infty$.

Beweis. Nehmen wir an, dass $C = \sup_{h \neq 0} \frac{|v(h)|}{\|h\|_H} < \infty$ beschränkt ist. Seien $h_n, h \in H$ mit $\|h_n - h\|_H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, das heißt h_n konvergiert in H gegen h . OBdA nehmen wir an, dass $h_n \neq h$ für alle n . Dann folgt

$$|v(h_n) - v(h)| = \frac{|v(h_n - h)|}{\|h_n - h\|} \cdot \|h_n - h\| \leq \sup_{\psi \neq 0} \frac{|v(\psi)|}{\|\psi\|_H} \cdot \|h_n - h\| = C \|h_n - h\|.$$

Also konvergiert $v(h_n)$ gegen $v(h)$. Somit ist v stetig.

⁵²Multipliziert man ψ mit einem Phasenfaktor $\exp(i\theta) \in \mathbb{C}$ mit $\theta \in \mathbb{R}$, dann beschreibt $\exp(i\theta)\psi$ die gleiche Physik wie ψ . Das ist eine Eichung.

⁵³Übungsaufgabe: Falls $f = g$ fast überall und f und g beide stetig sind, dann gilt $f = g$.

⁵⁴ $(\|v + w\|_H)^2 = \|v\|_H^2 + 2\Re(\langle v, w \rangle) + \|w\|_H^2 \leq \|v\|_H^2 + 2\|v\|_H \|w\|_H + \|w\|_H^2 = (\|v\|_H + \|w\|_H)^2$ wegen Schwartz-Ungleichung, dann Wurzelziehen.

Nehmen wir umgekehrt an, dass v stetig ist. Falls $\frac{|v(\psi)|}{\|\psi\|_H}$ für $\psi \in H$ nicht nach oben beschränkt ist, dann gibt es eine Folge $\psi_n \in H$ mit $\frac{|v(\psi_n)|}{\|\psi_n\|_H} > n$. Indem man ψ_n durch $\frac{1}{\sqrt{n}\|\psi_n\|_H} \psi_n$ ersetzt, kann man annehmen, dass $\|\psi_n\|_H = 1/\sqrt{n}$. Dann konvergiert zwar ψ_n gegen Null in H , aber $|v(\psi_n)| > \sqrt{n}$, also konvergiert $v(\psi_n)$ nicht gegen $0 = v(0)$. Damit kann aber v nicht stetig sein. Widerspruch! $\square$

Falls $v : H \rightarrow \mathbb{C}$ linear und stetig ist, so nennt man $\|v\|_{H'} = \sup_{\psi \neq 0} \frac{|v(\psi)|}{\|\psi\|_H}$ die Norm von v .

- Der *stetige Dualraum* ist $H' := \{v : H \rightarrow \mathbb{C} \text{ linear und stetig}\}$. Dies ist ein normierter $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit der oben eingeführten Norm. Dies ist der in der Physik relevante Dualraum.
- Wenn $\psi \in H$ liegt, dann wird durch $v(h) := \langle \psi, h \rangle$ ein Element $v \in H^*$ definiert. Die Stetigkeit von v folgt dabei unmittelbar aus der Schwartz-Ungleichung, da $\sup_{h \neq 0} \frac{|\langle \psi, h \rangle|}{\|h\|_H} \leq \|\psi\|_H$. Da man $h = \psi$ wählen kann, folgt sogar die Gleichheit der Normen $\|v\|_{H'} = \|\psi\|_H$. Ein Physiker schreibt dann auch $\langle \psi |$ für dieses v , ein solches Element des Dualraums heißt *Bra*-Vektor. Damit erhält man

$$\langle \psi | | h \rangle = \langle \psi, h \rangle,$$

das erklärt die Schreibweise und die Bezeichnungen⁵⁵.

Man erhält eine antilineare Abbildung $i : H \rightarrow H'$ definiert durch $i(\psi) = \langle \psi |$, die die Norm erhält, also eine Isometrie. Isometrien sind immer injektiv, wie man sich leicht selbst überlegen kann.

