Analysis I

Plenarübung vom

1.12.2015

Lösungen zu Blatt 6

Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 26: (X, d) metr. Raum, $U \subseteq X$.

z.z.: U offen $\Longleftrightarrow$ $A = X \setminus U$ abgeschlossen.

Bew.: „$\Longrightarrow$" Sei U offen. Ang., $A = X \setminus U$ nicht abgeschlossen.

Dann ex. Folge x_n in A, die in X konvergiert,

aber $\lim\limits_{n \to \infty} x_n =: x \notin A$.

Dann ist $x \in X \setminus A = U$.

Da U offen ex. ein $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Insbes. ist $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$.

Da aber x_n gegen x konv., ex. $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass

für alle $n > N$ gilt $x_n \in B_\varepsilon(x)$

$\lightning$ $(x_n \in X)$.

„$\Longleftarrow$" Sei A abgeschlossen. Ang., U ist nicht offen.

Dann gibt es ein $x \in U$ so, dass in jeder ε-Umg. von x Elemente aus A liegen. Insbes. gibt es $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$.

Die x_n bilden Folge in A mit Grenzwert x:

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $\mathbb{N} \ni N = N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, und für alle $n > N$

gilt: $d(x_n, x) < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

$\lightning$ A abgeschlossen.

Aufgabe 27

$\binom{n}{j}$ Koeff. von $x^j y^{n-j}$ des Polynoms $(x+y)^n$.

(a) z.z. (i) Für $0 \leq j < n$ gilt $\binom{n+1}{j+1} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j+1}$

(ii) Für $n \geq 0$ gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Zu (ii) Vollst. Ind.

Anf.: $n = 0$: $(x+y)^0 = 1 \Rightarrow \binom{0}{0} = 1$.

Ann: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für bel. festes $n \in \mathbb{N}$.

Schluß: $\binom{n+1}{0}$ ist Koeff. von $x^{n+1} \cdot y^0$ in $(x+y)^{n+1}$

$\binom{n+1}{n+1}$ — " — $x^0 y^{n+1}$ — " —

- $(X+Y)^{n+1} \overset{\text{Def. für } n+1}{=} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} X^j Y^{n+1-j}$
- $(X+Y)^{n+1} \overset{\text{Def. für } n}{=} (X+Y) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j Y^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(X^{j+1} Y^{n-j} + X^j Y^{n+1-j} \right)$

Koeff.vergleich von X^{n+1} darin: $\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} \overset{\text{Ann.}}{=} 1$

— " — Y^{n+1} darin: $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} \overset{\text{Ann}}{=} 1$.

Zu (i): Zur Bestimmung vom Koeff. $\binom{n+1}{j_0+1}$ von $X^{j_0+1} Y^{(n+1)-(j_0+1)} = X^{j_0+1} Y^{n-j_0}$

Koeff. vergleich: $\binom{n+1}{j_0+1} = \binom{n}{j_0} + \binom{n}{j_0+1}$

27. (b) $\binom{n}{j} \in \mathbb{N}$ f.a. n, j und gegeben durch

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \qquad (**)$$

Dass $\binom{n}{j}$ stets natürl. Zahlen sind, folgt schon aus (a):

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \in \mathbb{N}$, Für $n=0$ also $\binom{0}{0}=1$

Ann: $\binom{n}{j} \in \mathbb{N}$ für festes n und $0 \leq j \leq n$

Schritt: $\binom{n+1}{j_0+1} \overset{(a)}{=} \binom{n}{j_0} + \binom{n}{j_0+1} \overset{\text{Ann}}{\in} \mathbb{N}$.

Bew von (**) durch vollst. Ind:

Anf.: $\binom{0}{0} \overset{(a)}{=} 1 = \frac{0!}{0!(0-0)!}$ $\qquad (0! := 1)$

Ann: Für festes $n \in \mathbb{N}$ und alle $0 \leq j \leq n$ gilt (**).

Schluß: $(n \rightsquigarrow n+1)$ Für $j=0$ ist $\binom{n+1}{0} \overset{(a)}{=} 1 = \frac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!}$

Für $j=n+1$ ist $\binom{n+1}{n+1} \overset{(a)}{=} 1 = \frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+1-(n+1))!}$

Für $0 < j < n+1$ ist

$$\binom{n+1}{j} = \binom{n+1}{(j-1)+1} \overset{(a)}{=} \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}$$

$$\overset{\text{Ann.}}{=} \frac{n!}{(j-1)!(n-(j-1))!} + \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

$$= \frac{n!\,(j + (n-j+1))}{j!(n+1-j)!} = \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!}$$

q.e.d.

