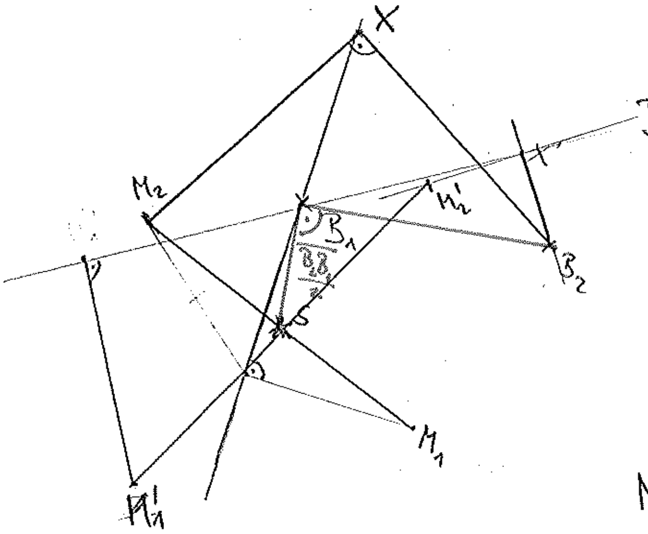
Vorlagen für die Plenarübung vom

17. 11. 2015

Analysis I

Aufgabe 20 — Schatzsuche

Wir betrachten die Insel als Teilmenge der komplexen Zahlenebene. Koordinatenwahl (ziemlich egal wie, muss sollte sie unabh. von X sein), z.B.



Baum $B_1 = 0$ Ursprung.

Beschreibe M_1, M_2 in diesem Koord.system

$$M_1 = \underbrace{-X}_{\text{vom } B_1 \text{ nochmal solange wie von } X \text{ zu } B_1} + \underbrace{i\cdot}_{90°\text{-Drehung nach links}}(-X) = -X(1+i)$$

$$M_2 = \underbrace{B_2}_{\text{in } B_2 \text{ starten}} + \underbrace{(X - B_2)}_{\text{von dort zum Kreuz}} + \underbrace{i}_{90°\text{-Drehung}}(X - B_2)$$

$$= B_2 + (1+i)(X - B_2)$$

Schatz S auf halber Strecke zw. M_1 und M_2:

$$S = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)$$

$$\overset{\text{in obigen Koord.}}{=} \frac{1}{2}\left(-X(1+i) + B_2 + (1+i)(X - B_2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-iB_2) = \frac{B_2}{2i}$$

ist unabh. von (der Lage des Kreuzes) X.

Andere Koordinatenwahl: z.B. $B_2 = 0$ Ursprung:

$M_1 = B_1 + (B_1 - X) + i(B_1 - X) = B_1 + (1+i)(B_1 - X)$

$M_2 = X + iX = (1+i)X$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) \overset{\text{in diesen Koord.}}{=} \frac{1}{2}\left(B_1 + (1+i)(B_1 - X) + (1+i)X\right) = B_1 + \frac{i \cdot B_1}{2}$ unabh. von X,

beschreibt denselben Pkt wie oben.

§ Folgen, Grenzwerte

Heute immer:
$(K, <)$ vollständiger archimedischer Körper

<u>Aufgabe:</u> (a) n durchlaufe $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. $(K<)$ vollst. archimed. Körper.
(b) Untersuche auf Konvergenz und bestimme ggf. Grenzwert:

- $a_n = \frac{1}{n^2}$, • $b_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$
- c_n rekursiv geg. mit $c_1 = 1$, $c_{n+1} = \frac{1}{2} c_n + 1$

<u>Zu a_n:</u> Wir wissen $0 < a_n < \frac{1}{n}$ f. a. n. und $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Nach Aufg. 24(a) gilt auch $\lim a_n = 0$. (an wird durch zwei konv. Folgen mit demselben Grenzwert eingeschlossen, hat also auch diesen)

Oder direkt:

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wir zeigen: Es ex. $N \overset{=N(\varepsilon)}{\in} \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > N$ gilt $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Wähle $N > \frac{1}{\varepsilon}$ (gilt nach archimed. Axiom). Dann ist $\varepsilon > \frac{1}{N}$.

