

Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker III – WS 2012/13 Blatt 4
Dr. Rolf Busam/Mirko Rösner

Abgabe bis Freitag, den 16.11.2012, um 11:15 Uhr in den Übungskästen in INF 288.
Website: <http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/HM3>

1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet (d.h. offen, nichtleer und zusammenhängend) und sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(z) = u(z) + iv(z)$ für reelle Funktionen u und v . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) f ist konstant,
- (ii) u ist konstant,
- (iii) v ist konstant,
- (iv) $\bar{f} = u - iv$ ist holomorph,
- (v) $|f|$ ist konstant. (5P)

2. Bestimmen Sie zu den unten angegebenen Funktionen $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils alle Funktionen $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $f = u + iv$ holomorph ist:

(a) $u(x + iy) := 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$, (2P)

(b) $u(x + iy) := \exp(x)(x \cos(y) - y \sin(y))$. (2P)

Bonusaufgabe:

Zeigen Sie folgenden Satz: Sei $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, das heißt u ist zweimal stetig partiell differenzierbar und $\Delta u = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})u = 0$. Dann gibt es ein $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $f(z) := u(z) + iv(z)$ holomorph ist. (+2P extra)

3. Seien $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ Folgen komplexer Zahlen. Nehmen Sie an, die komplexen Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l$ haben Konvergenzradius $\geq r_0$ für ein festes $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, das heißt sie konvergieren für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r_0$. Sei nun für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Zeigen Sie: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hat Konvergenzradius $\geq r_0$ und für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r_0$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l \right).$$

(2P+2P)

4. Seien $D, \tilde{D} \subseteq \mathbb{C}$ zwei Gebiete, sei $\phi : D \rightarrow \tilde{D}$ eine konforme¹ Abbildung und nehmen Sie an, jede holomorphe Funktion auf D hat eine Stammfunktion. Dann hat auch auf $\tilde{D}$ jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion.² (4P)

¹Das heißt ϕ ist bijektiv und sowohl ϕ als auch ϕ^{-1} sind unendlich oft komplex differenzierbar.

²Der Begriff "Stammfunktion" ist hier im Sinne der komplexen Differenzierbarkeit zu verstehen.