Plenarübung 26.1.2016

Lösungen zu den Aufgaben 57, 58, 60, 61 von Blatt 12

Wissen: Summen, Produkte, Vielfache von stetigen Fkten sind stetig.

57.

$X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\xi \in X$ fest.

(a) z.z.: Die Fkten $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, die die Landau-Bed.

$$f(x) = o(x-\xi)$$

erfüllen bilden einen $\mathbb{R}$-VR.

Bew: Wir zeigen (i) $0 = o(x-\xi)$ (die 0-Fkt erfüllt Landau-Bed.)

(ii) allgemeiner $\lambda \cdot f(x) = o(x-\xi)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $f(x) = o(x-\xi)$

(iii) $f(x),\ g(x) = o(x-\xi) \Rightarrow (f+g)(x) = o(x-\xi)$.

(*) Eine Fkt f erfüllt $f(x) = o(x-\xi) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ es. ex. Fkt $H_f: X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = \|x-\xi\| \cdot H_f(x)$ und H_f stetig in ξ und $H_f(\xi) = 0$.

zu (i): Es ist $0 = \|x-\xi\| \cdot 0$, d.h. mit $H_0 \equiv 0$ ist stetig und $H_0(\xi) = 0$ ist Landau-Bed. erfüllt.

zu (ii): Sei $f(x) = \|x-\xi\| \cdot H_f(x)$ mit H_f wie oben in (*)

Dann gilt $\lambda \cdot f(x) = \|x-\xi\| \cdot \lambda \cdot H_f(x)$, und λH_f ist auch stetig in ξ mit $\lambda H_f(\xi) = \lambda \cdot 0 = 0$ f.a. $\lambda \in \mathbb{R}$.

zu (iii) Seien $\left\{\begin{array}{l} f(x) = \|x-\xi\| \cdot H_f(x) \\ g(x) = \|x-\xi\| \cdot H_g(x) \end{array}\right\}$, wo $\left\{\begin{array}{l} H_f \\ H_g \end{array}\right\}$ wie in (*)

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \|x-\xi\| \cdot (H_f(x) - H_g(x))$$
$$= \|x-\xi\| \cdot (H_f - H_g)(x).$$

$H_f - H_g$ ist wiederum stetig in ξ mit $(H_f - H_g)(\xi) = 0 - 0 = 0$.

Aus (i) – (iii) folgt: Diese Fkten bilden add. Gr., die abg. unter Multipl. mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ ist, d.h. einen $\mathbb{R}$-VR.

57. (b) $f: X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = o(x-\xi)$, $g: X \to \mathbb{R}$ stetig und $|g|$ beschränkt.

z.z.: $f(x) \cdot g(x) = o(x-\xi)$.

Bew: Sei $f(x) = \|x-\xi\| \cdot H_f(x)$, H_f stetig in ξ, $H_f(\xi) = 0$.

Dann ist $g(x) \cdot H_f(x)$ stetig in ξ und

$$g(\xi) \cdot H_f(\xi) = g(\xi) \cdot 0 = 0,$$

d.h. mit $H_{g \cdot f} := g \cdot H_f$ gilt $f(x) g(x) = \|x-\xi\| \cdot H_{g \cdot f}(x)$

$$= o(x-\xi).$$

58. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ zul., $f, g: X \to \mathbb{R}^m$ diffbar in $\xi \in X$.

(a) z.z.: $D_\xi(f+g) = D_\xi(f) + D_\xi(g)$

Bew: Da f, g in ξ diffbar, ist $f(x) - f(\xi) - D_\xi(f)(x-\xi) = o(x-\xi)$

und $g(x) - g(\xi) - D_\xi(g)(x-\xi) = o(x-\xi)$,

wo $D_\xi(f)$ und $D_\xi(g): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lin. Abb.

$\Rightarrow (f+g)(x) - (f+g)(\xi) - (D_\xi(f) + D_\xi(g))(x-\xi) = o(x-\xi)$.

Da $(D_\xi(f) + D_\xi(g))$ eine lin. Abb., ist $f+g$ in ξ also diffbar. Ihre Abl. dort, $D_\xi(f+g)$ ist eind. best., also $= D_\xi(f) + D_\xi(g)$.

(b) z.z.: $f, g: X \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in X$.