Für alle $n > N$ gilt dann

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N^2} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

<u>Zu b_n:</u> Noch haben wir keine Rechenregeln für Limiten...

Beh.: $\lim_{n \to \infty} b_n = 1$.

<u>Bew:</u> Wir müssen zu bel. $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ finden so, dass für alle $n > N$ gilt: $|b_n - 1| < \varepsilon$.

Zunächst einmal ist $|b_n - 1| = \left|1 - \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$.

Also funktioniert die Wahl von $N = N(\varepsilon)$ wie oben: Wähle $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

Dann ist für $n > N$: $|b_n - 1| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Zu $(c_n)_n$: Mache aus der Rekursion eine reine Abhängigkeit von c_1:

Für große n gilt: $c_{n+1} = \frac{1}{2} c_n + 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} c_{n-1} + 1\right) + 1 = \frac{1}{4} c_{n-1} + \frac{1}{2} + 1$

$$= \frac{1}{8} c_{n-2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \ldots$$

Beh: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $c_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n c_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1$

$$\overset{c_1 = 1}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^j .$$

Bew: Durch vollst. Ind. nach n

Ind.anf: $n = 0$: $c_1 = 1$, $\sum_{j=0}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 1 = c_1$ ✓

Ind.ann: Sei n bel. aber fest und

$$c_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^j \quad \text{bewiesen}$$

Indschritt: Berechne $c_{n+2} \overset{\text{Rekursion}}{=} \frac{1}{2} c_{n+1} + 1$

$$\overset{\text{Indann}}{=} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^j + 1$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} + 1 = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^j + 1 = \sum_{j=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^j \quad \text{q.e.d.}$$

Also: $c_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^j$ ist geom. Summe.

Vorlesung: $\lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1}{1-q}$, falls $|q| < 1$.

Hier: $0 < q = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} c_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Aufgabe: Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ in K.

Zeigen: $\frac{1}{a_n}$ ist für fast alle n wohldefiniert, und
d.h. alle bis auf endl. viele

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} \text{ in } K.$$

Bew: Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ gilt für alle $n > N = N\left(\frac{|a|}{2}\right)$:

$$|a_n - a| < \frac{|a|}{2} \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\Longrightarrow} |a| - |a_n| \leq \frac{|a|}{2}$$

$$\Longrightarrow |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} < |a_n|.$$

Insbes. ist für $n > N$ also $a_n \neq 0$.

Für $n > N$ ist damit $\frac{1}{a_n}$ wohldefiniert, die übrigen $n \leq N$ sind endl. viele,

Sei nun $\varepsilon > 0$ bel. Müssen $\tilde{N} = \tilde{N}(\varepsilon) > N\left(\frac{|a|}{2}\right)$ so bestimmen, dass für $n > \tilde{N}$ gilt

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon.$$

Es ist $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a \cdot a_n}\right| = |a - a_n| \cdot \frac{1}{|a \cdot a_n|} < |a - a_n| \frac{2}{|a \cdot a|}$.

Für $\varepsilon > 0$ wähle $\tilde{N} = \tilde{N}(\varepsilon) = \max\left\{N\left(\frac{|a|}{2}\right), N\left(\varepsilon \cdot \frac{|a^2|}{2}\right)\right\}$, d.h. für alle $n > \tilde{N}$ gilt insbes.

$$|a_n - a| < \varepsilon \cdot \frac{|a^2|}{2}.$$

Dann gilt für solche $n > \tilde{N}$:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < |a - a_n| \cdot \frac{2}{|a^2|} < \varepsilon \cdot \frac{|a^2|}{2} \cdot \frac{2}{|a^2|} = \varepsilon,$$

q.e.d.