- Der Riesz'sche Darstellungssatz besagt, dass die Abbildung $i : H \rightarrow H'$ tatsächlich ein isometrischer Isomorphismus von normierten Räumen ist. In der Quantenmechanik ist diese Tatsache fundamental.

⁵⁵”Klammer“ heißt ”bracket“ auf englisch, besteht also aus den Silben ”Bra“ und ”Ket“.

09.01.2013 Hilbertraumbasen und Fourierreihen

Um mit Hilberträumen konkret arbeiten zu können, ist es häufig nützlich, eine Basis zur Verfügung zu haben. Allerdings benutzt man keine Basis im Sinne der linearen Algebra (das wäre eine Hamelbasis), sondern eine sogenannte *Hilbertraumbasis*. Zum Nachlesen bieten sich im Weissauer-Skript die Abschnitte 7.5 bis 7.8 an.

Wir werden sehen, dass der Raum $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ für die Quantenmechanik von fundamentaler Bedeutung ist. Als Anwendung diskutieren wir außerdem die Entwicklung von L^2 -Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ in Fourierreihen.

- Erinnerung: Ein Hilbertraum ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum H mit einem Skalarprodukt; das Skalarprodukt erzeugt eine Norm durch $\|f\|_H := \sqrt{\langle f, f \rangle_H}$, diese wiederum erzeugt eine Metrik $d(f, g) := \|f - g\|_H$ und der metrische Raum (H, d) muss vollständig sein.
- Beispiele für Hilberträume:
 1. Der endlichdimensionale Raum $\mathbb{C}^k$ mit dem Skalarprodukt $\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^k \bar{a}_j b_j$.
 2. Der Raum $L^2(X, \mathbb{C})$ über einer messbaren Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^k$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int \bar{f}(t)g(t)dt$,
 3. Der Raum $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \{a = (a^\nu)^{\nu \in \mathbb{Z}} \mid \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |a^\nu|^2 \text{ konvergiert}\}$ mit dem Skalarprodukt $\langle a, b \rangle = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \bar{a}_\nu b_\nu$.
- Sei H ein Hilbertraum. Eine *Hilbertraumbasis* von H ist eine Teilmenge $S = \{e_\nu \in H \mid \nu \in I\}$ mit den folgenden Eigenschaften:
 1. Die Elemente aus S bilden ein Orthonormalsystem, das heißt $\langle e_\nu, e_\mu \rangle = \delta_{\mu\nu}$;
 2. der von S erzeugte⁵⁶ Vektorraum $B = \bigoplus_{\nu \in I} \mathbb{C}e_\nu$ liegt dicht in H .
- Definition: Ein Hilbertraum heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare Hilbertraumbasis besitzt.

Die für die Physik relevanten Hilberträume sind praktisch alle separabel oder endlich-dimensional. Manchmal umfasst der Begriff “separabel” auch die endlichdimensionalen Hilberträume, diese Konvention benutzen wir hier nicht.
- Satz 7.7: Sei H ein separabler Hilbertraum H mit Hilbertraumbasis $S = \{e^\nu \mid \nu \in \mathbb{Z}\}$. Dann gibt es einen isometrischen⁵⁷ Isomorphismus

$$\begin{aligned} \iota : \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) &\longrightarrow H \\ a = (a^\nu)^{\nu \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a^\nu e_\nu. \end{aligned}$$

⁵⁶In B sind nur endliche Linearkombinationen zugelassen.

⁵⁷Isometrisch bedeutet hier $\langle a, b \rangle_{\ell^2} = \langle \iota(a), \iota(b) \rangle_H$ für alle $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $\iota^{-1}(h) = (\langle e_\nu, h \rangle)^{\nu \in \mathbb{Z}}$. Man erhält die Koeffizienten der Reihendarstellung von $h = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a^\nu e_\nu$ also einfach, indem man $a^\nu = \langle e_\nu, h \rangle$ berechnet.

