Plenarübung vom 3.5.16
Analysis II

1. Richtigstellung

__Satz__: Sei (X, d), $X \subset \mathbb{R}^n$ vollständig.
Dann gilt für $A \subset X$:

$$A \text{ ist kompakt} \iff A \text{ ist abgeschlossen und beschränkt.}$$

__Bsp__: $\mathbb{R}^n$ selbst. (Satz 1.29)

__Wichtig__: X enthalten in endl. dim. Vektorraum

"$\Longrightarrow$" gilt für jeden metrischen Raum

"$\Longleftarrow$" Dafür braucht man $\mathbb{R}^n$, weil man Bolzano-Weierstraß anwenden muss.

__Bsp.__, wo "$\Longleftarrow$" falsch: Betrachte reellwertige Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$.
Diese bilden __$\mathbb{R}$-Vektorraum__ X. Wir versehen ihn mit Supremumsnorm
$\|(a_n)_n\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Sei A die Teilmenge der durch 1 beschränkten Folgen ($\|(a_n)\|_\infty \leq 1$).
$A = \overline{K_1(0)}$, ist offensichtl. beschränkt durch 1 und abg.
Aber A ist __nicht__ kompakt, denn die Folge der Folgen $e^{(j)} = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \text{ j-te Stelle}}{1}, 0, \dots)$
hat keine konv. Teilfolge: $\|e^{(j)} - e^{(k)}\| = \begin{cases} 1, & j \neq k \\ 0, & j = k \end{cases}$

2. Weiter mit topologischen Grundbegriffen

Hatten: 1) Jeder metrische Raum (X, d) besitzt ein System von offenen Teilmengen derart, dass

(i) $X, \emptyset$ offen.

(ii) Die Vereinigung bel. vieler off. Teilmengen ist wieder offen.

(iii) Endliche Schnitte offener Teilmengen sind offen.

2) Eine Fct $f: X \to Y$ zw. metr. Räumen $(X,d_X),(Y,d_Y)$ ist

stetig $\Longleftrightarrow$ Für jede offene Teilmenge $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U)$ offen in X.

3) ~~Ist~~ $U \subset X$ ((X,d) metr. Raum) offen $\Longleftrightarrow$ ~~dann ist~~ $(X \setminus U) = U^{cX}$ abgeschlossen.

Jetzt: Def. 1: Es sei X eine bel. Menge.
Es sei ein System von Teilmengen, sog. offenen Mengen, geg., die (i), (ii), (iii) erfüllen.
Dann heißt X topolog. Raum (bzgl. des Systems offener Mengen)
Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Def. 2: Eine Fkt $f: X \to Y$ zw. topologischen Räumen heißt stetig, wenn für alle $U \subset Y$ offen gilt $f^{-1}(U) \subset X$ offen.

Großer Vorteil: Def. unabh. davon, ob man Abstände messen kann, insbes. unabh. von Folgenkonvergenz.

Brauche noch Def. 3: Eine Teilmenge $K \subset X$ eines top. Raums X heißt (überdeckungs)kompakt, wenn für jede offene Überdeckung von K eine endl. Teilüberdeckung existiert, d.h. $\rightarrow$

Seien U_i, $i \in I$, offen in X und $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. ③

Dann ex. endl. viele Indices $i_1, \dots, i_m \in I$ so, dass bereits $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{i_j}$.

<u>Satz (Heine-Borel):</u> Für Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$ (versehen mit Metrik bzw. Top., die von eukl. Norm induziert wird) sind äquivalent.

(a) K ist überdeckungskompakt.

(b) K ist folgenkompakt.

(c) K ist abg. und beschr.

<u>Bew:</u> Am Ende des Semesters in der Vorlesung.

<u>Zusammenhang:</u>

<u>Def.:</u> Ein top. Raum X heißt zusammenhängend, wenn für jede disjunkte Zerlegung in $\left\{\begin{matrix}\text{abg.}\\ \text{off.}\end{matrix}\right\}$ Teilmengen $X_1, X_2 \subset X$,

$$X = X_1 \,\dot\cup\, X_2 ,$$

folgt: $X_1 = \emptyset$ oder $X_2 = \emptyset$.

<u>Bem:</u> X ist zshg $\Longleftrightarrow$ $X, \emptyset$ sind die <u>einzigen</u> Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

<u>Bew:</u> Für jede Zerlegung $X = X_1 \,\dot\cup\, X_2$ in $\left\{\begin{matrix}\text{abg.}\\ \text{off.}\end{matrix}\right\}$ Teilmengen gilt $X_1 = X \setminus X_2$ $\begin{matrix}\text{offen}\\ \text{abg}\end{matrix}$, $X_2 = X \setminus X_1$ $\begin{matrix}\text{offen}\\ \text{abg}\end{matrix}$.

Satz: Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$, die mindestens 2 Pkte enthält, ist zshg, gdw sie ein Intervall ist. (4)

beliebig. $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, offene, Grenze ∞ zugel.

Bew.: Sei $X = I$ ein Intervall und $I = X_1 \dot\cup X_2$ mit X_1, X_2 abg. in I und nicht leer. Sei $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, oE $x_1 < x_2$.

Da I Intervall, ist $[x_1, x_2] \subset I$

Sei $s := \sup([x_1, x_2] \cap X_1)$.

