Plenarübung Ana II, 7.6.2016

Begriffe auf $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^n)$

Standardintegral (Riemann-Integral)
auf $CT(\mathbb{R}) \stackrel{!}{=} \mathcal{J}$
- Träger kompakt
- Integrand stückw. stetig auf Träger. (keine Singularitäten)

Lebesgue-Integral

Ist f L-int.bar, dann auch $|f|$.

Ist f sogar stückw. stetig, dann stimmen L-Int.(f) und uneigentl. Standardint.(f) überein.

(C) Es gibt (viele) Funktionen, die L-intbar, aber nicht ue. St. int.bar sind.

(D) Ist $f \in \mathbf{L}(\mathbb{R})$ stückw. stetig ~~und kompakt~~ [illegible], ~~ist~~ ist f (uneigentl.) Stand. int.bar und die Integrale stimmen überein.

(Riemann-) uneigentliches Standardintegral:

Für eine uneigentl. Grenze ($\pm\infty$ oder Singularität des Integranden)

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx,$$

(f stückw. stetig auf $[a,\infty)$) falls dieser existiert

Für zwei uneigentl. Grenzen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx,$$

falls für alle $a \in \mathbb{R}$ die rechte Seite existiert.

(A) Sind f und $|f|$ beide uneigentl. Standard-int.bar, dann ist $|f|, f$ auch L-intbar und die L-Int(f) = uneigentl.Int(f).

(B) Es gibt uneigentl. Standardint.bare Fkten (uneigentl. St. int.bar), die nicht L-intbar sind!

Anschauung: Die L-Int.barkeit impliziert die absolute Konvergenz des Standard. int.

Beweis von (A) : $f, |f|$ uneigentl. Standardintbar. oE uneigentl. Grenzen $\pm\infty$

$\Longrightarrow$ $\chi_{[-R,R]}\cdot f$ ist Standardintbar, d.h. $\in \mathcal{B} = CT(\mathbb{R})$.

$\chi_{[-R,R]}\cdot|f|$ " " " " .

mit $\chi_{[-R,R]}\cdot|f| \nearrow |f|$, d.h. $|f| \in \mathcal{B}^+$

mit $\lim\limits_{R\to\infty} \int \chi_{[-R,R]}\cdot|f| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f| \underset{\text{n. Vor.}}{<} \infty$ (uneigentl. Standardint)

$\Rightarrow$ $|f| \in \mathcal{B}^+_{\text{fin}}$, insbes. $|f| \in L(\mathbb{R})$.

Weiter ist $|\chi_{[-R,R]} f| \leq |f| \in L(\mathbb{R})$ und $\chi_{[-R,R]} f \longrightarrow f$

$\underset{\Longrightarrow}{\text{Dom. Konv. (Lebesgue)}}$ $f \in L(\mathbb{R})$.

Bsp zu (B): $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Letztes Mal: $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx$ existiert,

d.h. f ist une. st. int. bar, aber

$\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_0^R \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty \Rightarrow |f| \notin L(\mathbb{R}) \overset{\text{Verband}}{\Longrightarrow} f \notin L(\mathbb{R})$.

Bspe zu (C): - χ_U, $U \subset \mathbb{R}$ offen

- $\chi_{\mathbb{Q}}$

Beweis von (D): z.z. ist, das alle Limiten existieren.
Für jedes $\left\{\begin{matrix} a \in \mathbb{R} \\ R > 0 \end{matrix}\right\}$ ist $\chi_{[a,R]}\cdot|f|$, $\chi_{[-R,a]}\cdot|f| \in \mathcal{B}$,

also $\chi_{[a,\infty)}\cdot|f|$, $\chi_{(-\infty,a]}\cdot|f| \in \mathcal{B}^+$

mit $\lim\limits_{R\to\infty} \int \chi_{\left\{\begin{smallmatrix}[a,R] \\ [-R,a]\end{smallmatrix}\right.}\cdot|f| < \int|f| < \infty$ $\Longrightarrow$ $|f|$ uneigentl. intbar.

Dann ist auch $\mathcal{B} \ni \chi_{[a,R]}\cdot f \longrightarrow \chi_{[a,\infty)}\cdot f$ ($\underset{\text{betragsmäßig}}{\leq}$ $\chi_{[a,\infty)}\cdot|f|$) $\Rightarrow \chi_{[a,\infty)}\cdot f \in L(X)$ etc.