Der Beweis steht im Skript auf Seite 107 bei Satz 7.7. Man zeigt in dieser Reihenfolge: Wohldefiniertheit von ι auf $C_c(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, Isometrie auf $C_c(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, Wohldefiniert auf $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ und Isometrie dort, Linearität von ι , Injektivität und dann Surjektivität.⁵⁸

- Für $h \in H$ erhält man also $h = \iota \circ \iota^{-1}(h) = \iota((\langle e_\nu, h \rangle)^{\nu \in \mathbb{Z}}) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \langle e_\nu, h \rangle e_\nu$. In Bra-Ket-Notation bedeutet das, dass

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |e_\nu\rangle \langle e_\nu| = id$$

der Identitätsoperator ist. Es ist ein beliebter Rechentrick in der Quantenmechanik, eine geeignete Basis zu wählen und dann diesen Operator an passender Stelle in einer Gleichung einzusetzen. Diese Form des Identitätsoperators heißt auch *Vollständigkeitsrelation*.

- Eine wichtige Anwendung von Hilbertraumbasen findet man später beim Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren. Operatoren $A : H \rightarrow H$, die messbare Größen beschreiben, also Observablen sind, sind selbstadjungiert. Nach dem Spektralsatz gibt es dann eine Hilbertraumbasis aus Eigenvektoren von A .
- Eine weitere Anwendung von Hilbertraumbasen liegt in der Konstruktion von Fourierreihen. Wir diskutieren nun diesen wichtigen Anwendungsfall.
- Sei $H = L^2([0, 1], \mathbb{C})$. Dann lässt sich eine Hilbertraumbasis konkret angeben, indem man

$$\begin{aligned} e_k : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \exp(2\pi i k t) \end{aligned}$$

definiert und dabei beachtet, dass man in $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ natürlich mit Äquivalenzklassen von Funktionen arbeitet. Um nachzuweisen, dass es sich tatsächlich um eine Hilbertraumbasis handelt, zeigt man zuerst, dass man ein Orthonormalsystem hat:

$$\langle e_\nu, e_\mu \rangle = \int_0^1 \exp(2\pi i(\mu - \nu)t) dt = \delta_{\mu\nu}$$

mit dem Kroneckerdelta.

Um zu zeigen, dass der Raum $B = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} e_\nu$ tatsächlich dicht in $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ liegt, benutzt man am besten den Satz von Stone-Weierstraß. (Skript Abschnitt 7.8)

- Da die oben konstruierte Basis $S = \{\exp(2\pi i \nu \cdot) | \nu \in \mathbb{Z}\}$ also abzählbar viele Basisvektoren enthält, ist $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ separabel und wir können den obigen Satz benutzen. Damit ist $\iota : \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2([0, 1], \mathbb{C})$ ein isometrischer Isomorphismus von Hilberträumen.

⁵⁸In der Übung vorgeführt.

- Für jedes $f \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$ gibt es also eine Reihenentwicklung $f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a^\nu e_\nu = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a^\nu \exp(2\pi i \nu \cdot)$, wobei die Konvergenz bezüglich der L^2 -Norm zu verstehen ist. Die Fourierkoeffizienten a^ν berechnet man wie oben durch

$$a^\nu = \langle e_\nu, f \rangle_{L^2} = \int_0^1 f(t) \exp(-2\pi i \nu t) dt.$$

Da ι eine Isometrie ist, erhält man außerdem die folgende Plancherelformel. Sei $f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a^\nu e_\nu \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$ beliebig, dann gilt:

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |a^\nu|^2 = \langle a, a \rangle_{\ell^2} = \langle \iota(a), \iota(a) \rangle_{L^2} = \langle f, f \rangle_{L^2} = \int_0^1 |f(t)|^2 dt.$$

