

Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker III – WS 2012/13 Blatt 9
Dr. Rolf Busam/Mirko Rösner

Abgabe bis Freitag, den 21.12.2012, um 11:15 Uhr in den Übungskästen in INF 288.
Website: <http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/HM3>

In Aufgabe 1 und 2 ist immer die euklidische Standardnorm auf $\mathbb{R}^n$ gemeint.

1. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit Volumen $V := \text{vol}_n(K) > 0$. Der Schwerpunkt $S(K) = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch $s_j := \frac{1}{V} \int_K x_j d^3x$. Berechnen Sie den Schwerpunkt S für die folgenden Mengen:

(a) $\Delta^{(3)} = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ und } x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$,

(b) $H = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R \text{ und } x_3 \geq 0\}$ für eine festes $R \in \mathbb{R}_{>0}$.

Tipp: Verwenden Sie den Satz von Fubini. (2P+2P)

2. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt und $\rho : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige Dichtefunktion.¹ Man nennt $M := \int_K \rho(x) d^3x$ die Gesamtmasse von K bezüglich ρ . Für eine Gerade² $L \subseteq \mathbb{R}^3$ sei $d(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\|$ der Abstand eines Punktes $x \in \mathbb{R}^3$ zu L . Die Zahl $\Theta(L) := \int_K \rho(x) d(x, L)^2 d^3x$ nennt man das Trägheitsmoment von K bezüglich der Rotationsachse L .

(a) Sei $K := \{x \in \mathbb{R}^3 | \|x\| \leq R\}$ die Kugel mit Radius $R > 0$, sei ρ konstant und sei $L := \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$ die “ x -Achse”. Zeigen Sie, dass $\Theta(L) = \frac{2}{5} R^2 M$.

(b) Sei ρ konstant, dann gilt $M = \rho V$ mit $V = \text{vol}_3(K)$. Sei $S = (s_1, s_2, s_3)$ der Schwerpunkt von K , sei $L \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade durch S und sei L' eine zu L parallele Gerade, die zu L den Abstand $\delta = d(s, L')$ hat. Zeigen Sie den *Satz von Steiner*: (2P+3P)

$$\Theta(L') = \Theta(L) + M\delta^2.$$

3. Sei V der $\mathbb{R}$ -Vektorraum $V = C^0([-1, 1], \mathbb{R}) = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ und sei

$$\|f\|_1 := \int_{-1}^1 |f(t)| dt \quad \text{für } f \in V.$$

Zeigen Sie: Dann ist $f \mapsto \|f\|_1$ eine Norm auf V .

Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_{>0}}$ mit $f_k \in V$, definiert durch

$$f_k(x) := \begin{cases} -1 & -1 \leq x < -\frac{1}{k}, \\ kx & -\frac{1}{k} \leq x < \frac{1}{k}, \\ 1 & \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $(f_k)_k$ ist bezüglich der oben definierten Norm eine Cauchyfolge, die aber in V nicht konvergiert. (2P+2P)

¹Nach Aufgabe 2 auf Blatt 7 ist ρ integrierbar über K .

²Man definiert eine Gerade durch zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $x \neq y$ als $L = \{x + t(y - x) | t \in \mathbb{R}\}$.

4. Sei $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ die wie folgt gegebene Menge von komplexen Folgen:

$$\ell^2(\mathbb{N}_0) := \{a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \mid a_k \in \mathbb{C} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \text{ konvergiert.}\}$$

Zeigen Sie:

- (a) Der Folgenraum $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum.
- (b) Für $a, b \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ konvergiert die Reihe $\langle a, b \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} b_k$ und definiert ein Skalarprodukt.
- (c) Bezüglich der Norm $\|a\| := \sqrt{\langle a, a \rangle}$ ist der metrische Raum $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ vollständig.

Damit ist der Folgenraum $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ also ein Hilbertraum. (2P+2P+2P)