$\Rightarrow D_\xi(f \cdot g) = D_\xi(f) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot D_\xi(g)$

Bew: Da f, g diffbar in ξ, ex. H_f, H_g stetig in ξ mit $H_f(\xi) = 0 = H_g(\xi)$ und $H_f, H_g: X \to \mathbb{R}$

$$f(x) = f(\xi) + D_\xi(f)(x-\xi) + \|x-\xi\| \cdot H_f(x)$$

$$g(x) = g(\xi) + D_\xi(g)(x-\xi) + \|x-\xi\| \cdot H_g(x)$$

für eind. best. lin. Abb. $D_\xi(f), D_\xi(g): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Forts. 58(b)

Dann gilt also:

$$f(x)\cdot g(x) = f(\xi)\,g(\xi) + f(\xi)\,D_\xi(g)(x-\xi) + \|x-\xi\|\cdot f(\xi)\cdot H_g(x)$$
$$+ g(\xi)\cdot D_\xi(f)(x-\xi) + \|x-\xi\|\cdot g(\xi)\cdot H_f(x)$$
$$+ \|x-\xi\|^2\cdot H_f(x)\cdot H_g(x)$$
$$+ D_\xi(f)(x-\xi)\cdot D_\xi(g)(x-\xi),$$

somit:

$$f(x)\cdot g(x) - f(\xi)\cdot g(\xi) - \big(g(\xi)\cdot D_\xi(f) + f(\xi)\cdot D_\xi(g)\big)(x-\xi)$$
$$= +\|x-\xi\|\Big(\overbrace{f(\xi)\cdot H_g(x) + g(\xi)\cdot H_f(x)}^{=\,o(x-\xi)\text{ nach 58(a)}} + \overbrace{\|x-\xi\|\cdot H_f(x)\cdot H_g(x)}^{\text{stetig, }|_{x=\xi}=0}$$
$$+ \underbrace{D_\xi(f)\cdot(x-\xi)}_{\text{stetig}\,|_{x=\xi}=0}\cdot\underbrace{D_\xi(g)\,\frac{(x-\xi)}{\|x-\xi\|}}_{\text{stetig, beschränkt,}}\Big)$$

da Werte auf 1-Sphäre betrachtet werden.

$$\Big\|D_\xi(g)\cdot\frac{(x-\xi)}{\|x-\xi\|}\Big\| \le \|D_\xi(g)\| \quad \text{(Operatornorm)}$$

$$= o(x-\xi)$$

$\Rightarrow$ Beh.

60. $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in I$.

z.z.: $$\lim_{h_n \to 0} \frac{f(\xi+h_n)-f(\xi)}{h_n}$$

existiert, $= f'(\xi) \left(= D_\xi(f)\right)$ für alle Folgen $(h_n)_n$ mit $h_n \neq 0$.

Bew: Es ist $f(\xi+h_n) - f(\xi) - f'(\xi)\overbrace{(\xi+h_n-\xi)}^{h_n} = |\xi+h_n-\xi| \cdot H_f(\xi+h_n)$

mit H_f stetig in ξ, $H_f(\xi)=0$, da f diffbar in ξ.

$$\Rightarrow \frac{f(\xi+h_n)-f(\xi)}{h_n} = f'(\xi) + |h_n| \cdot H_f(\xi+h_n) \quad (*)$$

für alle $h_n \neq 0$.

$$\lim_{\substack{h_n \to 0 \\ h_n \neq 0}} \left(f'(\xi) + |h_n| \cdot H_f(\xi+h_n)\right) = f'(\xi) + 0 \cdot 0 = f'(\xi),$$

somit aus $(*)$: $$\lim_{\substack{h_n \to 0 \\ h_n \neq 0}} \frac{f(\xi+h_n)-f(\xi)}{h_n} = f'(\xi).$$

Umkehrung

61. $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$, $\xi \in I$.

Es existiere $$\lim_{\substack{h_n \to 0 \\ h_n \neq 0}} \frac{f(\xi+h_n) - f(\xi)}{h_n} = m.$$

z.z. f ist diffbar in ξ mit $D_\xi(f) = f'(\xi) = m$.