- Im Weissauerskript wird als Beispiel die Funktion $f(t) = t - \frac{1}{2}$ für $0 \leq t \leq 1$ diskutiert. Obwohl diese Funktion offensichtlich stetig ist, konvergiert die Fourierreihe nicht punktweise. Die Fourierkoeffizienten sind $a^0 = 0$ und $a^\nu = \frac{-1}{2\pi i \nu}$. Obwohl $f(0) = -\frac{1}{2}$, so ist der Wert der Fourierreihe bei $t = 0$ je nach Interpretation entweder nicht definiert oder 0 (wenn man den Cauchyhauptwert bildet).
- Falls aber $f \in C^2([0, 1], \mathbb{C})$ und $f(0) = f(1)$ sowie $f'(0) = f'(1)$, so konvergiert die Fourierreihe tatsächlich punktweise.
- Zweimal stetig differenzierbare periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x) = f(x + 1)$, die auf $[0, 1]$ quadratintegrabel sind, lassen sich nach Einschränkung auf $[0, 1]$ wie oben behandeln. Die Elemente der Hilbertbasis sind ebenfalls 1-periodisch, die Entwicklung konvergiert also auf ganz $\mathbb{R}$ punktweise wie im Skript gezeigt wird.
- Falls die Periode einer Funktion nicht 1, sondern ein beliebiges $p \in \mathbb{R}_{>0}$ ist, so gelten obige Aussagen sinngemäß nach Reskalierung. Alles was oben für den Raum $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ gesagt wurde, gilt für $L^2([a, b], \mathbb{C})$ analog.

16.01.2013 Fouriertransformation auf $\mathbb{R}$

Das Thema heute war Abschnitt 7.9 im Weissauer-Skript.

Letzte Woche hatten wir L^2 -Funktionen aus $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ in Fourierreihen entwickelt. Die Kompaktheit von $[0, 1]$ war dabei eine wesentliche Voraussetzung gewesen. Für Funktionen aus $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ muss man also anders vorgehen; hier gibt es keine Fourierreihen. Die Fouriertransformation von $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist keine Reihe, sondern liegt wieder in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Über die physikalische Anwendung der Fouriertransformation braucht an dieser Stelle vermutlich nichts mehr gesagt zu werden. Fouriertransformation ist ein unverzichtbares und alltägliches Werkzeug der Physik.

An dieser Stelle soll daher verstärkt auf die mathematische Formulierung eingegangen werden. Um die Notation übersichtlich zu halten, behandeln wir nur den eindimensionalen Fall.

- Ziel: Die Fouriertransformation auf $\mathbb{R}$ ist ein Isomorphismus

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}),$$

der folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle_{L^2}$ für $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (Parseval-Plancherel-Formel),
2. $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f)(x) = f(-x)$ fast überall für $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (Fourier-Inversionsformel).

Um diese Abbildung $\mathcal{F}$ zu definieren, brauchen wir zunächst den Schwartzraum:

- Definition: Der Schwartzraum wird definiert⁵⁹ durch:

$$\mathcal{S} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid \forall a, b \in \mathbb{N}_0 \exists C_{a,b} > 0 \text{ sodass } |x^a \partial_x^b f(x)| < C_{a,b}\}.$$

Dies ist der Raum der “glatten und schnell fallenden” Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Für $x \rightarrow \pm\infty$ gehen $f(x)$ und alle Ableitungen von $f(x)$ schneller gegen Null als das Inverse jedes Polynoms. Man führt den Schwartzraum ein, damit man bedenkenlos ableiten und integrieren kann.

- Der Schwartzraum ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum und enthalten in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Die natürliche Abbildung $\mathcal{S} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, die $u \in \mathcal{S}$ auf die zugehörige Äquivalenzklasse in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ abbildet, ist injektiv. (Idee: Falls zwei stetige Funktionen fast überall übereinstimmen, dann sind sie schon gleich.) Man sagt auch (Sprechweise): “ $\mathcal{S} \subseteq L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ”.
- Die Fouriertransformation für $f \in \mathcal{S}$ wird wie folgt⁶⁰ definiert:

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(2\pi ixy) dx.$$

⁵⁹Strenggenommen müsste man $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ statt $\mathcal{S}$ schreiben.

⁶⁰Es sind verschiedene Definitionen in der Literatur zu finden. Oft integriert man auch über $f(x) \exp(ixy)$, dann benötigt man einen Normierungsfaktor $1/\sqrt{2\pi}$.

