Surreale Zahlen (Conway)

Bsp für eine Anordnung, die das archimed. Axiom nicht erfüllt.

A

umfassen die reellen, aber es gibt unendl. große und unendl. kleine Zahlen, d.h. eine Anordnung "$>$" auf ihnen, dass w ex. mit $w > r$ für alle $r \in \mathbb{R}$, und v ex. mit $0 < v < r$ für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Konstruktionsregel

$\boxed{\text{höchst rekursiv}}$

Seien L, M Mengen von (surrealen) Zahlen, und
$\forall m \in M, l \in L: m > l$, dann ist $\{L | M\}$ eine surreale Zahl.

Jede surreale Zahl läßt sich so beschreiben.

Bsp: $\{\{1,2\} \mid \{10,17\}\}$ ~~ist eine surreale Zahl~~ wäre ok

$\{\{1,2\} \mid \{0,17\}\}$ ist ~~keine~~ nicht ok

Bez: $x = \{L_x \mid M_x\}$, oft $\{1,2 \mid 10,17\}$ etc.
linke, rechte Menge

Bsp: $\{L \mid \emptyset\}$ ist eine Zahl, die größer als jede Zahl in L ist.
$\{\emptyset \mid M\}$ — " — kleiner — " — M — ".

Vergleichsregel

Für $x = \{L_x \mid M_x\}$ und $y = \{L_y \mid M_y\}$ gilt $x \leq y$, falls
y kleinergleich keinem Element von L_x ist, und
kein Element von M_y kleinergleich x ist.

Diese Ordnungsrelation ist reflexiv und transitiv, aber ~~noch~~ nicht antisymmetrisch: Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt noch nicht $x = y$. Bsp später.

Definiere: $x == y$, falls $x \leq y$ und $y \leq x$.
d.h. wir identifizieren ~~die~~ diese x und y, d.h. $[x] = [y]$ bilden Äquiv.kl.

<u>Bsp:</u> – $\{\emptyset|\emptyset\} = \{\,|\,\} =: 0$, bzw. $\cancel{\{}0\cancel{\}} = [\{\emptyset|\emptyset\}]$.

– $0 \leq 0$ (Vergl.regel)

– Konstr.: $\{0|\emptyset\}$, $\{\emptyset|0\}$, $\underbrace{\{0|0\}}$

Das ist keine wohldef. surreale Zahl! weil $0 \not\leq 0$.

– Vergl.regel: $\underbrace{\{\emptyset|0\}}_{\substack{\parallel \\ -1}} < 0 < \underbrace{\{0|\emptyset\}}_{\substack{\parallel \\ 1}}$, d.h. $-1 < 0 < 1$.

– Konstr: $\{\emptyset|-1\} == \{\emptyset|-1,0\} == \{\emptyset|-1,1\} == \{\emptyset|-1,0,1\}$

$< \{\emptyset|0,1\} == -1 < \{-1|0\} == \{-1|0,1\} < \{-1|\emptyset\}$

$== \{\emptyset|1\} == \{-1|1\} == \{0\} < \{0|1\} == \{-1,0|1\}$

$< \{-1,0|\emptyset\} == 1 < \{1|\emptyset\} == \{0,1|\emptyset\} == \{-1,1|\emptyset\}$

$== \{-1,0,1|\emptyset\}$

D.h.: Neue Äquiv.-Kl. $[\overset{\overset{-2}{\parallel}}{\{\emptyset|-1\}}]$, $[\overset{\overset{-\frac{1}{2}}{\parallel}}{\{-1|0\}}]$, $[\overset{\overset{\frac{1}{2}}{\parallel}}{\{0|1\}}]$, $[\overset{\overset{2}{\parallel}}{\{1|\emptyset\}}]$

mit mehr als einem Element.

Der Wert einer surr. Zahl hängt nur ab vom größten Element der li Menge und vom kleinsten Element der rechten Menge. (Wenn es das gibt.)

Es gilt: $[L_x] = [L_y]$ und $[M_x] = [M_y]$ $\Rightarrow$ $[\{L_x|M_x\}] = [\{L_y|M_y\}]$.

$-2 < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1 < 2$.

<u>Bsp:</u> $\{1,2|5,8\} == \{2|5\}$

Rechnen: (C)

- $x+y = \{ (L_x+y) \cup \{x+L_y\} \mid (M_x+y) \cup (x+M_y) \}$

  $\left[\underline{\text{Bem}}: \; M+y = \{ m+y \mid m \in M \} \right]$

- $-x = \{ -M_x \mid -L_x \}$ $\quad \left[\text{Bem}: \; -M = \{ -m \mid m \in M \} \right]$

- $x \cdot y = \{ (L_x \cdot y + x \cdot L_y - L_x \cdot L_y) \cup (M_x \cdot y + x \cdot M_y - M_x \cdot M_y) \mid (L_x \cdot y + x \cdot M_y - L_x \cdot M_y) \cup (M_x \cdot y + x \cdot L_y - M_x L_y) \}$

  $\left[\text{Bem}: \; M \cdot y = \{ m \cdot y \mid m \in M \}, \quad M_1 + M_2 = \{ m_1 + m_2 \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2 \} \right]$

$\underline{\text{Bsp}}$: $0+0=0$, $\quad 1+1=2$, $\quad -(1)=-1$, $\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2} == 1$.