<u>Wegintegral:</u> Integral längs eines Wegs im $\mathbb{R}^n$

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stückw. stetig diffbar.

$\omega \in A^1(\mathbb{R}^n)$ (reicht $\omega \in A^1(U)$, wo $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\mathrm{Im}\, \gamma \subset U$)

$$\int_\gamma \omega \overset{\text{Def.}}{=} \int_a^b \gamma^*(\omega) \quad \Big[= \int_a^b f(t)\, dt$$

für eine stückw. stetig diffbare Fkt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ⇝ Standardintegral !]

$$\omega = \sum_{j=1}^n g_j(x)\, dx_j$$

$$\Rightarrow \quad \gamma^*(\omega) = \underbrace{\sum_{j=1}^n g_j(\gamma(t)) \cdot \frac{d}{dt}(\gamma(t))_j}_{f(t)} \cdot dt$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x+y-2y}{(x+y)^3} \ldots = \int_0^1 \left(\int_0^1 \underbrace{\frac{x+y}{(x+y)^3}}_{\frac{1}{(x+y)^2}}\, dx \right) dy - \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{2y}{(x+y)^3}\, dx \right) dy$$

$$= (-1) \cdot \int_0^1 \frac{1}{x+y} \Big|_{x=0}^{x=1} dy - \frac{1}{(-2)} \int_0^1 \frac{2y}{(x+y)^2} \Big|_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= (-1) \int_0^1 \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y} \right) dy + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{2y}{(y+1)^2} - \frac{2}{y} \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{y+1} + \cancel{\frac{1}{y}} + \frac{y}{(y+1)^2} - \cancel{\frac{1}{y}} \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{(y+1)^2} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \int_0^1 \frac{-1}{(y+1)^2}\, dy = (+1) \frac{1}{y+1} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy \right) dx = -\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\, dy \right) dx \underset{x \leftrightarrow y}{=} -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

nicht über Produktraum int.bar,

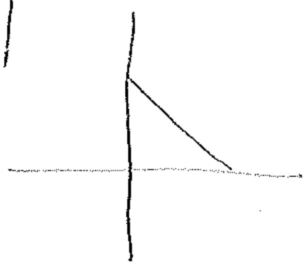
da Singularität d. Integranden in (0,0) !

$\rightsquigarrow$ uneigentl. Stand.integral berechnet,

nicht L-integral!

$$\boxed{Q(n)(R) = [0,R]\times\dots\times[0,R]} \Rightarrow vol(Q(n)) = (R-0)^n = R^n,$$

$$\boxed{S(n) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i=1,\dots,n,\ x_1+\dots+x_n \leq 1\}}$$



$$S(1) = Q(1) \Rightarrow vol(S(1)) = 1$$

$$vol(S(2)) = vol\left(\tfrac{1}{2}Q(2)\right) = \frac{1}{2}$$

$$S(n) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ x_1+\dots+x_{n-1} \leq 1-x_n\}$$

$$= \left\{(\tilde{x}, x_n)\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{\tilde{x}}{1-x_n}\in S(n-1),\ 0\leq x_n<1\right\} \,\dot\cup\, \underbrace{\{(0,\dots,0,1)\}}_{vol(\{(0,\dots,0,1)\})=0}$$

$$\Rightarrow vol(S(n)) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{S(n-1)}\left(\frac{\tilde{x}}{1-x_n}\right) d\tilde{x}\, dx_n$$

$$\overset{\text{Transf.regel}}{=} \int_0^1 (1-x_n)^{n-1}\cdot vol(S(n-1))\, dx_n$$

$$= vol(S(n-1))\cdot\frac{(-1)}{n}(1-x_n)^n\Big|_0^1 = \frac{vol(S(n-1))}{n}$$

Also

Beh: $\boxed{vol(S(n)) = \frac{1}{n!}}$

Bew. d. Ind.: $n=1, n=2$ richtig s.o.b., I.A.: $vol(S(n-1)) = \frac{1}{(n-1)!}$

Schluß: $vol(S(n)) = \frac{vol(S(n-1))}{n} \overset{\text{I.A.}}{=} \frac{1}{(n-1)!\,n} = \frac{1}{n!}$

Sei $\boxed{E^{(1)}(n) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid |x_1|+\dots+|x_n| \leq 1\}}$, $vol(E^{(1)}(n)) = \frac{2^n}{n!}$

$E^{(\infty)}(n) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \max|x_i| \leq 1\}$, $\cancel{vol}$ $vol(E^{(\infty)}(n)) = 2^n$