- Die wichtigste Eigenschaft ist nun, dass die Fouriertransformierte einer Schwartzfunktion wieder eine Schwartzfunktion ist. Genauer hat man:

Lemma: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, dann gilt

1. $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ist wohldefiniert und $\mathbb{C}$ -linear,
2. $\mathcal{F}\left(\left(\frac{\partial_x}{2\pi i}\right)^m f(x)\right)(y) = (-y)^m \mathcal{F}(f)(y)$ für $f \in \mathcal{S}$,
3. $\mathcal{F}\left(x^m f(x)\right)(y) = \left(\frac{\partial_y}{2\pi i}\right)^m \mathcal{F}(f)(y)$ für $f \in \mathcal{S}$,
4. die Gaußfunktion $f_G(x) = \exp(-\pi x^2)$ ist ein Fixpunkt, d. h. $\mathcal{F}(f_G) = f_G$.

Der Beweis steht ausführlich im Weissauerskript. Siehe Lemma 7.14.

Die Multiplikation einer Funktion mit x^m entspricht also nach Fouriertransformation der Anwendung des Differentialoperators $\left(\frac{\partial_y}{2\pi i}\right)^m$ und umgekehrt.⁶¹

- Wir definieren nun den $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\mathcal{H} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}x^n \exp(-\pi x^2)$. Man kann unmittelbar nachprüfen, dass er in $\mathcal{S}$ enthalten ist, die Fouriertransformation ist also für $f \in \mathcal{H}$ definiert. Eine weitere wichtige Eigenschaft ist, dass $\mathcal{H} \subseteq L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dicht bezüglich der L^2 -Norm ist. Dieser Satz ist nicht offensichtlich und wird im Skript bewiesen (Lemma 7.16, benutzt Lemma 7.15). Aus Zeitgründen wurde der Beweis in der Zentralübung ausgelassen.
- Die Idee besteht nun darin, eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ zu konstruieren, diese ist dann eine Hilbertraumbasis von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Die Fouriertransformation wird dann auf den Basisvektoren diskutiert und dann als stetiger Operator nach $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fortgesetzt. Dieses Vorgehen ist für Operatoren auf Hilberträumen üblich, wenn man sie nur auf einem dichten Teilraum durch eine Formel konkret definieren kann.
- Zunächst definiert man für $N \in \mathbb{N}_0$ den Raum $V_N := \bigoplus_{n=0}^N \mathbb{C}x^n \exp(-\pi x^2)$, dies ist offensichtlich ein endlichdimensionaler Vektorraum. Mit dem Gram-Schmidt-Verfahren kann man nun eine Orthonormalbasis $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von $\mathcal{H}$ so konstruieren, dass $(f_0, \dots, f_N)$ eine Orthonormalbasis von V_N ist. Man erhält dadurch Polynome H_n der Ordnung n , sodass $f_n(x) = H_n(x) \exp(-\pi x^2)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die Polynome H_n nennt man *Hermite-Polynome*, sie sind eindeutig bis auf eine Normierungskonstante.

Man kann die Hermite-Polynome auch durch eine konkrete Formel angeben:

$$H_n(x) = c_n \exp(2\pi x^2) \partial_x^n \exp(-2\pi x^2),$$

dabei ist c_n eine unbestimmte Konstante, die man so wählt, dass die Basisvektoren durch $\|H_n(x) \exp(-\pi x^2)\|_{L^2} = 1$ normiert sind. Dass diese Definition eine

⁶¹Anwendungen: Differentialgleichungen werden nach Fouriertransformation zu algebraischen Gleichungen, die sich manchmal leichter lösen lassen. Es ist auch möglich, *schwache Ableitungen* zu definieren, indem man eine eventuell nicht im klassischen Sinne differenzierbare Funktion im Fourierbild mit x^n multipliziert und dann (falls möglich) zurücktransformiert. Dies ist ein möglicher Weg, um Sobolev-Räume zu definieren.

Orthonormalbasis $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{H}$ liefert, kann man durch partielle Integration nachrechnen. (Siehe Skript)

Mit dieser Formel zeigt man auch direkt: $(-1)^n H_n(x) = H_n(-x)$.

