Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker III – SS 2012 Blatt 2
Dr. Rolf Busam/Mirko Rösner

Abgabe bis Freitag, den 02.11.2012, um 11:15 Uhr in den Übungskästen in INF 288.
Website: `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/HM3`

Für die ersten drei Aufgaben benötigen Sie keine Differentialformen.

1. Sei ein Kraftfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x,y) := \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$. Eine Punktmasse ($m = 1\,\text{kg}$) bewege sich vom Punkt $p := \binom{1}{1}$ zum Punkt $q = \binom{2}{4}$. (Entfernungen in Metern, Kräfte in Newton)

   (a) Warum hängt die dabei geleistete Arbeit nicht vom konkreten Weg des Massenpunktes ab? (1P)

   (b) Wieviel Arbeit wird dabei geleistet? (2P)

2. Wir identifizieren den euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$ mit der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und sei $\gamma : [a,b] \to U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$ das *Kurvenintegral von f längs γ.*

   (a) Zeigen Sie durch Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil ($f = u + iv$), dass gilt:

   $$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i \int_\gamma (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)$$

   (2P)

   (b) Seien $c \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ feste Konstanten und sei der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) := c + \lambda(\cos(kt) + i\sin(kt))$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-c}\mathrm{d}z$. (2P)

   Anmerkung: $z \in \mathbb{C}$ wird nach Konvention durch $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ in Real- und Imaginärteil zerlegt.

3. Sei $\gamma : [a,b] \to U$ eine glatte Kurve in einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$. Sei $c \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $c \neq \gamma(t)$ für alle $t \in [a,b]$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktion

   $$g : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto g(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - c}\mathrm{d}s,$$

   stetig differenzierbar ist mit $g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-c}$. (2P)

   (b) Zeigen Sie, dass die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{C}$, $h(t) := (\gamma(t) - c)\exp(-g(t))$ im Intervall $[a,b]$ konstant ist und dass gilt $\exp(g(t)) = \frac{\gamma(t)-c}{\gamma(a)-c}$. (2P)

(c) Für eine geschlossene Kurve (d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$) folgt $\exp(g(b)) = 1$, d.h. es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $g(b) = 2\pi i k$. Folgern Sie, dass $\chi(\gamma, c) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-c} \mathrm{d}z$ eine ganze Zahl ist. Man nennt $\chi(\gamma, c)$ die *Umlaufzahl* von γ um c. (2P)

4. Sei $U \in \mathbb{R}^2$ ein offenes nichtentartetes achsenparalleles Rechteck, d.h. $U = (c, d) \times (c', d')$ mit $c < d$ und $c' < d'$. Sei $\omega(x, y) := p(x, y)\mathrm{d}x + q(x, y)\mathrm{d}y$ eine stetig differenzierbare 1-Form auf U mit $\partial_2 p = \partial_1 q$. Da U ein Sterngebiet ist, ist die geschlossene 1-Form $\omega \in A^1(U)$ nach dem Poincaré-Lemma auch exakt, besitzt also eine Stammfunktion.

   Geben Sie einen expliziten Beweis für diese Aussage an, indem Sie zeigen, dass für beliebiges $(a, b) \in U$ durch $F(x, y) := \int_a^x p(t, b)\mathrm{d}t + \int_b^y q(x, s)\mathrm{d}s$ eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ definiert wird, die $\mathrm{d}F = \omega$ erfüllt. (4P)