Da X_1 abg., gilt $s \in X_1$, also $s < x_2$. $(s \in [x_1, x_2])$

Somit ist $(s, x_2] \subset X_2$ (sup-Eig.!)

Da $X_1 = I \setminus X_2$ auch offen in I, ex. ein $\varepsilon > 0$ so, dass $K_{\varepsilon, I}(s) = (s-\varepsilon, s+\varepsilon) \cap I \subset X_1$.

Insbes. gehört $s + \frac{\varepsilon}{2}$ zu X_1 $\lightning$ (Sup-Eig.)

Sei X kein Intervall. Dann ex. $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$, und zw. ihnen ein $s \in \mathbb{R} \setminus X$, $x_1 < s < x_2$.

Die Mengen $X_1 = X \cap (-\infty, s) \ni x_1$, $X_2 = X \cap (s, \infty) \ni x_2$ sind disjunkt und offen in X und nicht leer mit

$$X = X_1 \dot\cup X_2.$$

$\blacksquare$

3. Differentialform – Kalkül

D.h. zunächst abstraktes Rechnen nach gewissen vorgeg. Regeln.
Später wird sich dieses Kalkül als extrem nützlich erweisen.
[Immer: Wunderschön!]

Sei $I \subset \{1, \dots, n\}$ eine Teilmenge der Kardinalität $i = \#I$.

Definiere Symbole $dx_I = dx_{n_1} \wedge \dots \wedge dx_{n_i}$, wobei $n_1 < n_2 < \dots < n_i$ die geordneten Elemente von I.

insbes. $dx_j = dx_{\{j\}}$

Frage: Wieviele verschiedene dx_I, $i = \#I$ fest, gibt es?
Antwort: Soviele wie i-elementige Teilmengen, also $\binom{n}{i}$ Stück.
Insbes. ~~gibt~~ für $i > n$ keine i-Formen mehr.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ zulässig, und $C^\infty(U)$ der $\mathbb{R}$-VR der ∞oft part. diffbaren Fkten auf U. Sei $f_I \in C^\infty(U)$ für jedes I, $\#I = i$, geg. Der Ausdruck

$$\sum_{I, \#I = i} f_I(x) \cdot dx_I$$

heißt i-Form auf U (Diffform i-ten Grades).

Bsp: i-Formen: $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i$, $dx_{n-i+1} \wedge dx_{n-i+2} \wedge \dots \wedge dx_n$,

$$\underbrace{e^{-x_2^2} dx_1 + e^{-x_3^2} dx_2 + \dots + e^{-x_n^2} dx_{n-1} + e^{-x_1^2} dx_1}_{1\text{-Form}}, \dots$$

Bem: i-Formen kann man addieren $\left(\sum_I f_I(x) dx_I + \sum_I g_I(x) dx_I = \sum (f_I + g_I)(x) dx_I \right)$

und mit reellen Zahlen multiplizieren. $-\sum f_I dx_I = \sum (-f) dx_I$

$\Rightarrow$ Die i-Formen bilden einen $\mathbb{R}$-VR, $A^i(U)$.

Da $C^\infty(U)$ ein ∞-dim $\mathbb{R}$-VR, bilden auch die i-Formen (6)
unendl. dim. $\mathbb{R}$-VR.

Die $C^\infty(U)$ bilden sogar selbst einen kommutativen Ring. $\left((f \overset{+}{\cdot} g)(x) = f(x) \overset{+}{\cdot} g(x) \right)$.
0-Fkt., 1-Fkt.

Die i-Formen bilden einen $C^\infty(U)$-Modul, nämlich den (freien) Modul, der von den dx_I, $\#I = i$, erzeugt wird,
$$\mathrm{rk}_{C^\infty(U)} A^i(U) = \binom{n}{i}.$$

$dx_\emptyset = 1$,
$$A^0(U) = C^\infty(U) \qquad \mathrm{rk} = 1$$
$$A^1(U) = C^\infty(U)dx_1 \oplus \dots \oplus C^\infty(U)dx_n \qquad \mathrm{rk} = n$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$A^n(U) = C^\infty(U) \underbrace{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}_{\omega_n :=}. \qquad \mathrm{rk} = 1$$

$$A^\bullet(U) = \bigoplus_{i=0}^{(\infty) n} A^i(U) \quad , \quad A^i(U) := \{0\} \text{ für } i > n.$$

Rechenoperationen

$\wedge$-Produkt: $\wedge : A^i(U) \times A^j(U) \longrightarrow A^{i+j}(U)$
$$\left(\sum_I f_I \, dx_I , \sum_J g_J \, dx_J \right) \longmapsto \sum_{I,J} f_I \cdot g_J \, dx_I \wedge dx_J$$

ist distributiv per Def. $dx_I \wedge dx_J := 0$ falls $I \cap J \neq \emptyset$, $(\mathrm{sgn}\,\sigma)\, dx_{I \cup J}$, wo $\sigma = \dots$

Es folgt: • $dx_i \wedge dx_i = 0$ $\quad \big(A^1(U) \times A^1(U) \to A^2(U)$
$(dx_i, dx_i) = dx_i \wedge dx_i$ mit $I = J = \{i\} \big)$

• $dx_i \wedge dx_j = - dx_j \wedge dx_i$

• $\boxed{\text{Für } \eta \in A^i(U), \omega \in A^j(U) : \quad \eta \wedge \omega = (-1)^{i \cdot j} \omega \wedge \eta}$