Randbemerkung: Man kann die Hermitepolynome auch durch die *Hermite'sche Differentialgleichung* charakterisieren:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Das benötigen wir aber hier nicht.

- Da $\mathcal{H}$ dicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt, ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Hilbertraumbasis von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Insbesondere erhalten wir: $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist separabel.
- Durch eine konkrete Rechnung⁶² kann man zeigen, dass $f_n = H_n \exp(-\pi x^2)$ jeweils ein Eigenvektor⁶³ der Fouriertransformation mit Eigenwert i^n ist:

$$\mathcal{F}(f)(y) = i^n f(y).$$

Der Beweis dafür steht im Weissauerskript bei Satz 7.17. Daraus folgert man für die Basisvektoren die Aussagen

$$\begin{aligned} \langle f_n, f_m \rangle_{L^2} &= \delta_{nm} = \langle i^n f_n, i^m f_m \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F}(f_n), \mathcal{F}(f_m) \rangle_{L^2} \quad \text{und} \\ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f_n)(x) &= i^n \cdot i^n \cdot f_n(x) = (-1)^n f_n(x) = f(-x). \end{aligned}$$

Man erhält nun insbesondere, dass die Einschränkung $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ wohldefiniert ist und dass $\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}$ für $f \in \mathcal{H}$ gilt.

Nun ist $\mathcal{F}$ eine stetiger linearer Operator auf einem dichten Teilraum von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Die Fortsetzung von $\mathcal{F}$ nach $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist nun ein Standardargument aus der Funktionalanalysis:

Sei $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ beliebig, dann existiert eine Folge $(g_n)_n$, sodass $g_n \in \mathcal{H}$ und $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$, da $\mathcal{H}$ dicht liegt. Damit ist $(g_n)_n$ eine Cauchyfolge, also ist auch $(\mathcal{F}(g_n))_n$ eine Cauchyfolge. Da $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vollständig ist, existiert $\mathcal{F}(g) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(g_n)$. Man kann zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl der Folge $(g_n)_n$ abhängt.

Damit ist $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ wohldefiniert, linear und stetig.⁶⁴

- Durch Linearität und Stetigkeit von $\mathcal{F}$ erhält man

$$\boxed{\langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle_{L^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f)(x) = f(-x),}$$

für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, da diese Aussagen auf den Hilbertraumbasisvektoren erfüllt sind.

⁶²In der Übung vorgeführt, aber hier nicht abgetippt.

⁶³Da ich gefragt wurde: Das ist keineswegs immer so. Die Hilbertraumbasis wurde hier absichtlich so konstruiert, dass sie aus Eigenvektoren von $\mathcal{F}$ besteht. Es gibt andere Hilbertraumbasen dieses Raumes, die nicht aus Eigenvektoren zu $\mathcal{F}$ bestehen.

⁶⁴Die Definition von $\mathcal{F}$ auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ musste durch diesen Fortsetzungsprozess geschehen, da der Ausdruck $f(x) \exp(2\pi i x y)$ für beliebiges $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ nicht notwendig Lebesgue-integrierbar ist.

- Die Fouriertransformation einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$ für $k \in \mathbb{N}$ kann man nun analog erklären. Man definiert auf dem entsprechenden Schwartzraum eine Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^k, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$ durch

$$\mathcal{F}(f)(\mathbf{y}) := \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}) \exp(2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$. Dann setzt man $\mathcal{F}$ als stetigen linearen Operator nach $L^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$ fort und erhält wieder die oben eingerahmten Eigenschaften.

23.01.2013 Wiederholung und Klausurvorbereitung

Zur Vorbereitung auf die Klausur habe ich heute den Stoff der Vorlesung wiederholt.

30.01.2013 Klausur

Anstelle der Zentralübung fand heute die Klausur statt. Die Ergebnisse sind in der Müsli-Datenbank einsehbar.

06.02.2013 Mannigfaltigkeiten

Das nächste Thema ist voraussichtlich Mannigfaltigkeiten. Die Übung wird in den großen Hörsaal am Philosophenweg 12 verlegt.