Analysis

Plenarübung vom 10.11.2015

- Teleskopsummen
- verschiedene Lösungsbeispiele für Aufgabe 14
- wenn Zeit bleibt: Fortsetzung surreale Zahlen.

Teleskopsummen

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ bel.

Seien $a_0, \ldots, a_n \in K$ (K irgendein Körper).

Beh: $$\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$$

$$\left[(a_1 - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (a_3 - \cancel{a_2}) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = -a_0 + a_n \right]$$

Bew: $$\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{j=1}^{n} a_{j-1}$$

weil K Kp und wir endl. viele Summanden haben.

mit $k := j-1$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{j=0}^{n-1} a_j$$

Umbenennung der Summationsvar.

$$= a_n + \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} a_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_j}_{=0} - a_0 = a_n - a_0$$

$\blacksquare$

alternativ: Induktion nach n:

Ind.anf: $n=1$: $\sum_{j=1}^{1} (a_j - a_{j-1}) = a_1 - a_0 = a_n - a_0$ ✓

Indann: Für alle $n \leq N$ ist $\sum_{j=1}^{N} (a_j - a_{j-1}) = a_N - a_0$.

Indschluß: z.z. $\sum_{j=1}^{N+1} (a_j - a_{j-1}) = a_{N+1} - a_0$.

Bew: $$\sum_{j=1}^{N+1} (a_j - a_{j-1}) = \sum_{j=1}^{N} (a_j - a_{j-1}) + (a_{N+1} - a_N)$$

$$\overset{\text{Indann.}}{=} a_{N+1} - a_N + (a_N - a_0) = a_{N+1} - a_0$$

q.ed.

Bsp: Berechne $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (Aufgabe 9)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overbrace{(k-k)}^{0 \text{ addiert}}+1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$$

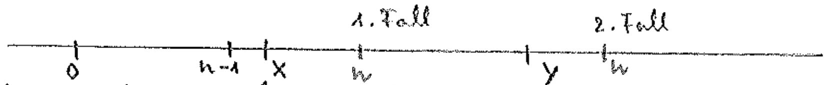
$$\overset{\text{Teleskopsumme}}{=} - \left(\frac{1}{n+1} - 1 \right) = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

14. $(K, \leq)$ archimed. Körper

(a) Z.z.: $\forall \varepsilon \in K, \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \subset K: \quad 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$

Bew.: Sei $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$ bel. Dann ist auch $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ (s. Vorl.)
Da K archimed., ex. $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}: 0 < \frac{1}{\varepsilon} < n$.
Nach Aufg. 10 (c) ist dann $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Da $\frac{1}{n} > 0$,
folgt insgesamt $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(b) z.z.: $\forall x, y \in K$ mit $0 < x < y$ ex. $p, q \neq 0$ nat. Zahlen so,
dass $x < \frac{p}{q} < y$.



Bew: Sei n die kleinste nat. Zahl mit $x < n$. | Dazu später mehr!

Später → [[Bem: Eine solche existiert! Denn nach dem archimed. Axiom gibt es eine nat. Zahl N mit $x < N$. ① [Also ist die Menge $M = \{m \in \mathbb{N} \mid x < m\}$ nicht leer. Jede Menge $\neq \emptyset$ nat. Zahlen hat ein kleinstes Element. (Man kann sie anordnen $m_1 < \ldots < m_k < \ldots$, und m_1 ist die kleinste).]
oder ②: [Unter den $1 < 2 < \ldots < N$ teste $x \overset{?}{<} 1$ falls ja: $n := 1$ ist die kleinste
falls nein: teste $x \overset{?}{<} 2$
etc.
In höchstens N Schritten (da $x < N$) findet man n mit $n-1 \leq x < n$.]]

Unterscheide folgende Fälle:

1. Fall: Es ist $n < y$. Dann ist $x < n < y$ und mit $p = n$ und $q = 1$ haben wir eine rat. Zahl $\frac{p}{q}$ gefunden mit $x < \frac{p}{q} < y$.

