Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

L-Funktionen und ε-Konstanten II

5. Übungsblatt

17.05.2017

Auf dem ganzen Blatt sei p eine feste Primzahl, L eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und $\mathcal{O}$ ihr Ganzheitsring.

Aufgabe 1 (*3+4+1=8 Punkte*)**.** Es sei G eine Gruppe, R ein kommutativer Ring und M ein $R[G]$-Modul. Eine *Erweiterung* von M ist eine exakte Sequenz von $R[G]$-Moduln

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

(wir schreiben dafür auch kurz E). Zwei solche Erweiterungen E, E' heißen *äquivalent*, wenn es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E' \arrow[r] & R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

gibt (beachte, dass die Abbildung $E \longrightarrow E'$ dann automatisch ein Isomorphismus ist!). Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen von Erweiterungen hier mit mit $\mathrm{Ext}_G(R, M)$.

(a) Finde eine kanonische Abbildung $\Phi\colon\ \mathrm{Ext}_G(R, M) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G, M)$. Zeige, dass für eine Erweiterung E wie oben gilt:

$$E \text{ zerfällt als direkte Summe } E \cong M \oplus R \iff \Phi(E) = 0.$$

(b) Tatsächlich ist die Abbildung Φ sogar eine Bijektion. Um das zu sehen, beschreiben wir Gruppenkohomologie durch *inhomogene* Kozykel und Koränder, die durch

$$Z^1(G, M) := \{f : G \longrightarrow M \mid \forall g, h \in G\colon f(gh) = f(g) + gf(h)\},$$
$$B^1(G, M) := \{f : G \longrightarrow M \mid \exists m \in M\, \forall g \in G\colon f(g) = gm - m\}$$

definiert sind. Benutze ohne Beweis, dass $\mathrm{H}^1(G, M) \cong Z^1(G, M)/B^1(G, M)$ gilt, um eine Bijektion $\mathrm{H}^1(G, M) \cong \mathrm{Ext}_G(R, M)$ zu finden.

Hinweis: Als R-Modul muss natürlich jede Erweiterung E eine direkte Summe $M \oplus R$ sein. Benutze Kozykel, um auf dieser Summe eine G-Aktion zu definieren, sodass sie zu einer Erweiterung wird.

(c) Überlege dir, dass die entsprechenden Aussagen auch gelten, wenn G eine proendliche Gruppe ist, $R = L$ oder $R = \mathcal{O}$ und wir stetige Moduln betrachten.

Aufgabe 2 (*2+4+1+2+3=12 Punkte*). In dieser Aufgabe sei V ein L-Vektorraum mit einer stetigen $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_\ell}$-Operation (für Primzahlen $p \neq \ell$). Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass für jede p-adische Darstellung W von $\widehat{\mathbb{Z}}$ gilt

$$\dim \mathrm{H}^0(\widehat{\mathbb{Z}}, W) = \dim \mathrm{H}^1(\widehat{\mathbb{Z}}, W), \quad \mathrm{H}^i(\widehat{\mathbb{Z}}, W) = 0 \text{ für } i > 1.$$

(a) Zeige $\dim \mathrm{H}^0_\mathrm{f}(\mathbb{Q}_\ell, V) = \dim \mathrm{H}^1_\mathrm{f}(\mathbb{Q}_\ell, V)$ (am besten, indem du zwei geeignete kurze exakte Sequenzen findest). Wie lässt sich $\mathrm{H}^0_\mathrm{f}(\mathbb{Q}_\ell, V)$ „konkret“ (einfacher) beschreiben?

(b) Benutze eine der exakten Sequenzen aus Teil (a), um kanonische Isomorphismen

$$\mathrm{H}^i_\mathrm{f}(\mathbb{Q}_\ell, V) \cong \mathrm{H}^i(\mathbb{F}_\ell, V^{\mathrm{I}_\ell}) \quad (i = 0, 1)$$

zu finden.
Hinweis: Überlege dir zuerst, dass die Dimensionen der Gruppen jeweils gleich sind. Außerdem ist hier die Aussage aus Aufgabe 2 (b) vom 3. Übungsblatt hilfreich.

(c) Ist G eine proendliche Gruppe, N ein abgeschlossener Normalteiler und A ein stetiger G-Modul, so gibt es die *Inflations-Restriktions-Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(G/N, A^N) \xrightarrow{\mathrm{inf}} \mathrm{H}^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{H}^1(N, A)^{G/N} \longrightarrow \cdots.$$

Die Abbildungen hier heißen *Inflation* und *Restriktion*; die Restriktionsabbildung ist in der Beschreibung durch Koketten tatsächlich durch die Einschränkung gegeben.
Benutze diese, um einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^1_\mathrm{f}(\mathbb{Q}_\ell, V) \cong \ker\left(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_\ell, V) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{H}^1(\mathrm{I}_\ell, V)\right)$$

zu finden.

(d) Wir benutzen die Aussage aus Aufgabe 1, nach der $\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_\ell, V)$ Erweiterungen

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

klassifiziert. Zeige: Das zu einer solchen Erweiterung gehörende Element liegt genau dann in $\mathrm{H}^1_\mathrm{f}(\mathbb{Q}_\ell, V)$, wenn die Sequenz

$$0 \longrightarrow V^{\mathrm{I}_\ell} \longrightarrow E^{\mathrm{I}_\ell} \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

exakt ist. Folgere daraus, dass $\mathrm{H}^1_\mathrm{f}(\mathbb{Q}_\ell, V)$ die unverzweigten Erweiterungen von V klassifiziert, wenn V unverzweigt ist.

(e) Was passiert mit den Aussagen, wenn wir überall V durch ein $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_\ell}$-stabiles $\mathcal{O}$-Gitter T ersetzen? Zeige, dass für unverzweigtes T immer noch $\mathrm{H}^1_\mathrm{f}(\mathbb{Q}_\ell, T) \cong \mathrm{H}^1(\mathbb{F}_\ell, T)$ gilt.

Abgabe in der Übung am 24. Mai oder vorher in mein Postfach neben Zimmer 3/417.
Besprechung in der Übung am 24. Mai.