Plenarübung Analysis II 5. 7. 2016 (1)

Existenz von nicht-Lebesgue-meßbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Auswahlaxiom:

Sei I eine beliebige Indexmenge und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen A_i. Dann ex. eine Funktion F mit Def.bereich I, die jedem $i\in I$ ein Element $a_i\in A_i$ zuordnet

$$\boxed{F(i) = a_i \in A_i}.$$

Konstruktion und Beweis ("Vitali-Mengen")

- Definiere Äquiv.rel. $\sim$ auf $\mathbb{R}$ durch:

  $x, y \in \mathbb{R}$ heißen äquiv., $x\sim y \iff x-y\in\mathbb{Q}$.

Die Äquivalenzklassen sind $[x] = x+\mathbb{Q} = \{x+r \mid r\in\mathbb{Q}\}$; $\mathbb{R} = \bigcup [x]$

offenbar ist $V_{[x]} := [x] \cap [0,1]$ nicht leer für alle $[x]$.

Mit dem Auswahlaxiom wähle einen Repräsentanten aus $V_{[x]}$

$$F: V_{[x]} \longmapsto \tilde{x} \in V_{[x]} = [x]\cap[0,1].$$

Die Menge all dieser $\tilde{x}$ nennen wir V.

$$\left[\begin{array}{l} F: \left([x]\cap[0,1]\right)_{[x]} \longrightarrow V \\ \quad [x]\cap[0,1] \longmapsto \tilde{x} \end{array}\right]$$ Insbesondere ist $V\cap[x] = \{\tilde{x}\}$.

Beh.: V ist nicht L-meßbar.

Bew. (durch Widerspruch):

Es sei $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ (Bijektion) eine Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[-1,1]$.

Die Mengen $V_k = \{ v + q_k \mid v \in V \}$ sind paarw. disjunkt.

Es gilt: $[0,1] \subseteq \bigcup_k V_k \subseteq [-1,2]$

$[0,1] \ni x \Rightarrow$ ex. $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$: $x - \tilde{x} = q$, wo $\tilde{x} \in V, \tilde{x} \in [x]$.

Ang., V wäre meßbar, $\mathrm{vol}(V) \in [0, \infty]$

Dann ist V_k meßbar für alle $k \in \mathbb{N}$, (L-Int. translationsinvariant), und somit ist $\bigcup_k V_k$ meßbar

Es folgt: $\mathrm{vol}([0,1]) \leq \mathrm{vol}\left(\bigcup_k V_k\right) \leq \mathrm{vol}([-1,2])$, also

$$1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(V_k) \leq 3$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(V_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(V).$$

Da $1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(V)$, ist $\mathrm{vol}(V) \neq 0$.

Falls $\mathrm{vol}(V) > 0$, konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(V)$ nicht, ist also bestimmt nicht ≤ 3. $\lightning$

Bem: Betrachtet man für alle $q \in \mathbb{Q}$ die Translate $q + V = \{ v + q \mid v \in V \}$, so ist $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}_{q \in \mathbb{Q}} (q + V)$ abzählbare Vereinigung

Meßbarkeit: (X, d) metr. Raum $B = C_c(X)$ $\leadsto$ L-Integral dazu.

Def: $f : X \to \mathbb{R}$ heißt meßbar, wenn es eine Folge f_n in $C_c(X)$ gibt mit $f_n \longrightarrow f$ pktweise fast überall.

$M(X)$: $\mathbb{R}$-VR der meßbaren Fkten.

D.h. insbesondere: Es kann Stellen $x \in X$ geben mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \pm\infty$.

außerhalb einer Nullmenge

Aber die Gesamtheit dieser Stellen x ist eine Nullmenge M.

Für $x \in M$ kann man dann $f(x) \in \mathbb{R}$ beliebig wählen!

z.B. $f(x) = 0$ für $x \in M$, oder $f(x) = 1$ für $x \in M$.

Interessiert man sich nur für pktweise fastüberall-Limiten, dann macht es keinen großen Sinn mehr, Fkten zu unterscheiden, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden.

Def: $\mathcal{L}^1(X)$ sei der Raum der meß- und integrierbaren Fkten auf X.

$$\mathcal{L}^1(X)/_\sim = \mathcal{L}^1(X)/_{\text{Raum der Nullfkten}} =: L^1(X).$$

$\uparrow$

$f \sim g \iff f$ und g unterscheiden sich nur auf Nullmenge

$\iff f - g \neq 0$ nur auf einer Nullmenge

$\iff f - g$ ist Nullfkt.

[$h : X \to \mathbb{R}$ heißt Nullfkt, wenn Träger$(h) \subseteq X$ eine Nullmenge ist]

Insbes. ist $h \in L(X)$ mit $I(h) = 0$.

$M(X, \mathbb{C})$: $\mathbb{C}$VR der meßbaren Fkten mit Werten in $\mathbb{C}$.

$f: X \to \mathbb{C}$ heißt meßbar, wenn es eine Folge $f_n \in C_c(X, \mathbb{C})$ gibt mit $f_n \to f$ pktw. f.ü.

Äquivalent: $f: X \to \mathbb{C}$ heißt meßbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ meßbar sind $(\in M(X))$.

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f.$$

$$\left[f + \bar{f} = 2 \operatorname{Re} f, \qquad f - \bar{f} = 2i \operatorname{Im} f \right].$$

$$M(X, \mathbb{C}) = M(X) + i\, M(X).$$

$$\mathcal{L}^2(X) = \{ f \in M(X, \mathbb{C}) \mid |f|^2 \in L(X) \}$$

$$L^2(X) = \mathcal{L}^2(X) \Big/ \underset{\mathbb{C}\text{-wertigen}}{\text{U-VR der Nullfkten}}$$

Es ist für $f, g \in \mathcal{L}^2(X)$: $\quad |\bar{f} \cdot g| \leq \max(|f|, |g|)^2 = \max(|f|^2, |g|^2)$, also ist $|\bar{f} \cdot g| \in L(X)$. Da $\bar{f} \cdot g$ meßbar, ist auch $\bar{f} \cdot g \in L(X)$.

$\rightsquigarrow$ Skalarprodukt $\quad \langle f, g \rangle = I(\bar{f} \cdot g)$

Hilbertraum: $\mathbb{C}$- (oder $\mathbb{R}$-) Vektorraum V versehen mit Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C} \quad (\mathbb{R}),$$

so dass V bzgl. der Metrik $\|v - w\| = \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle} = d(v, w)$ <u>vollst. ist</u>.

Skalarprodukt: positiv definite, Hermitesche $\mathbb{R}$-Bilinearform:

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$, wenn V nur $\mathbb{R}$-VR), $v, w \in V$

- $\langle \lambda v, \mu w \rangle = \bar{\lambda} \mu \langle v, w \rangle$
- $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
- $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $= 0 \Leftrightarrow v = 0$.

z: $L^2(X)$ versehen mit Metrik des Sk.prod ist vollst. $\rightsquigarrow$ Hilbertraum.

Satz (Fischer-Riesz): $L^2(X)$ mit mit $\langle f, g\rangle = I(\bar{f} \cdot g)$ ist Hilbertraum

Satz: $C_c(X, \mathbb{C})$ liegen dicht in $L^2(X)$.