Bew: Es sei $x \neq \xi$. Dann ist $x = \xi + h$ und

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq \xi}} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = m \text{ existiert.}$$

Betrachte: $f(x) - f(\xi) - m(x-\xi) = |x-\xi| \cdot H(x)$,

wo $$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = \xi \\ \dfrac{f(x)-f(\xi)-m(x-\xi)}{|x-\xi|} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist $\lim\limits_{\substack{x \to \xi \\ x > \xi}} H(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \xi \\ x > \xi}} \frac{f(x) - f(\xi) - m(x-\xi)}{(x-\xi)} = m - m = 0$

und ebenso

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ x < \xi}} H(x) = \lim_{\substack{x \to \xi \\ x < \xi}} - \frac{f(x) - f(\xi) - m(x-\xi)}{x-\xi} = -(m-m) = 0$$

D.h. H ist stetig in ξ mit $H(\xi) = 0$.

$\Rightarrow$ f ist diffbar in ξ mit $f'(\xi) = m$. ∎

Die Jacobi-Matrix

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diffbar in $\xi \in \mathbb{R}^n$,

d.h. ex. lin. Abb. $D_\xi(f): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$f(x) - f(\xi) - D_\xi(f)(x-\xi) = o(x-\xi).$$

Schreibt man $D_\xi(f)$ bezüglich Basen von $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ hin, erhält man eine Matrix $\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Wählt man die Standardbasen $\left.\begin{array}{l}\{e_1, \dots, e_n\} \text{ von } \mathbb{R}^n\\ \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m\} \text{ von } \mathbb{R}^m\end{array}\right\}$, so erhält man die Jacobi-Matrix $Jf(\xi) = J_\xi f$ als Beschreibung von $D_\xi(f)$.

Einträge $j_{\mu\nu} = (J_\xi f)_{\mu\nu}$ entsprechen der μ-ten Koordinate (bzgl. Basis $\{\tilde{e}_\mu\}$) des Bildes des ν-ten Basisvektors e_ν:

$$(J_\xi f)\, e_\nu = \sum j_{\mu\nu} \cdot \tilde{e}_\mu$$

Wie drückt man dies jetzt durch $D_\xi(f)$ bzw. f aus?

Die Koordinatenfktnen f_μ von $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ sind auch differenzierbar

$\left(f = \sum_{\mu=1}^m f_\mu \cdot e_\mu \right)$, und zwar nach jeder Koordinate x_ν

von $x = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \cdot e_\nu$:

$$\overset{!}{=} \frac{d}{dt} f_\mu(\xi_1, \dots, \xi_\nu + t, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_n)\Big|_{t=0}$$

$$f_\mu(\xi_1, \dots, \underset{\text{bzw. } \xi_\nu + t}{x_\nu}, \dots, \xi_n) - f_\mu(\xi_1, \dots, \xi_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_n) - \boxed{j_{\mu\nu}} \left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ x_\nu \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\nu \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \right) = o(x_\nu - \xi_\nu)$$
$$= o(\xi_\nu + t - \xi_\nu)$$
$$= o(t)$$

Dass das wirklich so ist, kann man mit der Kettenregel beweisen. [Man schreibt auch $j_{\mu\nu} = \dfrac{\partial f_\mu(\xi)}{\partial x_\nu}$ „partielle Ableitung"]

Dazu muss man den Vorgang durch Abbildungen beschreiben:

f_μ ist die μ-te Koord., d.h. geg. durch die lin. Abb. (Projektion)

$$p_\mu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \longmapsto y_\mu$$

Das „an der ν-ten Stelle zappeln lassen" beschreibt durch die affine Einbettung

$$i_\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto \xi + t \cdot e_\nu \quad ,$$

dann ist

$$f_\mu(\xi_1, \dots, \xi_{\nu-1}, \xi_\nu + t, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_n)$$
$$= \quad p_\mu \circ f \circ i_\nu(t)$$

und

$$\frac{d}{dt} f_\mu(\xi_1, \dots, \xi_{\nu-1}, \xi_\nu + t, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_n)\Big|_{t=0}$$
$$= D_0 \left(p_\mu \circ f \circ i_\nu\right)$$
$$= D_{\eta = f(\xi)} p_\mu \circ D_\xi f \circ D_0 i_\nu$$

Koord.wahl

$$= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0) \cdot J_\xi f \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(J_\xi f\right)_{\mu\nu} = j_{\mu\nu} \, .$$