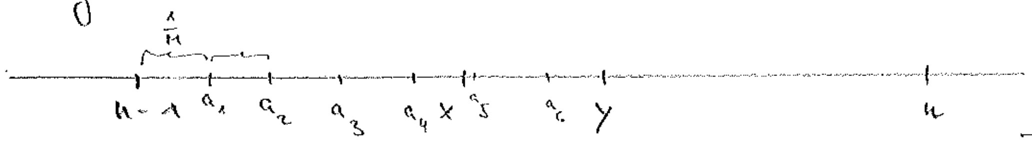
2. Fall: Es ist $y \leq n$. Es gilt also $n-1 \leq x < y \leq n$ nach Wahl von n. Es folgt $0 < y - x \leq n - x \leq n - (n-1) = 1$,
wobei $y - x = 1$ nur erreicht werden kann, wenn $n-1 = x < y = n$.
Dann ist mit $n - 1 + \frac{1}{2} = \frac{2n-1}{2} =: \frac{p}{q}$ eine rat. Zahl gefunden mit $x < \frac{p}{q} < y$.

Wir können nun also $0 < y - x < 1$ annehmen, da Beh. sonst bewiesen.

Nach Teil (a) existiert eine nat. Zahl M mit

$$0 < \frac{1}{M} < y-x.$$

Anschauung:



Beh: Unter den rat. Zahlen $a_k = n-1+\frac{k}{M}$, $k=1,\dots,M-1$, erfüllt (mindestens) eine $x<a_k<y$.

Bew: $n-1 < a_1 = n-1+\frac{1}{M} < a_2 = n-1+\frac{2}{M} < \dots < a_{M-1} = n-1+\frac{M-1}{M} < n-1+\frac{M}{M} = n$

Prüfe nun: $x \overset{?}{<} a_1$. Falls ja: Dann ist $a_1<y$, denn

$$a_1 - x \le a_1 - (n-1) = \frac{1}{M} < y-x \Rightarrow a_1<y.$$

Falls nein: $a_1 \le x$.
Prüfe nun $x \overset{?}{<} a_2$ etc.

D.h.: Ist $a_{k-1}\le x$, so prüft man im k-ten Schritt $x \overset{?}{<} a_k$. Falls nein, folgt $a_k \le x$, und mache mit a_{k+1} weiter.
Falls ja, dann ist $x<a_k<y$, denn

$$a_k - x \le a_k - a_{k-1} = \frac{1}{M} < y-x.$$

Ang., $a_k\le x$ für alle $k=1,\dots,M-1$.

Insbesondere: $a_{M-1} = n-1+\frac{M-1}{M} \le x$.

Dann folgt: $n = a_{M-1}+\frac{1}{M} \le x+\frac{1}{M} < x+(y-x) = y$,

also $n<y$. Widerspruch.

D.h. mit unserem Verfahren findet man sicher ein solches k mit $a_{k-1}\le x<a_k$. Für dieses gilt dann $x<a_k<y$, d.h. mit $q=M$ und $p=(n-1)\cdot M+k$ sind wir fertig ∎

Alternativ könnte man von oben nach unten die a_k durchgehen, oder man multipliziert x und y mit M:

$$0 < \frac{1}{M} < y - x \implies 1 < M\cdot y - Mx .$$

Wie bereits gezeigt, liegt zw. $M\cdot x$ und $M\cdot y$ eine rat. Zahl $\frac{p'}{q'}$:

$$Mx < \frac{p'}{q'} < My .$$

Dann folgt ($0 < \frac{1}{M}$) $x < \frac{p'}{Mq'} < y$, also mit $p := p'$ und $q := Mq'$ die Beh. $\blacksquare$

Noch eine mögliche korrekte Art, das aufzuschreiben:

Seien $x, y \in K$ mit $0 < x < y \implies y - x > 0$.

Wegen des archimed. Axioms ex. ein $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\frac{1}{y-x} < q .$$

Sei nun $p \in \mathbb{N}$ minimal gewählt mit $p - 1 \leq qx < p$. (*) wie vorhin!

Dann gilt: $\frac{p-1}{q} \leq x < \frac{p}{q}$, also

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x < \frac{p}{q} \leq x + \frac{1}{q} . \\ \text{Da } \frac{1}{q} < y - x \text{ folgt } x + \frac{1}{q} < y . \end{array}\right\} \implies x < \frac{p}{q} < y . \quad \blacksquare$$