28. (a) z.z. $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \geq 1$. (4)

Forme um: $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) > 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) > 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{-1}{(n+1)^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n+2}$$

Nach der Bernoullischen Ungl. gilt für $n \geq 2$ und $x > -1$

$$(1+x)^n > 1+nx$$

Also folgt für $n \geq 2$: $\left(1+\frac{-1}{(n+1)^2}\right)^n > 1-\frac{n}{(n+1)^2}$

Unsere Beh. ist für $n \geq 2$ bewiesen, falls $1-\frac{n}{(n+1)^2} > 1-\frac{1}{n+2}$

Letzteres glbd. zu $\frac{1}{n+2} > \frac{n}{(n+1)^2}$ $\Leftrightarrow (n+1)^2 > n(n+2)$

$\Leftrightarrow n^2+2n+1 > n^2+2n$

$\Leftrightarrow 1 > 0$ Das ist wahr.

Für den verbliebenen Fall $n=1$:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1+1+\frac{1}{4} > 1+1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1$$

(b) Da $a_1 = 2$ und $a_n > a_1$ für alle $n \geq 2$ nach (a), ist $2 \leq a_n$ trivial, ebenso $2 = a_1 < 3$.

Um z.z. $a_n < 3$, beweisen wir zuerst den Tipp:

$$\binom{n}{k} n^{-k} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n.$$

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\underbrace{\frac{(n-1)}{n}}_{\leq 1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{(n-k+1)}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!} = \underbrace{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(k-1)}\cdots\frac{1}{2}}_{(k-1)\text{ Stück}}\cdot 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Nun wende Aufg. 27 an:

zu 28.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} \cdot \underbrace{1^{n-k}}_{=1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} n^{-k}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j}$$

$$< 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

nimm pos. Summanden hinzu

geom. Reihe.

(c) z.z.: $(a_n)_n$ konv. in $\mathbb{R}$.

Wir wenden ein Resultat aus der VL an (Satz 1.27 im Skript):

Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge in einem pythagoräischen Kp ist Cauchyfolge.

Da $\mathbb{R}$ pythagoräisch und $(a_n)_n$ nach (a) mon. wachsend, nach (b) beschränkt, ist $(a_n)_n$ CF.

Da $\mathbb{R}$ vollständig, konvergiert $(a_n)_n$.

Aufgabe 29: $0 \le x < 1$, d.h. $x \in I_0 := [0,1)$

zerteile I_0 in Teilintervalle $\left[\frac{a}{10}, \frac{a+1}{10}\right)$, $a \in \{0,1,\dots,9\}$.

$\Rightarrow$ ex.! $a_0 \in \{0,1,\dots,9\}$: $x \in I_1 := \left[\frac{a_0}{10}, \frac{a_0+1}{10}\right)$

Teile I_1 in Teilintervalle $\left[\frac{a_0}{10}+\frac{a}{100}, \frac{a_0}{10}+\frac{a+1}{100}\right)$, $a \in \{0,1,\dots,9\}$

$\Rightarrow$ ex.! $a_1 \in \{0,1,\dots,9\}$: $x \in I_2 := \left[\frac{a_0}{10}+\frac{a_1}{100}, \frac{a_0}{10}+\frac{a_1+1}{100}\right)$ etc.

Im n-ten Schritt erhalte so die linke Intervallgrenze

$$x_n := \frac{a_0}{10} + \frac{a_1}{100} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^n}.$$

(a) z.z.: $x_n \le x \le x_n + \frac{1}{10^n}$

Nach Konstr. ist $x \in I_n = \left[x_n, x_n + \frac{1}{10^n}\right)$, also ist die Ungl. gezeigt.

Daher ist $x_n \le x \le x_n + \frac{1}{10^n} \le x + \frac{1}{10^n}$ für alle n.

Da $\lim_{n\to\infty} x = x$, $\lim_{n\to\infty} x + \frac{1}{10^n} = x$ $\left(\left(x+\frac{1}{10^n}-x\right)_n = \left(\frac{1}{10^n}\right)_n \text{ geom. Folge, Nullfolge}\right)$

folgt mit Aufg. 24 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. [Oder: $0 \le x - x_n \le \frac{1}{10^n}$]

(b) $0, a_0 a_1 a_2 a_3 \dots$ Dezimalbruchentwicklung.

$a_j \in \{0,1,\dots,9\}$ für $j \in \mathbb{N}$.

z.z.: Durch $0,a_0a_1a_2\dots$ wird Zahl in $\mathbb{R}$ definiert.

