Dr. Rolf Busam/Mirko Rösner

Abgabe bis Freitag, den 18.01.2013, um 11:15 Uhr in den Übungskästen in INF 288.
Website: `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/HM3`

---

1. Für $\nu \in \mathbb{N}_0$ sei $f_\nu \in C([0,1],\mathbb{R})$ definiert durch $f_\nu(x) := \exp(\nu(x - \sqrt{x}))$. Zeigen Sie, dass $(f_\nu)_\nu$ punktweise monoton gegen eine Grenzfunktion $f(x) = \inf_\nu f_\nu(x)$ konvergiert. Bestimmen Sie $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ und geben Sie $f(x)$ konkret an. (3P)

2. Sei eine reelle Funktion gegeben durch

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ als uneigentliches Regelintegral wohldefiniert ist. (2P)

   (b) Zeigen Sie, dass $f(x)$ über $\mathbb{R}$ nicht Lebesgue-integrierbar ist. (3P)

   Hinweis: Zeigen Sie für a) zunächst, dass f stetig ist. Zeigen Sie dann, dass die Grenzwerte $\lim\limits_{c\to\infty} \int_0^c f(x)\mathrm{d}x$ und $\lim\limits_{c\to\infty} \int_{-c}^0 f(x)\mathrm{d}x$ jeweils in $\mathbb{R}$ existieren.

3. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = -\frac{1}{2} \\ \text{und } &\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von Fubini? (3P)

4. Sei $u \in L^2([0,1],\mathbb{C})$ gegeben durch $u(x) = x$.

   (a) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $c_k = \int_0^1 \exp(-2\pi i k t)u(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$ und schreiben Sie u als Fourierreihe:

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \exp(2\pi i k x).$$

   Die Konvergenz der Reihe ist hier im L^2-Sinn zu verstehen.

   (b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Hinweis: Verwenden Sie die Plancherelformel $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \int_0^1 |u(t)|^2\mathrm{d}t$. (2P+2P)