⇝ Überträgt sich auf Äquiv.-Kl.

Die Äquiv.kl. zusammen mit der Anordnung ~~und~~ + und · erfüllen <u>alle</u> Eigenschaften eines geord. Körpers, mit der <u>Ausnahme</u>, dass ~~sie~~ sie eigentlich eine echte Klasse und keine Menge bilden.

Nächstes Mal

Bsp für + und · rechnen,

Erzeugung durch Induktion.

Erzeugung durch Induktion

Def. systematischer Mengen S_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

- $S_0 = \{0\}$
- $S_{i+1} = S_i \cup$ surrealen Zahlen, die wir durch einen Konstr.schritt erzeugen können.

D.h.: $S_1 = \{-1 < 0 < 1\}$.

$S_2 = \{-2 < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1 < 2\}$

$S_3 = \{-3 < -2 < -\frac{3}{2} < -1 < -\frac{3}{4} < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} < 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1 < \frac{3}{2} < 2 < 3\}$

Also versch. sich die äußeren Grenzen um ± 1, und zw. je zwei alten Zahlen wird eine neue erzeugt.

⇝ So erzeugt man alle Zahlen der Form $\frac{a}{2^b}$.
Aber nicht $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$, solange $n \in \mathbb{N}$.

⇝ Durch $\{a \mid b\}$ wird die „älteste" surr. Zahl zw. a und b dargestellt,
z.B. $\{1, 2 \mid 5, 8\} = \{2 \mid 5\} = 3$.

als Ordinalzahl
Sei nun ω: Ordinalzahl als konstruierte Zahl. Sei S_ω die Menge der so konstruierten Zahlen.
Dann bezeichne $S_{\omega+1}$, $S_{\omega+2}$, etc. die surr. Zahlen, die wir daraus in einem, zwei etc. Konstr.schritten erhalten können.

$\mathbb{R} \subset S_{\omega+1}$, da (Intervallschachtelung: $\frac{k}{2^j} \in S_\omega$ für alle $k, j \in \mathbb{Z}$)

untere Zahlen in li Menge — obere Zahlen in re Menge

$S_{\omega+1} \ni \varepsilon := \{0 \mid \ldots, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$. $\varepsilon > 0$, aber $\varepsilon < \frac{p}{q}$ für alle $0 < p, q \in \mathbb{N}$.

<u>Infinitesimale Zahl</u>.

E

$$\left[\begin{array}{l} 2\varepsilon = \{ \varepsilon \mid \ldots, \varepsilon + \frac{1}{16}, \varepsilon + \frac{1}{8}, \varepsilon + \frac{1}{4}, \varepsilon + \frac{1}{2}, \varepsilon + 1 \} \\ \frac{\varepsilon}{2} = \{ 0 \mid \varepsilon \} \end{array}\right\} \in S_{\omega+2} .$$

$S_{\omega+1} \ni w := \{ S_\omega \mid \emptyset \}$. $\quad w > x$, $x \in S_\omega$ bel.

$[w] =: [\omega]$ $\quad \Longrightarrow$ unendl. große Zahl.

$[\, w == \{ 1, 2, 3, 4, \ldots \mid \emptyset \}$.

$\omega + 1 = \{ \omega \mid \emptyset \}$ und $\omega - 1 = \{ S_\omega \mid \omega \}$

$\omega + 2 = \{ \omega + 1 \mid \emptyset \}$, $\omega - 2 = \{ S_\omega \mid \omega - 1 \}$

$\omega + 3 = \{ \omega + 2 \mid \emptyset \}$, $\omega - 3 = \{ S_\omega \mid \omega - 2 \}$

$\omega + \omega = \{ \omega + S_\omega \mid \emptyset \}$

$2\omega = \omega + \omega > \omega$, $\quad \frac{\omega}{2} < \omega$, da $\frac{\omega}{2} = \{ S_\omega \mid \omega - S_\omega \}$

$\varepsilon \cdot \omega = \left[\{ 0 \mid \ldots, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \} \cdot \{ \omega + S_\omega \mid \emptyset \} \right] = 1$

<u>Bem</u>: Die Zahl $\tilde{\varepsilon} = \{ \emptyset \mid \{ \frac{1}{2^k} \mid k \in \mathbb{N} \} \}$, über die wir gesprochen haben, erfüllt $0 \leq \tilde{\varepsilon}$ (da $0 = \{\emptyset \mid \emptyset\}$), aber auch $\tilde{\varepsilon} \leq 0$.

Daher ist $0 == \tilde{\varepsilon}$, d.h. die surrealen Zahlen $[0]$ und $[\tilde{\varepsilon}]$ sind gleich:

$[\tilde{\varepsilon}] = [0]$.