Wir zeigen $x_n = 0, a_0 a_1 \dots a_{n-1} = \frac{a_0}{10} + \frac{a_1}{100} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^n}$

bildet Cauchyfolge. Schätze dazu ab für $n \ge m$:

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^{n} \underbrace{a_{k-1}}_{\in\{0,\dots,9\}} 10^{-k} < \sum_{k=m+1}^{n} 10^{-k+1} = 10^{-m} \cdot \sum_{k=0}^{n-m} 10^{-k}$$

$$\overset{\text{pos. Summanden}}{\underset{\text{addiert}}{<}} 10^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} 10^{-m} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \underbrace{\frac{10}{9}}_{<10} \cdot 10^{-m} < \frac{1}{10^{m-1}}.$$

Zu 29(b). Wenn also $\varepsilon > 0$ bel., nimm $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\left(\frac{1}{10}\right)^N < \varepsilon$ (die geom Folge $\left(\frac{1}{10}\right)^N$ ist Nullfolge) 7

Dann folgt für $n, m > N$:

$$|x_n - x_m| < \left(\frac{1}{10}\right)^N < \varepsilon .$$

D.h. $(x_n)_n$ ist Cauchyfolge.

Da $\mathbb{R}$ vollständig, konvergiert $(x_n)_n$.

<u>Oder:</u> $x_{n+1} \geq x_n$ für alle n, da $x_{n+1} = x_n + \frac{a_n}{10^{n+1}} \geq x_n$, und $x_n \leq 1$. $\Rightarrow (x_n)_n$ CF, $\xRightarrow{\mathbb{R} \text{ vollst.}} (x_n)_n$ konv.

(c) <u>z.z.:</u> $0,999\ldots = 1$ und $0,a_0a_1a_2\ldots \in [0,1)$ sonst.

<u>Bew:</u> Die Folge $x_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \ldots + \frac{9}{10^n}$ konvergiert nach (b) gegen eine reelle Zahl x.

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{10}\right)^k .$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \underset{\uparrow}{=} \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$$

geom. Reihe

In unserer Schreibweise heißt das $0,999\ldots = 1$.

~~Sei $0,a_0a_1a_2\ldots \neq 0,999\ldots$.~~ Sei $j \in \mathbb{N}$ die kleinste nat. Zahl so, daß $a_j \neq 9$, also $a_j \in \{0, \ldots, 8\}$

Die zugeh. Folge ist $x_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^j}\right) + \frac{a_j}{10^{j+1}} + \sum_{k=j+1}^{n} a_k 10^{-(k+1)}$

Dabei gilt $y_n := \sum_{k=j+1}^{n} \underbrace{a_k}_{<10} 10^{-(k+1)} \leq 9 \sum_{k=j+1}^{n} 10^{-(k+1)} = 9 \cdot 10^{-(j+2)} \sum_{k=0}^{n-(j+2)} 10^{-k}$

D.h. $0 \leq y_n \leq 9 \cdot 10^{-(j+2)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \cdot 10^{-(j+2)} \cdot \frac{10}{9} = 10^{-(j+1)}$

Also ist $0 \leq x_n = 9 \cdot \frac{10^{-(j+1)} - 1}{\underbrace{10^{-1} - 1}_{-\frac{9}{10}}} + \frac{a_j + y_n}{10^{j+1}} = 10 \cdot \left(1 - 10^{-(j+1)}\right) + \frac{a_j}{10^{j+1}} +$

$\uparrow$ zu kompliziert

Sei $0,a_0a_1a_2\ldots \neq 0,999\ldots$

Sei $j\in\mathbb{N}$ die kleinste nat. Zahl mit $a_j \neq 9$, also $a_j\in\{0,\ldots,8\}$

Dann ist für alle $n>j$

$$9\cdot\sum_{k=1}^{n}10^{-k} - \sum_{k=1}^{n}a_{k-1}10^{-k} \geq (9-a_j)\cdot 10^{-(j+1)},$$

insbes.

$$> \frac{(9-a_j)}{2}\cdot 10^{-(j+1)}$$

D.h. $0,a_1a_2a_3\ldots \leq 1-\underbrace{\frac{(9-a_j)}{2}10^{-(j+1)}}_{>0} < 1$

Andererseits ist $\sum_{k=1}^{n}a_{k-1}10^{-k}\geq 0$ für alle n

$\Rightarrow 0,a_1a_2a_3\ldots \geq 0$

Zusammen gilt: $0,a_1a_2a_3 \in [0,1)$.

$\to$ Fragen, Themen für nächsten Dienstag?